初中数学竞赛训练教程·重点高中提前批考试用书

主编◎徐淑慰　李德华　施央娣

培优竞赛新思维

- 专题归类 模块清晰
- 课时分解 覆盖全面
- 典例精讲 综合拓展
- 实战演练 巩固强化

数学
九年级

宁波出版社
NINGBO PUBLISHING HOUSE

初中数学竞赛训练教程 · 重点高中提前批考试用书

主编◎徐淑慰　李德华　施央娣

培优竞赛

新思维

- 专题归类　模块清晰
- 课时分解　覆盖全面
- 典例精讲　综合拓展
- 实战演练　巩固强化

数学

九年级

宁波出版社
NINGBO PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

培优竞赛新思维. 数学九年级 / 徐淑慰,李德华,施央娣主编. —宁波：宁波出版社，2019.8
ISBN 978-7-5526-3408-2

Ⅰ.①培… Ⅱ.①徐… ②李… ③施… Ⅲ.①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 262817 号

培优竞赛新思维·数学九年级
PEIYOU JINGSAI XINSIWEI · SHUXUE JIUNIANJI

主　　编	徐淑慰　李德华　施央娣
责任编辑	熊雪婷　廖维勇
出版发行	宁波出版社
地址邮编	宁波市甬江大道 1 号宁波书城 8 号楼 6 楼　315040
网　　址	http://www.nbcbs.com
电　　话	0574－87287264(编辑室)　0574－87286804(发行部)
印　　刷	浙江开源印务有限公司
开　　本	889 毫米×1194 毫米　1/16
印　　张	12.75
字　　数	520 千
版　　次	2019 年 8 月第 1 版
印　　次	2019 年 8 月第 1 次印刷
标准书号	ISBN 978-7-5526-3408-2
定　　价	39.00 元

如发现缺页或倒装,影响阅读,请与承印厂联系调换　电话：0574－87638192

CONTENTS 目录

专题一　二次函数

第1讲　二次函数及其图象

重难点知识

1. 形如 $y=ax^2+bx+c$(a,b,c 是常数,$a\neq0$)的函数叫做二次函数.

2. 二次函数解析式的表示方法

(1)一般式:$y=ax^2+bx+c$(a,b,c 为常数,$a\neq0$);

(2)顶点式:$y=a(x-m)^2+k$(a,m,k 为常数,$a\neq0$);

(3)两根式:$y=a(x-x_1)(x-x_2)$($a\neq0$,x_1,x_2 表示抛物线与 x 轴两交点的横坐标).

3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象是一条抛物线,它的对称轴是直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$,顶点坐标是 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.学会用五点法画二次函数图象.

4. 二次函数 $y=a(x-m)^2+k(a\neq0)$的图象可由二次函数 $y=ax^2$ 的图象向右(当 $m>0$)或向左(当 $m<0$)平移 $|m|$ 个单位,再向上(当 $k>0$)或向下(当 $k<0$)平移 $|k|$ 个单位得到,顶点是(m,k),对称轴是直线 $x=m$.

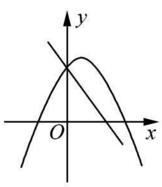
典型例题

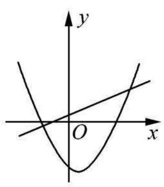
例1　已知二次函数 $y=mx^2+x+m(m-2)$的图象经过原点,则 m 的值为　(　　)

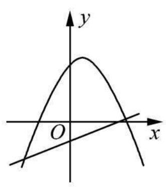
A. 0 或 2　　B. 0　　C. 2　　D. 无法确定

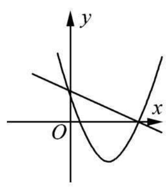
答案　C　**提示**:根据题意得:$m(m-2)=0$,$\therefore m=0$ 或 $m=2$.$\because$二次函数的二次项系数不为零,$\therefore m=2$.

例2　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与一次函数 $y=ax+c(a\neq0)$在同一直角坐标系中的图象可能是　(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

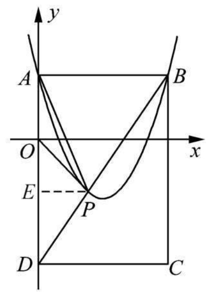
答案　A　**提示**:$\because$一次函数和二次函数都经过 y 轴上的$(0,c)$,$\therefore$两个函数图象交于 y 轴上的同一点,排除 B、C;当 $a>0$ 时,二次函数开口向上,一次函数经过第一、三象限,排除 D;当 $a<0$ 时,二次函数开口向下,一次函数经过第二、四象限,A 正确.

例3　若二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象的顶点在第一象限,且过点$(0,1)$和$(-1,0)$,则 $S=a+b+c$ 的值的变化范围是______________.

答案　$0<S<2$　**提示**:将点$(0,1)$和$(-1,0)$分别代入抛物线解析式,得 $c=1$,$a=b-1$,$\therefore S=a+b+c=2b$,由题设知,对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}>0$ 且 $a<0$,$\therefore 2b>0$.又由 $b=a+1$ 及 $a<0$ 可知 $2b=2a+$

$2<2$.$\therefore 0<S<2$.

例4 如图,已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过矩形 $ABCD$ 的两个顶点 A,B,AB 平行于 x 轴,对角线 BD 与抛物线交于点 P,点 A 的坐标为$(0,2)$,$AB=4$.



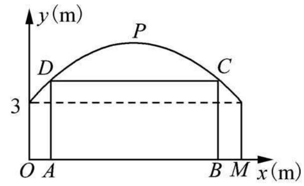
(1) 求抛物线的解析式;

(2) 若 $S_{\triangle APO}=\dfrac{3}{2}$,求矩形 $ABCD$ 的面积.

