全国卷

高考数学函数压轴题研究

余小芬　刘成龙　孙　虹　编著

QUANGUOJUAN

GAOKAO SHUXUE HANSHU YAZHOUTI YANJIU

四川大学出版社

全国卷

高考数学函数压轴题研究

编　著　余小芬　刘成龙　孙　虹

编　委　吕荣春　朱勇军　李小梅　杨坤林　石群兰　赵珂誉　李玉刚　胡　春　刘钊熙
梁如均　于　泳　余　浩　董万平　罗　成　姜　燕　罗　东　蒲嘉露　彭玉灵
钟梦圆　吕沂桦　刘嘉源　袁小燕　李寿珍　李嘉欣　张　元　黄成世　蒋玉秀
方　红　江文星　申　东　姚　宇　杨　胤　肖文思

四川大学出版社

全国卷

高考数学函数压轴题研究

编　著　余小芬　刘成龙　孙　虹

编　委　吕荣春　朱勇军　李小梅　杨坤林　石群兰　赵珂誉　李玉刚　胡　春　刘钊熙
梁如均　于　泳　余　浩　董万平　罗　成　姜　燕　罗　东　蒲嘉露　彭玉灵
钟梦圆　吕沂桦　刘嘉源　袁小燕　李寿珍　李嘉欣　张　元　黄成世　蒋玉秀
方　红　江文星　申　东　姚　宇　杨　胤　肖文思

四川大学出版社

前　言

高考试题是精心之作，有些题目立意深刻、构思巧妙、设计新颖，可谓独具匠心。高考试题是知识、能力和思想方法的载体，是命题思想、命题理念的程序化展现，具有典型性、示范性和权威性。因此，高考试题是应对高考的“最佳原型”。研究高考试题是复习备考中“有的放矢”的最优选择。纵观历年高考试题，不乏情境新颖、探究性强、思路宽广、解法多样、结论丰富的优秀试题，这些好题不仅是当年高考的一道亮丽风景线，而且具有重要的教学和研究价值。同时这些试题的变式和拓展也是再次编写高考试题的良好素材。一线的数学教师将这些试题作为高考复习的例题或研究性学习的材料，既能避免题海战术，又能有效地促进学生数学核心素养的不断提升。因此，数学教师需要深入研究高考试题，认真把握高考动态，领会命题改革精神。

近年来，部分省份逐步取消了高考自主命题，回归全国统一命题。因此，深入研究历年全国卷高考试题，把握试卷考点分布、试题特点、难易程度等，对复习备考显得尤为重要。本书继《全国卷高考数学函数客观题解题分析》的出版，在高考自主命题回归全国统一命题的背景下，以高中函数知识为例，研究近十五年全国卷函数压轴题，旨在更全面地把握全国卷函数命题方向，为应对全国卷高考、服务一线教学提供一定的参考和帮助，同时，也为数学类师范专业学生学习提供高考试题研究案例。

本书在撰写过程中力求实现以下目标：

（1）突出重点内容的研究。结合 2003—2017 年这十五年高考数学全国卷函数压轴题，对函数考查的几个重要专题，如函数的单调性、函数图像交点问题、切线问题、极值问题、最值问题、零点问题、恒成立问题等进行了探讨，并从试题立意、试题解法、蕴含数学思想等不同视角对试题进行了点评。

（2）研究典型案例。通过精选历年全国卷高考试题，从试题立意、试题背景、试题解法、试题变式、试题推广等不同角度进行了详细剖析。这些内容保留了论文的规范格式，为学习者撰写研究数学高考方面的论文提供了样式。

衷心感谢为本书的出版提供大力支持和资助的内江师范学院数学与信息科学学院和科研处、教育部本科教学工程内江师范学院“数学与应用数学专业综合改革试点”项目

(ZG0464)、四川省教育厅“数学与应用数学专业教学综合改革项目”、四川省“西部卓越中学数学教师协同培养计划”项目(ZY16001)、内江师范学院“数学与应用数学专业转型发展改革试点”项目(ZX17003)、内江师范学院2016年度校级学科建设特色培养项目(T160009,T160010,T160011)、内江师范学院教材出版基金;感谢为本书的出版付出辛勤劳动的四川大学出版社的编辑们;感谢为本书的出版提供热情帮助的彭家寅、曾意、赵思林、王新民、潘超、李红霞、吕晓亚、徐小琴等老师;感谢本书所引用研究成果的作者。同时也真诚感谢关心、支持本书出版的所有亲人、朋友们,谢谢您们的支持和帮助!