解析 (1)由题意得,B 点坐标为$(4,2)$.将点 $A(0,2)$,$B(4,2)$代入二次函数解析式得$\begin{cases}2=c,\\2=4^2+4b+c,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=-4,\\c=2,\end{cases}$$\therefore$抛物线的解析式为 $y=x^2-4x+2$.

(2)由 $S_{\triangle APO}=\dfrac{3}{2}$,得$\dfrac{1}{2}OA\cdot|x_P|=\dfrac{3}{2}$,即$\dfrac{1}{2}\times2\times|x_P|=\dfrac{3}{2}$,$\therefore x_P=\dfrac{3}{2}$(舍负).将 $x_P=\dfrac{3}{2}$代入抛物线解析式,得 $y_P=-\dfrac{7}{4}$.过 P 点作垂直于 y 轴的垂线,垂足为 E.$\because\triangle DEP\backsim\triangle DAB$,$\therefore\dfrac{\frac{3}{2}}{4}=\dfrac{AD-2-\frac{7}{4}}{AD}$,解得:$AD=6$.$\therefore S_{矩形ABCD}=AD\cdot AB=6\times4=24$.

例5 如图,某隧道横截面的上下轮廓线分别由抛物线对称的一部分和矩形的一部分构成,最大高度为6 m,底部宽度为 12 m.现以点 O 为原点,OM 所在直线为 x 轴建立直角坐标系.



(1) 直接写出点 M 及抛物线顶点 P 的坐标;

(2) 求出这条抛物线的函数解析式;

(3) 若要搭建一个矩形"支撑架"$AD+DC+CB$,使点 C,D 在抛物线上,点 A,B 在地面 OM 上,这个"支撑架"总长的最大值是多少?

解析 (1) 由题意,得 $M(12,0)$,$P(6,6)$. (2) 由顶点 $P(6,6)$设此函数解析式为 $y=a(x-6)^2+6$,将点$(0,3)$代入,得 $a=-\dfrac{1}{12}$,$\therefore y=-\dfrac{1}{12}(x-6)^2+6=-\dfrac{1}{12}x^2+x+3$. (3) 设 $A(m,0)(0\leqslant m<6)$,则 $B(12-m,0)$,$C\left(12-m,-\dfrac{1}{12}m^2+m+3\right)$,$D\left(m,-\dfrac{1}{12}m^2+m+3\right)$,$\therefore$"支撑架"总长$=AD+DC+CB=\left(-\dfrac{1}{12}m^2+m+3\right)+(12-2m)+\left(-\dfrac{1}{12}m^2+m+3\right)=-\dfrac{1}{6}m^2+18$.$\because$此二次函数的图象开口向下,$\therefore$当 $m=0$ 时,"支撑架"总长有最大值 18.

例6 如果抛物线 $y=-x^2+2(m-1)x+m+1$ 与 x 轴交于 A,B 两点,且点 A 在 x 轴的正半轴上,点 B在 x 轴的负半轴上,OA 的长是 a,OB 的长是 b.

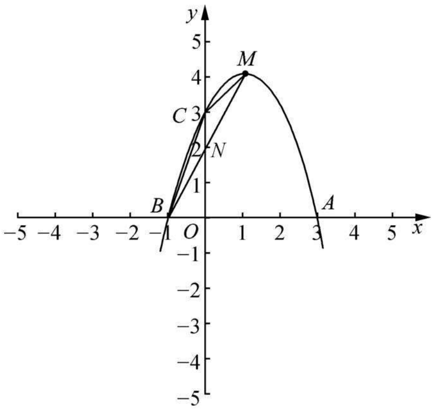
(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若 $a:b=3:1$,求 m 的值,并写出此时抛物线的解析式;

(3) 设(2)中的抛物线与 y 轴交于点C,抛物线的顶点是 M,问:抛物线上是否存在点 P,使$\triangle PAB$ 的面积等于$\triangle BCM$ 面积的 8 倍?若存在,求出点 P 的坐标;若不存在,请说明理由.

解析 (1) 设 A,B 两点的坐标分别是$(x_1,0)$,$(x_2,0)$,$\because A$,B 两点在原点的两侧,$\therefore x_1x_2<0$,即$-(m+1)<0$,解得 $m>-1$.$\because\Delta=[2(m-1)]^2-4\times(-1)\times(m+1)=4m^2-4m+8=4\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+7>0$,$\therefore m$ 的取值范围是 $m>-1$. (2) $\because a:b=3:1$,设 $a=3k$,$b=k(k>0)$,则 $x_1=3k$,$x_2=-k$,$\therefore\begin{cases}3k-k=2(m-1),\\3k\cdot(-k)=-(m+1),\end{cases}$解得$\begin{cases}m_1=2,\\m_2=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$\because m=\dfrac{1}{3}$时,$x_1+x_2=-\dfrac{4}{3}$(不合题

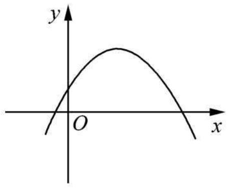
意，舍去），∴$m=2$，∴抛物线的解析式是 $y=-x^2+2x+3$．（3）易求抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 与 x 轴的两个交点坐标是 $A(3,0)$，$B(-1,0)$，与 y 轴交点坐标是 $C(0,3)$，顶点坐标是 $M(1,4)$．设直线 BM 的解析式为 $y=px+q$，则 $\begin{cases}4=p\cdot1+q,\\0=p\cdot(-1)+q,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=2,\\q=2.\end{cases}$ ∴直线 BM 的解析式是 $y=2x+2$．设直线 BM 与 y 轴交于点 N，则点 N 坐标是 $(0,2)$，如图所示，∴$S_{\triangle BCM}=S_{\triangle BCN}+S_{\triangle MNC}=\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times1\times1=1$．设点 P 坐标是 (x_P,y_P)，∵$S_{\triangle ABP}=8S_{\triangle BCM}$，∴$\frac{1}{2}\times AB\times|y_P|=8\times1$，即 $\frac{1}{2}\times4\times|y_P|=8$，∴$|y_P|=4$．∴$y_P=\pm4$．当 $y_P=4$ 时，点 P 与点 M 重合，即 $P(1,4)$．当 $y_P=-4$ 时，$-4=-x_P^2+2x_P+3$，解得 $x_P=1\pm2\sqrt{2}$．∴满足条件的点 P 存在，点 P 坐标是 $(1,4)$ 或 $(1+2\sqrt{2},-4)$ 或 $(1-2\sqrt{2},-4)$．



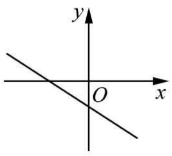
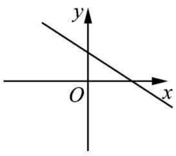
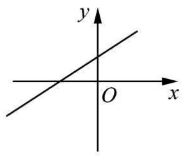
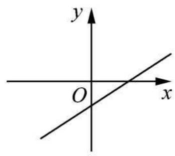
实战演练

选择题

1．已知函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则函数 $y=ax+b$ 的图象是　　（　　）



（第 1 题）

A. 
B. 
C. 
D. 

2．已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的对称轴是 $x=2$，且当 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\pi$，$x_3=0$ 时，y 的对应值分别是 y_1，y_2，y_3，那么 y_1，y_2，y_3 的大小关系是　　（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_1>y_2>y_3$

C. $y_2<y_1<y_3$　　D. $y_2>y_1>y_3$

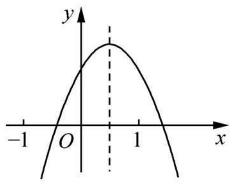
3．根据下列表格的对应值，判断方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0,a,b,c$ 为常数)的一个解 x 的范围是　　（　　）

x	3.23	3.24	3.25	3.26
ax^2+bx+c	−0.06	−0.02	0.03	0.09

A. $3<x<3.23$　　B. $3.23<x<3.24$

C. $3.24<x<3.25$　　D. $3.25<x<3.26$

4．已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图所示，给出以下结论：①$a+b+c<0$；②$a-b+c<0$；③$2a+b<0$；④$abc>0$，其中正确结论的序号是　　（　　）



（第 4 题）

A. ③④　　B. ②③

C. ①④　　D. ①②③

5. 已知二次函数 $y=2x^2+9x+34$，当自变量 x 取两个不同的值 x_1，x_2 时，函数值相等，则当自变量 x 取 x_1+x_2 时的函数值与（　　）

A. $x=1$ 时的函数值相等　　B. $x=0$ 时的函数值相等

C. $x=\frac{1}{4}$ 时的函数值相等　　D. $x=-\frac{9}{4}$ 时的函数值相等

6. 已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴相交于 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$ 两点，其顶点坐标为 $P\left(-\frac{b}{2},\frac{4c-b^2}{4}\right)$，$AB=|x_1-x_2|$，若 $S_{\triangle APB}=1$，则 b 与 c 的关系式是（　　）

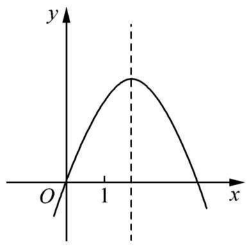
A. $b^2-4c+1=0$　　B. $b^2-4c-1=0$

C. $b^2-4c+4=0$　　D. $b^2-4c-4=0$

7. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图所示，记 $p=2a+b$，$q=b-a$，则下列结论正确的是（　　）

A. $p>q>0$　　B. $q>p>0$

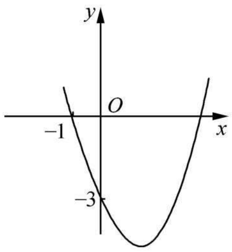
C. $p>0>q$　　D. $q>0>p$



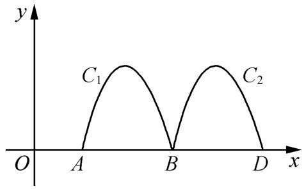
（第 7 题）

填空题

8. 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 过点 $(-1,0)$ 和点 $(0,-3)$，且顶点在第四象限，设 $P=a+b+c$，则 P 的取值范围是________．



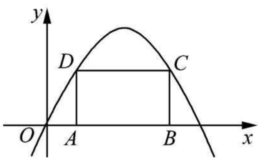
（第 8 题）



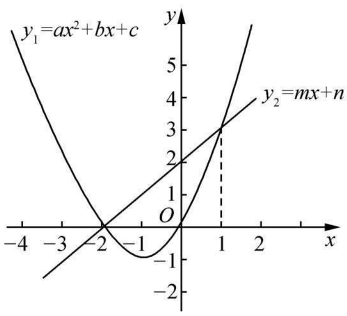
（第 9 题）

9. 如图，抛物线 $y=-2x^2+8x-6$ 与 x 轴交于点 A，B，把抛物线在 x 轴及其上方的部分记作 C_1，将 C_1 向右平移得 C_2，C_2 与 x 轴交于点 B，D，若直线 $y=x+m$ 与 C_1，C_2 共有 3 个不同的交点，则 m 的取值范围是________．