由于时间及知识水平所限,本书在编写过程中难免有不足之处,恳请读者批评指正。

编　者

2018 年 8 月

目　录

专题篇

案例篇

专题篇[①]

① 本篇作者为余小芬.

美国著名学者布鲁纳认为：“不论我们选教什么学科，务必使学生理解学科的基本结构. 这是在运用知识方面的最低要求，它有助于解决学生在课外所遇到的问题和事件，或者在日后训练中遇到的问题.”由此可见，厘清知识脉络，构建数学知识体系，对高三复习意义重大，这不仅有助于夯实基础知识、掌握基本技能，而且能启发学生积极主动地思考，使学生提升数学学习能力、提高应试能力和应试技巧. 因此，本书在总结历年全国卷函数解答专题之前，先对人教版函数与导数部分的知识，从宏观和微观两个角度进行知识体系的建构.

数学是研究数量关系和空间形式的科学. 如果说中学数学的研究对象可分为较单纯状态的“数量关系”“空间形式”，或两者混合状态的“数形结合”，那么从宏观角度分析，函数就将不同研究对象有机地联系了起来，具有绝对的概括引导作用：数可以看成特殊函数；数的运算可以看成特殊的二元函数；代数式可以容易地被改造成一个函数；数列是特殊的函数；解方程也可纳入函数问题的讨论中；解三角形可化归为一个三角函数问题；函数与平面曲线具有影子一样的密不可分关系.① 函数与中学数学中各知识点的关系如图 1 所示.

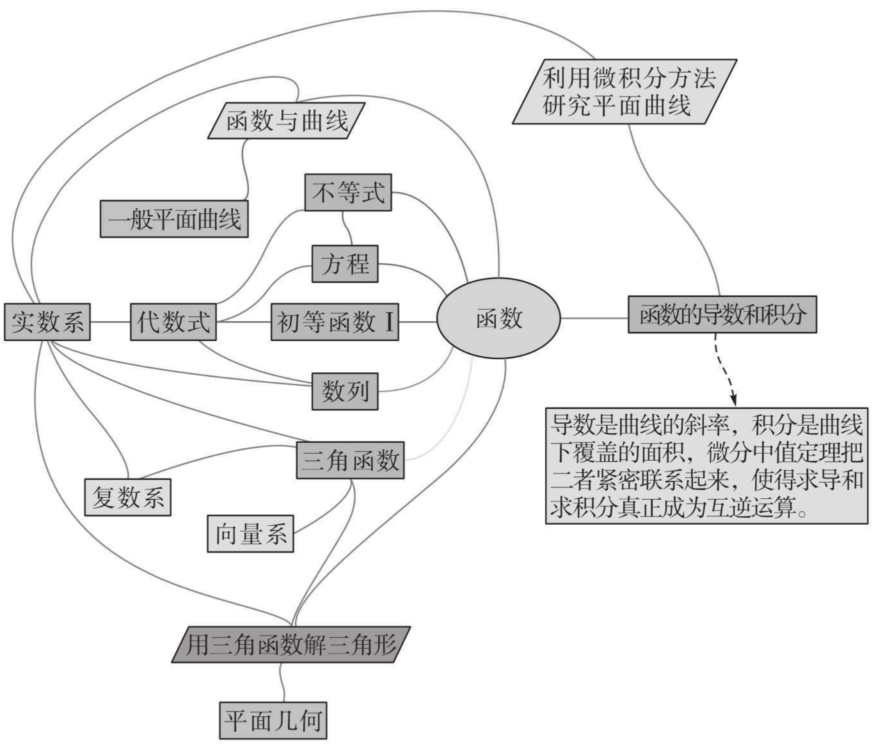

图 1

从微观角度看，高中函数与导数知识分布在必修 1、选修 2－2 两个模块. 包括集合与函数概念、基本初等函数Ⅰ、函数的应用、导数及其应用四个学习专题，涉及的概念、公式、法则相当多，且知识零散，不利于学生对知识的系统把握. 因此，笔者结合教材正

① 刘绍学. 普通高中课程标准实验教科书·数学 1 教师教学用书［M］. 北京：人民教育出版社，2012.