10. 如图，四边形 $ABCD$ 是矩形，A，B 两点在 x 轴的正半轴上，C，D 两点在抛物线 $y=-x^2+6x$ 上．设 $OA=m(0<m<3)$，矩形 $ABCD$ 的周长为 l，则 l 与 m 的函数解析式为________．



（第 10 题）



（第 13 题）

11. 函数 $y=x^2+2mx+m-7$ 与 x 轴的两个交点在 $(1,0)$ 的两旁，则 m 的取值范围是________．

12. a，b 是正数，并且抛物线 $y=x^2+ax+2b$ 和 $y=x^2+2bx+a$ 都与 x 轴有公共点，则 a^2+b^2 的最小值是________．

13. 如图是二次函数 $y_1=ax^2+bx+c$ 和一次函数 $y_2=mx+n$ 的图象，观察图象，当 $y_2\geqslant y_1$ 时，x 的取值范围是________．

14. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$（其中 a 是正整数）的图象经过点 $A(-1,4)$ 与点 $B(2,1)$，并且与 x 轴有两个不同的交点，则 $b+c$ 的最大值为________．

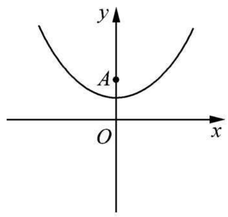
解答题

15. 已知抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$(如图所示).

(1) 求抛物线的顶点坐标与对称轴；

(2) 已知 y 轴上一点 $A(0,2)$，点 P 在抛物线上，过点 P 作 $PB\perp x$ 轴，垂足为 B.若$\triangle PAB$ 是等边三角形，求点 P 的坐标；

(3) 在(2)的条件下，点 M 在直线 AP 上.在平面内是否存在点 N，使四边形 $OAMN$ 为菱形？若存在，直接写出所有满足条件的点 N 的坐标；若不存在，请说明理由.



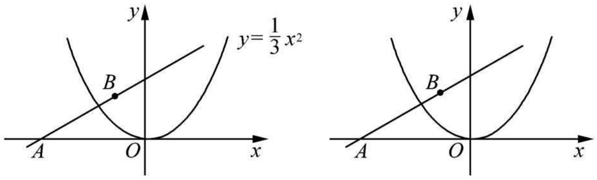
(第 15 题)

16. 如图，直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$ 经过点 $B(-\sqrt{3},2)$，且与 x 轴交于点 A，将抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 沿 x 轴作左右平移，记平移后的抛物线为 C，其顶点为 P.

(1) 求$\angle BAO$ 的度数；

(2) 抛物线 C 与 y 轴交于点 E，与直线 AB 交于两点，其中一个交点为 F，当线段 $EF\parallel x$ 轴时，求平移后的抛物线 C 对应的函数关系式；

(3) 在抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 平移过程中，将$\triangle PAB$ 沿直线 AB 翻折得到$\triangle DAB$，点 D 能否落在抛物线 C 上？如能，求出此时抛物线 C 顶点 P 的坐标；如不能，说明理由.



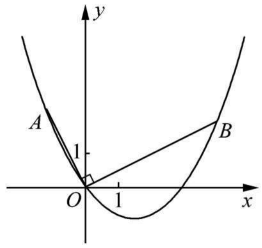
(第 16 题)

17. 如图，在平面直角坐标系中，$OB\perp OA$，且 $OB=2OA$，点 A 的坐标是$(-1,2)$.

(1) 求点 B 的坐标；

(2) 求过点 A,O,B 的抛物线的表达式；

(3) 连结 AB，在(2)中的抛物线上求出点 P，使得 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABO}$.



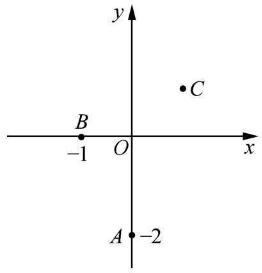
(第 17 题)

18. 已知二次函数过点 $A(0,-2)$，$B(-1,0)$，$C\left(\frac{5}{4},\frac{9}{8}\right)$.

(1) 求此二次函数的解析式；

(2) 判断点 $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$是否在直线 AC 上；

(3) 过点 $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$作一条直线 l 与二次函数的图象交于 E，F 两点(不同于 A，B，C 三点)，请给出 E 点的坐标，并证明$\triangle BEF$ 是直角三角形.



(第 18 题)

19. 已知以 x 为自变量的二次函数 $y=4x^2-8nx-3n-2$，该二次函数图象与 x 轴的两个交点的横坐标的差的平方等于关于 x 的方程 $x^2-(7n+6)x+2(n+1)(5n+4)=0$ 的一整数根，求 n 的值.

20. 已知二次函数 $y=x^2+2(m+1)x-m+1$.

(1) 随着 m 的变化，该二次函数图象的顶点 P 是否都在某条抛物线上？如果是，请求出该抛物线的函数表达式，如果不是，请说明理由；

(2) 如果直线 $y=x+1$ 经过二次函数 $y=x^2+2(m+1)x-m+1$ 图象的顶点 P，求此时 m 的值.

第 2 讲　二次函数的性质

重难点知识

1. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的性质

$a>0$ 时，抛物线开口向上，并向上无限延伸.当 $x\leqslant-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x\geqslant-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最小值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

$a<0$ 时，抛物线开口向下，并向下无限延伸.当 $x\leqslant-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x\geqslant-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最大值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象与 x 轴的交点

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象与 x 轴的两个交点的横坐标 x_1,x_2，与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个实数根相对应.抛物线与 x 轴的交点情况可以由对应的一元二次方程的根的判别式判定.

(1)有两个交点 $\Leftrightarrow\Delta>0$；

(2)有一个交点(顶点在 x 轴上)$\Leftrightarrow\Delta=0$；

(3)没有交点 $\Leftrightarrow\Delta<0$.

3. 二次函数的最值

(1)如果自变量的取值范围是全体实数，那么二次函数在顶点处取得最大值(或最小值)，即当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 取最值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；

(2)如果自变量的取值是某一确定范围时，需要结合图象和增减性考虑.

典型例题

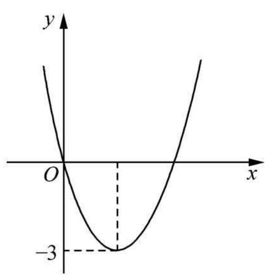
例1　设二次函数 $y=x^2+2ax+\dfrac{a^2}{2}(a<0)$ 的图象顶点为 A，与 x 轴交点为 B,C，当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时，a 的值为________.

答案　$-\sqrt{6}$

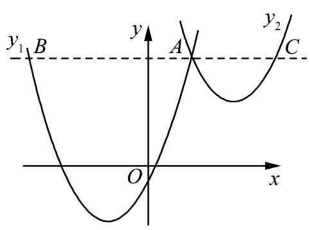
例2　二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图象如图所示，若一元二次方程 $ax^2+bx+m=0$ 有实数根，则 m 的最大值为　　(　　)

A. -3　　B. 3　　C. -6　　D. 9

答案　B



(例 2)



(例 3)

例3　如图，抛物线 $y_1=a(x+2)^2-3$ 与 $y_2=\dfrac{1}{2}(x-3)^2+1$ 交于点 $A(1,3)$，过点 A 作 x 轴的平行线，

分别交两条抛物线于点 B,C,则以下结论:

① 无论 x 取何值,y_2 的值总是正数;② $a=1$;③ 当 $x=0$ 时,$y_2-y_1=4$;④ $2AB=3AC$

其中正确结论是 ( )

A. ①② B. ②③ C. ③④ D. ①④

答案 D

例4 已知:关于 x 的方程 $(a+2)x^2-2ax+a=0$ 有两个不相等的实数根 x_1 和 x_2,并且抛物线 $y=x^2-(2a+1)x+2a-5$ 与 x 轴的两个交点分别位于点 $(2,0)$ 的两旁.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 当 $|x_1|+|x_2|=2\sqrt{2}$ 时,求 a 的值.

解析 (1) ∵关于 x 的方程 $(a+2)x^2-2ax+a=0$ 有两个不相等的实数根,∴$a+2\neq0$,且 $\Delta=(-2a)^2-4a(a+2)>0$,解得:$a<0$,且 $a\neq-2$.① 设抛物线 $y=x^2-(2a+1)x+2a-5$ 与 x 轴的两个交点的坐标分别为 $(\alpha,0)$,$(\beta,0)$,且 $\alpha<\beta$,∴α,β 是关于 x 的方程 $x^2-(2a+1)x+2a-5=0$ 的两个不相等的实数根.∵$\Delta=[-(2a+1)]^2-4\times1\times(2a-5)=(2a-1)^2+20>0$,∴$a$ 为任意实数.② 由根与系数关系得:$\alpha+\beta=2a+1$,$\alpha\beta=2a-5$.∵抛物线 $y=x^2-(2a+1)x+2a-5$ 与 x 轴的两个交点分别位于点 $(2,0)$ 的两旁,∴$\alpha<2$,$\beta>2$,∴$(\alpha-2)(\beta-2)<0$,∴$\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4<0$,∴$2a-5-2(2a+1)+4<0$,解得:$a>-\dfrac{3}{2}$.③ 由①、②、③得 a 的取值范围是 $-\dfrac{3}{2}<a<0$.

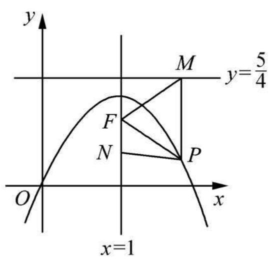
(2) ∵x_1 和 x_2 是关于 x 的方程 $(a+2)x^2-2ax+a=0$ 的两个不相等的实数根,∴$x_1+x_2=\dfrac{2a}{a+2}$,$x_1x_2=\dfrac{a}{a+2}$.∵$-\dfrac{3}{2}<a<0$,∴$a+2>0$,∴$x_1x_2=\dfrac{a}{a+2}<0$.不妨设 $x_1>0$,$x_2<0$,∴$|x_1|+|x_2|=x_1-x_2=2\sqrt{2}$,∴$x_1{}^2-2x_1x_2+x_2{}^2=8$,即 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=8$,∴$\left(\dfrac{2a}{a+2}\right)^2-\dfrac{4a}{a+2}=8$,解这个方程,得:$a_1=-4$,$a_2=-1$.经检验,$a_1=-4$,$a_2=-1$ 都是方程 $\left(\dfrac{2a}{a+2}\right)^2-\dfrac{4a}{a+2}=8$ 的根,∵$a=-4<-\dfrac{3}{2}$,∴舍去.∴$a=-1$.

例5 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 顶点为 $C(1,1)$ 且过原点 O.过抛物线上一点 $P(x_P,y_P)$ 向直线 $y=\dfrac{5}{4}$ 作垂线,垂足为 M.