文、习题、阅读材料等内容，围绕函数的概念、基本性质、图像问题和导数等核心知识展开梳理，构建了如图 2 所示的思维导图. 该思维导图意义深刻：首先，具有“索引”功能，能让学生“按图索骥”，为复习巩固、查缺补漏提供线索和图示；其次，具有整合功能，实现零散知识的有效整合、相关知识的紧密衔接，最终保障知识的融合与内化；最后，具有育人功能，在培养学生形成自主学习、独立思考、归纳整理、交流合作等良好习惯方面能发挥独特作用. 陶行知先生曾说：“活的人才教育不是灌输知识，而是将开发文化宝库的钥匙，尽我们知道的交给学生.”由此可见，厘清知识脉络，构建知识体系，正是陶行知先生所倡导的“不是教学生，乃是教学生学”的积极尝试①，是激发学习兴趣、孕育创新精神的良好途径.

结合教材对函数与导数部分的要求，本书对 2003—2017 年高考数学全国卷函数解答题按知识考点进行分类，从函数的单调性、三个“二次”、绝对值函数、函数图像交点问题、切线问题、极值问题、最值问题、函数零点问题、恒成立问题、函数与其他章节交汇问题、高考试题中的高等数学背景这十一个专题展开具体分析.

① 倪仲. 构建历史知识体系，厘清历史发展脉络——以历史必修Ⅱ高三一轮复习为例［J］. 文教资料，2012(22)：186－187.