(1) 求字母 a,b,c 的值;

(2) 在直线 $x=1$ 上有一点 $F\left(1,\dfrac{3}{4}\right)$,连结 FM,求以 PM 为底边的等腰三角形 PFM 的 P 点的坐标,并证明此时△PFM 为正三角形;

(3) 对抛物线上任意一点 P,是否总存在一点 $N(1,t)$,使 $PM=PN$ 恒成立?若存在,请求出 t 值;若不存在,请说明理由.

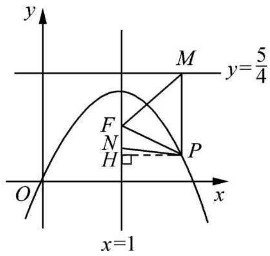


(例 5)

解析 (1) 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 顶点为 $C(1,1)$ 且过原点 O,可得 $-\dfrac{b}{2a}=1$,$\dfrac{4ac-b^2}{4a}=1$,$c=0$,∴$a=-1$,$b=2$,$c=0$. (2) 由(1)知抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x$,故设 P 点的坐标为 $(m,-m^2+2m)$,则 M 点的坐标为 $\left(m,\dfrac{5}{4}\right)$,∵△$PFM$ 是以 PM 为底边的等腰三角形,∴$PF=MF$,即 $(m-1)^2+\left(-m^2+2m-\dfrac{3}{4}\right)^2=(m-1)^2+\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{4}\right)^2$,∴$-m^2+2m-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}$ 或 $-m^2+2m-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{1}{2}$.当 $-m^2+2m-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}$ 时,即 $-4m^2+8m-5=0$.∵$b^2-4ac=64-80=-16<0$,

∴此时无解.当 $-m^2+2m-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$ 时,即 $-4m^2+8m-1=0$,∴ $m=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $m=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ⅰ.当 $m=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,P 点的坐标为 $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{4}\right)$,$M$ 点的坐标为 $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{5}{4}\right)$.Ⅱ.当 $m=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,P 点的坐标为 $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{4}\right)$,$M$ 点的坐标为 $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{5}{4}\right)$,经过计算可知 $PF=PM$,∴△MPF 为正三角形.∴P 点坐标为 $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{4}\right)$ 或 $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{4}\right)$.



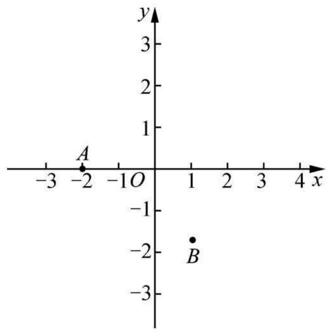
(3) 当 $t=\frac{3}{4}$ 时,即 N 与 F 重合时,$PM=PN$ 恒成立.证明:过点 P 作直线 $x=1$ 的垂线,垂足为 H,在 Rt△PNH 中,$PN^2=(x_P-1)^2+(t-y_P)^2=x_P^2-2x_P+1+t^2-2ty_P+y_P^2$,$PM^2=\left(\frac{5}{4}-y_P\right)^2=y_P^2-\frac{5}{2}y_P+\frac{25}{16}$,$P$ 是抛物线上的点,∴ $y_P=-x_P^2+2x_P$,∴ $PN^2=1-y_P+t^2-2ty_P+y_P^2=y_P^2-\frac{5}{2}y_P+\frac{25}{16}$,移项,合并同类项得:$-\frac{3}{2}y_P+2ty_P+\frac{9}{16}-t^2=0$,∴ $y_P\left(2t-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{9}{16}-t^2\right)=0$ 对任意 y 恒成立.∴ $2t-\frac{3}{2}=0$ 且 $\frac{9}{16}-t^2=0$,∴ $t=\frac{3}{4}$,故 $t=\frac{3}{4}$ 时,$PM=PN$ 恒成立.∴存在这样的点 $N\left(1,\frac{3}{4}\right)$ 满足要求.

例6 如图,在直角坐标系中,点 A 的坐标为 $(-2,0)$,点 B 的坐标为 $(1,-\sqrt{3})$,已知抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 经过 A,B,O(O 为原点)三点.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 在该抛物线的对称轴上,是否存在点 C,使△BOC 的周长最小?若存在,求出点 C 的坐标;若不存在,请说明理由;

(3) 如果点 P 是该抛物线上 x 轴上方的一个动点,那么△PAB 是否有最大面积?若有,求出此时点 P 的坐标及△PAB 的最大面积;若没有,请说明理由.(注意:本题中的结果均保留根号)



(例 6)

解析 (1) 根据题意,将 $A(-2,0)$,$B(1,-\sqrt{3})$,$O(0,0)$ 三点代入抛物线解析式 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$,得 $\begin{cases}4a-2b+c=0,\\a+b+c=-\sqrt{3},\\c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{\sqrt{3}}{3},\\b=-\frac{2\sqrt{3}}{3},\\c=0,\end{cases}$ 故所求抛物线解析式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x$.(2) 存在.理由如下:如答图 1 所示,$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)^2+\frac{\sqrt{3}}{3}$,∴抛物线的对称轴为 $x=-1$.∴点 C 在对称轴 $x=-1$ 上,△BOC 的周长 $=OB+BC+CO$.∵ $OB=2$,要使△BOC 的周长最小,必须 $BC+CO$ 最小.∵点 O 与点 A 关于直线 $x=-1$ 对称,有 $CO=CA$,△BOC 的周长 $=OB+BC+CO=OB+BC+CA$,∴当 A,C,B 三点共线,即点 C 为直线 AB 与抛物线对称轴的交点时,$BC+CA$ 最小,此时△BOC 的周长最小.设直线 AB 的解析式为 $y=kx+t$,则有 $\begin{cases}-2k+t=0,\\k+t=-\sqrt{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{\sqrt{3}}{3},\\t=-\frac{2\sqrt{3}}{3},\end{cases}$ ∴直线 AB 的解析式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$,当 $x=-1$ 时,$y=$

$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴所求点 C 的坐标为 $\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

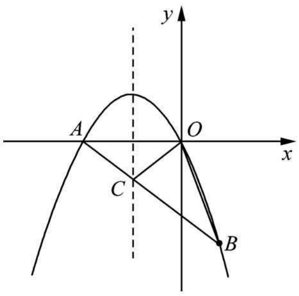


图 1

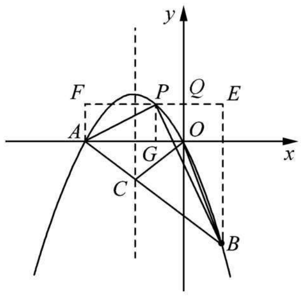


图 2

(3) 设 $P(x_P,y_P)(-2<x_P<0,y_P>0)$，则 $y_P=-\frac{\sqrt{3}}{3}x_P^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x_P$ ①. 如答图 2 所示，过点 P 作 $PQ\perp y$ 轴于点 Q，$PG\perp x$ 轴于点 G，过点 A 作 $AF\perp PQ$ 于点 F，过点 B 作 $BE\perp PQ$ 于点 E，则 $PQ=-x_P$，$PG=y_P$，由题意可得，$S_{\triangle PAB}=S_{梯形AFEB}-S_{\triangle AFP}-S_{\triangle BEP}=\frac{1}{2}(AF+BE)\cdot FE-\frac{1}{2}AF\cdot FP-\frac{1}{2}PE\cdot BE=\frac{1}{2}(y_P+\sqrt{3}+y_P)(1+2)-\frac{1}{2}y_P\cdot(2+x_P)-\frac{1}{2}(1-x_P)(\sqrt{3}+y_P)=\frac{3}{2}y_P+\frac{\sqrt{3}}{2}x_P+\sqrt{3}$ ②. 将①代入②得：$S_{\triangle PAB}=\frac{3}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}x_P^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x_P\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}x_P+\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x_P+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9\sqrt{3}}{8}$. ∴当 $x_P=-\frac{1}{2}$ 时，$\triangle PAB$ 的面积最大，最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{8}$，此时 $y_P=-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，∴点 P 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

实战演练

选择题

1. 已知点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 均在抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+4$ 上，则下列说法中，正确的是 ( )

A. 若 $y_1=y_2$，则 $x_1=x_2$　　B. 若 $x_1=-x_2$，则 $y_1=-y_2$

C. 若 $0<x_1<x_2$，则 $y_1>y_2$　　D. 若 $x_1<x_2<0$，则 $y_1>y_2$

2. 若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的 x 与 y 的部分对应值如下表，则当 $x=1$ 时，y 的值为 ( )

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2
y	-27	-13	-3	3	5	3

A. 5　　B. -3　　C. -13　　D. -27

3. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a<0)$ 的图象经过点 $(-1,2)$，且与 x 轴交点的横坐标分别为 x_1，x_2，其中 $-2<x_1<-1$，$0<x_2<1$. 下列结论：

① $4a-2b+c<0$；② $2a-b<0$；③ $a+c<1$；④ $b^2+8a>4ac$

其中正确的有 ( )

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

4. 在平面直角坐标系中，横坐标与纵坐标都是整数的点称为整点，将二次函数 $y=-x^2+6x-\frac{27}{4}$ 的图象与 x 轴所围成的封闭图形染成红色，则在此红色区域内部及其边界上的整点的个数是 ( )

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

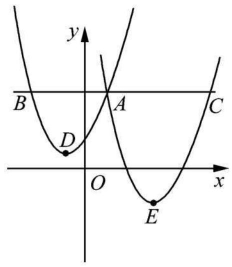
5. 如图，抛物线 $y_1=\frac{1}{2}(x+1)^2+1$ 与 $y_2=a(x-4)^2-3$ 交于点 $A(1,3)$，过点 A 作 x 轴的平行线，分别交两条抛物线于 B,C 两点，且 D,E 分别为顶点，则下列结论：

① $a=\frac{2}{3}$；② $AC=AE$；③ $\triangle ABD$ 是等腰直角三角形；④ 当 $x>1$ 时，$y_1>y_2$

其中正确的结论是　（　　）

A. ①③④　　B. ①③

C. ①②④　　D. ②



（第 5 题）

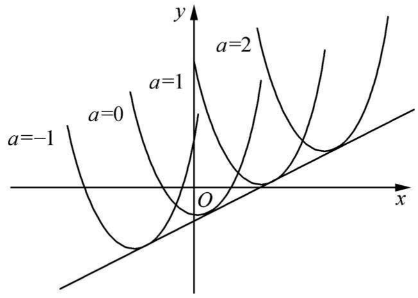
6. 当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时，二次函数 $y=-(x-m)^2+m^2+1$ 有最大值 4，则实数 m 的值为　（　　）

A. $-\frac{7}{4}$　　B. $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$　　C. 2 或 $-\sqrt{3}$　　D. 2 或 $-\sqrt{3}$ 或 $-\frac{7}{4}$

填空题

7. 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 经过点 $A(-3,0)$，对称轴是直线 $x=-1$，则 $a+b+c=$__________.

8. 已知二次函数 $y=(x-2a)^2+(a-1)$（a 为常数），当 a 取不同的值时，其图象构成一个“抛物线系”.如图分别是当 $a=-1$，$a=0$，$a=1$，$a=2$ 时二次函数的图象.它们的顶点在一条直线上，这条直线的解析式是________.