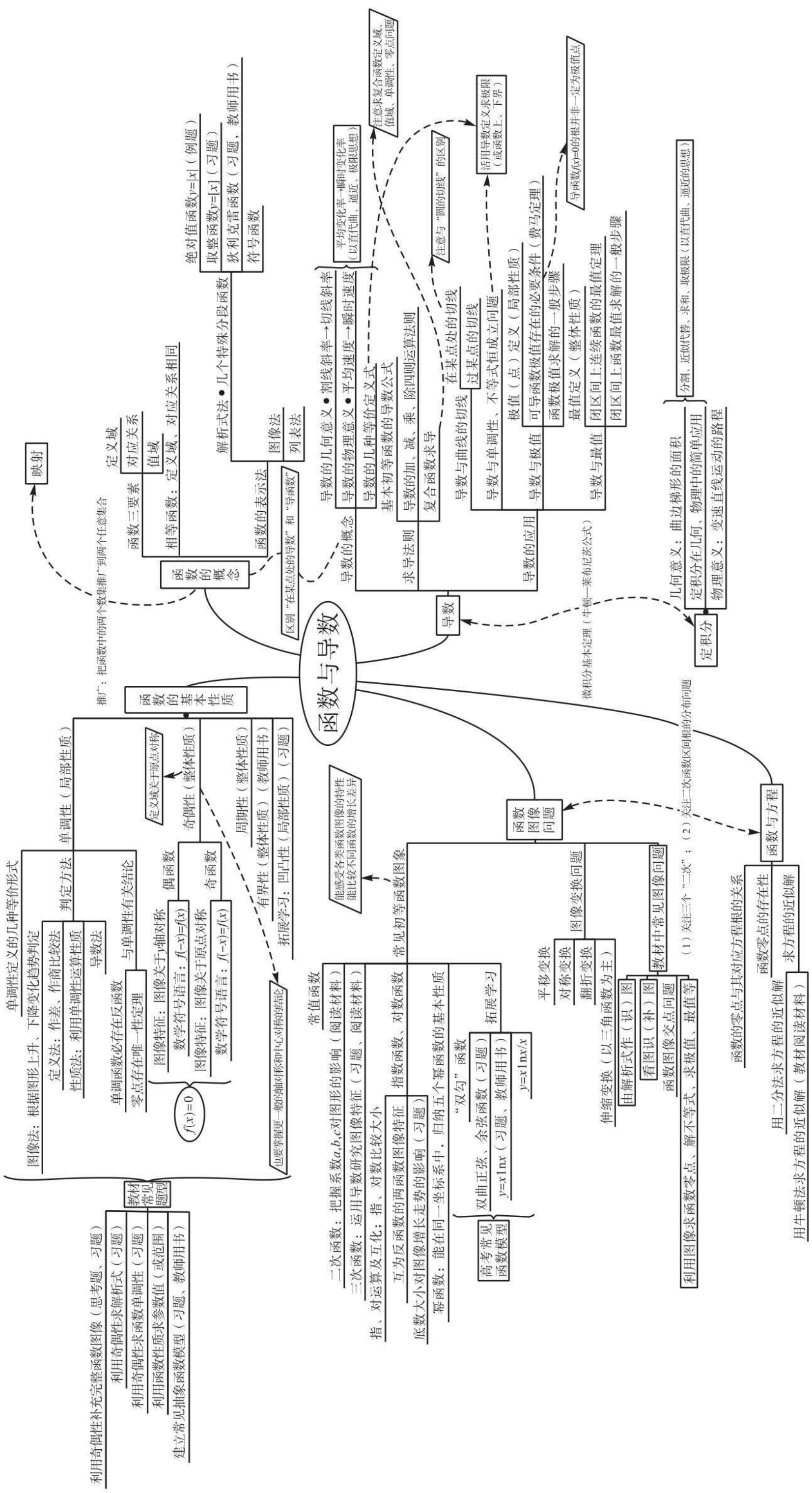
函数与导数
函数的基本性质
单调性（局部性质）
单调性定义的几种等价形式
图像法：根据图形上升、下降变化趋势判定
定义法：作差、作商比较法
性质法：利用单调性运算性质
导数法
判定方法
单调函数必存在反函数
零点存在唯一性定理
与单调性有关结论
奇偶性（整体性质）
定义域关于原点对称
偶函数
图像特征：图像关于y轴对称
数学符号语言：f(−x)=f(x)
奇函数
图像特征：图像关于原点对称
数学符号语言：f(−x)=−f(x)
f(x)=0
周期性（整体性质）
有界性（整体性质）（教师用书）
拓展学习：凹凸性（局部性质）（习题）
也要掌握更一般的轴对称和中心对称的结论
教材常见题型
利用奇偶性补充完整函数图像（思考题、习题）
利用奇偶性求解析式（习题）
利用奇偶性求函数单调性（习题）
利用函数性质求参数值（或范围）
建立常见抽象函数模型（习题、教师用书）
推广：把函数中的两个数集推广到两个任意集合
映射
函数的概念
函数三要素
定义域
对应关系
值域
相等函数：定义域、对应关系相同
函数的表示法
解析式法 • 几个特殊分段函数
绝对值函数y=|x|（例题）
取整函数y=[x]（习题）
狄利克雷函数（习题，教师用书）
符号函数
图像法
列表法
区别“在某点处的导数”和“导函数”
导数
导数的概念
导数的几何意义 • 割线斜率→切线斜率
导数的物理意义 • 平均速度→瞬时速度
平均变化率→瞬时变化率（以直代曲、逼近、极限思想）
导数的几种等价定义式
注意求复合函数定义域、值域、单调性、零点问题
求导法则
基本初等函数的导数公式
导数的加、减、乘、除四则运算法则
复合函数求导
注意与“圆的切线”的区别
导数的应用
导数与曲线的切线
在某点处的切线
过某点的切线
导数与单调性、不等式恒成立问题
活用导数定义求极限（或函数上、下界）
导数与极值
极值（点）定义（局部性质）
可导函数极值存在的必要条件（费马定理）
函数极值求解的一般步骤
导函数f(x)=0的根并非一定为极值点
导数与最值
最值定义（整体性质）
闭区间上连续函数的最值定理
闭区间上函数最值求解的一般步骤
微积分基本定理（牛顿—莱布尼茨公式）
定积分
几何意义：曲边梯形的面积
定积分在几何、物理中的简单应用
物理意义：变速直线运动的路程
分割、近似代替、求和、取极限（以直代曲、逼近的思想）
函数图像问题
常见初等函数图象
常值函数
二次函数：把握系数a,b,c对图形的影响（阅读材料）
三次函数：运用导数研究图像特征（习题、阅读材料）
指、对运算及互化；指、对数比较大小
指数函数、对数函数
互为反函数的两函数图像特征
底数大小对图像增长走势的影响（习题）
幂函数：能在同一坐标系中，归纳五个幂函数的基本性质
能感受各类函数图像的特性能比较不同函数的增长差异
拓展学习
“双勾”函数
双曲正弦、余弦函数（习题）
y=xlnx（习题、教师用书）
y=xlnx/x
高考常见函数模型
图像变换问题
平移变换
对称变换
翻折变换
伸缩变换（以三角函数为主）
教材中常见图像问题
由解析式作（识）图
看图识（补）图
函数图像交点问题
利用图像求函数零点、解不等式、求极值、最值等
（1）关注三个“二次”；（2）关注二次函数区间根的分布问题
函数与方程
函数的零点与其对应方程根的关系
函数零点的存在性
求方程的近似解
用二分法求方程的近似解
用牛顿法求方程的近似解（教材阅读材料）

图 2

第1章　函数的单调性

1.1　两组相似概念辨析

数学概念是反映现实世界、空间形式和数量关系本质属性的思维形式．李邦河院士认为："数学根本上是玩概念，而不是纯粹技巧．"概念是推理的基本单元，基于概念本身的演绎更接近于问题本质．因此，对相似概念进行辨析十分有必要．本节将对"单调区间"与"区间单调"，"在区间 A 上不单调"与"定义在区间 A 上不单调"这两组易混淆的概念进行辨析．

【例 1－1】"单调区间"与"区间单调"辨析．

已知 $f(x)=x^2-2(a-1)x+2$．

（1）若 $f(x)$在$(-\infty,\ -4]$上单调递减，求 a 的取值范围；

（2）若 $f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,\ -4]$，求 a 的值．

【辨析】$f(x)$的单调递减（递增）区间为 M 是指 $f(x)$所有减（增）区间的并集为 M，即最大的减（增）区间为 M，$f(x)$在 M 的任意子区间都是递减（增）函数；$f(x)$在区间 N 上单调递减（增）仅仅表示 N 为最大减（增）区间 M 的一个子集，即 $N\subseteq M$．

【解析】$f(x)=x^2-2(a-1)x+2$ 的对称轴为 $x=a-1$，得 $f(x)$的减区间为$(-\infty,\ a-1]$．

（1）由题意得$(-\infty,\ -4]\subseteq(-\infty,\ a-1]$．故 $-4\leqslant a-1$，解得 $a\in[-3,\ +\infty)$．

（2）由题意得$(-\infty,\ -4]=(-\infty,\ a-1]$．故 $-4=a-1$，解得 $a=-3$．

【例 1－2】"在区间 A 上不单调"与"定义在区间 A 上不单调"辨析．

（1）若函数 $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2+k}$在区间$(2,\ 3)$上不单调，求 k 的取值范围；

（2）若定义在区间$(2,\ 3)$上的函数 $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2+k}$不单调，求 k 的取值范围．

【辨析】函数在区间 A 上不单调有两层含义：①函数在区间 A 处没有定义或函数在区间 A 的一些点没有定义，即区间 A 上存在一些间断点，此时函数在区间 A 上不单调；②函数在区间 A 上有定义，但不单调．定义在区间 A 上的函数不单调是指函数在区间 A 上有定义，但不单调．

【解析】（1）若 $x^2+k=0$，即 $k=-x^2\in(-9,\ -4)$时，函数在$(2,\ 3)$上不单调，符合题意．

若 $x^2+k\neq0$，即 $k\neq-x^2\in(-9,\ -4)$时，$g'(x)=\dfrac{e^x(x^2-2x+k)}{(x^2+a)^2}$，因为 $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2+a}$在区间(2，3)上不单调，故 $g'(x)=\dfrac{e^x(x^2-2x+k)}{(x^2+a)^2}=0$ 在区间(2，3)有根，且不能有两个相等的根，令 $x^2-2x+k=0$，则$\begin{cases}2-4+k<0\\9-6+k>0\end{cases}$，解得 $-3<k<2$.

综上，得 $k\in(-9,\ -4)\cup(-3,\ 2)$.