（第 8 题）

9. 已知关于 x 的二次函数 $y=ax^2+(a^2-1)x-a$ 的图象与 x 轴的一个交点的坐标为 $(m,0)$.若 $2<m<3$，则 a 的取值范围是________.

10. 不论 m 取任何实数，抛物线 $y=x^2+2mx+m^2+m-1$ 的顶点都在一条直线上，则这条直线的函数解析式是__________.

11. 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴正半轴交于 A,B 两点，与 y 轴正半轴交于点 C.已知 $AB=\sqrt{3}AC$，$\angle CAO=30°$，则 $c=$________.

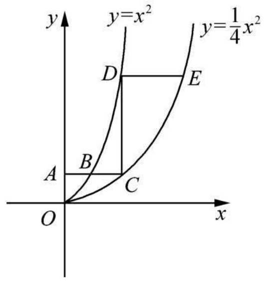
12. 如果当 m 取不等于 0 和 1 的任意实数时，抛物线 $y=\frac{m-1}{m}x^2+\frac{2}{m}x-\frac{m-3}{m}$ 在平面直角坐标系中都过两个定点，那么这两个定点间的距离为________.

解答题

13. 如图，过 y 轴上一点 $A(0,1)$ 作 AC 平行于 x 轴，交抛物线 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 于点 B，交抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2(x\geqslant 0)$ 于点 C；过点 C 作 CD 平行于 y 轴，交抛物线 $y=x^2$ 于点 D；过点 D 作 DE 平行于 x 轴，交抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 于点 E.

(1) 求 $\frac{AB}{BC}$；

(2) O,B,E 三点是否在同一直线上？如果在，写出直线解析式；如果不在，请说明理由.



（第 13 题）

14. 方程 $x^2+(2m-1)x+(m-6)=0$ 有一根不大于 -1，另一根不小于 1.

(1) 求 m 的取值范围；

(2) 求方程两根平方和的最大值与最小值.

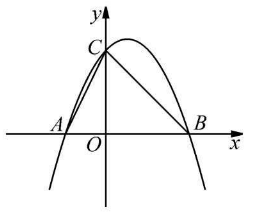
15. 已知抛物线 $y=x^2+mx+n$ 经过点 $(2,-1)$，且与 x 轴交于两点 $A(a,0)$，$B(b,0)$，若点 P 为该抛物线的顶点，求使 $\triangle PAB$ 面积最小的抛物线的解析式.

16. 如图所示，已知点 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，$C(0,t)$，且 $t>0$，$\tan\angle BAC=3$，抛物线经过 A，B，C 三点，点 $P(2,m)$ 是抛物线与直线 l：$y=k(x+1)$ 的一个交点.

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 对于动点 $Q(1,n)$，求 $PQ+QB$ 的最小值；

(3) 若动点 M 在直线 l 上方的抛物线上运动，求 $\triangle AMP$ 的边 AP 上的高 h 的最大值.



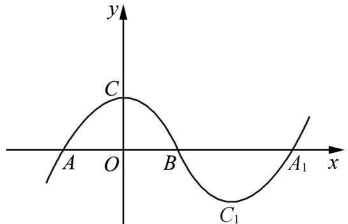
（第 16 题）

17. 如图所示，抛物线 m：$y=ax^2+b(a<0,b>0)$ 与 x 轴交于点 A，B（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C.将抛物线 m 绕点 B 旋转 $180°$，得到新的抛物线 n，它的顶点为 C_1，与 x 轴的另一个交点为 A_1.

(1) 当 $a=-1$，$b=1$ 时，求抛物线 n 的解析式；

(2) 判断四边形 AC_1A_1C 是什么特殊四边形，请写出结果并说明理由；

(3) 若四边形 AC_1A_1C 为矩形，请求出 a，b 应满足的关系式.



（第 17 题）

18. 已知抛物线 $y=x^2$ 与动直线 $y=(2t-1)x-c$ 有公共点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，且 $x_1^2+x_2^2=t^2+2t-3$.

(1) 求实数 t 的取值范围；

(2) 当 t 为何值时，c 取到最小值，并求出 c 的最小值.

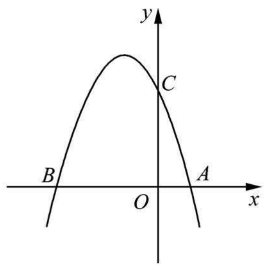
19. 如图，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(1,0)$，$B(-3,0)$ 两点.

(1) 求该抛物线的解析式；

(2) 设(1)中的抛物线交 y 轴于点 C，在该抛物线的对称轴上是否存在点 Q，使得 $\triangle QAC$ 的周长最小？若存在，求出点 Q 的坐标，若不存在，请说明理由；

(3) 在(1)中的抛物线上的第二象限内是否存在一点 P，使 $\triangle PBC$ 的面积最大？若存在，求出点 P 的坐标及 $\triangle PBC$ 面积的最大值，若不存在，请说明理由；

(4) 若点 M 为 x 轴上一点，在抛物线上是否存在点 N 使得以 M,N,A,C 为顶点的四边形为平行四边形？若存在，直接写出 N 点坐标，若不存在，请说明理由.



(第 19 题)

20. 已知 m,n,p 为正整数，$m<n$，设 $A(-m,0)$，$B(n,0)$，$C(0,p)$，O 为坐标原点.若 $\angle ACB=90^\circ$，且 $OA^2+OB^2+OC^2=3(OA+OB+OC)$，求图象经过 A,B,C 三点的二次函数的解析式.