(2) $g'(x)=\dfrac{e^x(x^2-2x+k)}{(x^2+a)^2}$，因为函数 $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2+a}$在区间(2，3)上不单调，故 $g'(x)=\dfrac{e^x(x^2-2x+k)}{(x^2+a)^2}$在区间(2，3)有根，且不能有两个相等的根，令 $g'(x)=\dfrac{e^x(x^2-2x+k)}{(x^2+a)^2}=0$，有 $x^2-2x+k=0$，则$\begin{cases}2-4+k<0\\9-6+k>0\end{cases}$，解得 $k\in(-3,\ 2)$.

1.2 求已知函数单调区间

函数单调区间的常见求法有定义法、导数法. 高考函数压轴题的解答中，利用定义法求解涉及较少，常常利用导数法求解函数的单调区间.

【例 1－3】（2014 年新课标卷Ⅱ·理 21）已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$的单调性；

（Ⅱ）略；

（Ⅲ）略.

【解析】（Ⅰ）$f(x)=e^x-e^{-x}-2x$，$f'(x)=e^x+e^{-x}-2=\dfrac{e^{2x}-2e^x+1}{e^x}=\dfrac{(e^x-1)^2}{e^x}$，$f'(x)\geqslant0$ 恒成立，当且仅当 $x=0$ 时，取得“＝”. 所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

【例 1－4】（2017 年全国卷Ⅱ·文 21)设函数 $f(x)=(1-x^2)e^x$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$的单调性；

（Ⅱ）略；

【解析】（Ⅰ）$f'(x)=(1-2x-x^2)e^x$，令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=-1-\sqrt{2}$，$x_2=-1+\sqrt{2}$.

当 $x\in(-\infty,\ -1-\sqrt{2})$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(-1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2})$时，$f'(x)>0$；当 $x\in(-1+\sqrt{2},\ +\infty)$时，$f'(x)<0$. 所以 $f(x)$在区间$(-\infty,\ -1-\sqrt{2})$，$(-1+\sqrt{2},\ +\infty)$上单调递减，在区间$(-1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2})$上单调递增.

【点评】由于 $e^x>0$ 恒成立，故可将 $f'(x)$看作二次函数，利用二次函数的图像容易判断函数 $f(x)$的单调性.

【例 1－5】（2009 年课标卷·理 21）已知函数 $f(x)=(x^3+3x^2+ax+b)e^{-x}$.

（Ⅰ）若 $a=b=-3$，求 $f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）略.

【解析】 （Ⅰ）当 $a=b=-3$ 时，$f(x)=(x^3+3x^2-3x-3)e^{-x}$，故 $f'(x)=-(x^3+3x^2-3x-3)e^{-x}+(3x^2+6x-3)e^{-x}=-x(x-3)(x+3)e^{-x}$.

当 $x<-3$ 或 $0<x<3$ 时，$f'(x)>0$；当 $-3<x<0$ 或 $x>3$ 时，$f'(x)<0$. 故 $f(x)$的增区间为$(-\infty,\ -3)$，$(0,\ 3)$；减区间为$(-3,\ 0)$，$(3,\ +\infty)$.

【点评】 由于 $-e^x<0$ 恒成立，故可将 $f'(x)$看作三次函数 $y=x(x-3)(x+3)$，利用“穿针引线”法，作出图像，从而判断函数 $f(x)$的单调性.

【例 1-6】（2008 年大纲卷Ⅱ·理 22）设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

（Ⅰ）求 $f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）略.

【解析】（Ⅰ）$f'(x)=\dfrac{(2+\cos x)\cos x-\sin x(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}=\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$. 令 $f'(x)=0$，解得 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$.

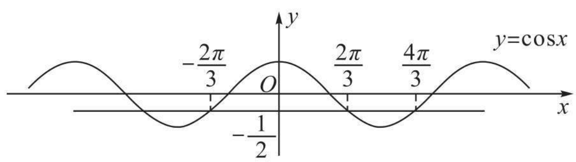

图 1-1

由图 1-1 易知，当 $2k\pi-\dfrac{2\pi}{3}<x<2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$时，$\cos x>-\dfrac{1}{2}$，即 $f'(x)>0$；当 $2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}<x<2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$时，$\cos x<-\dfrac{1}{2}$，即 $f'(x)<0$.

因此，$f(x)$在每一个区间$\left(2k\pi-\dfrac{2\pi}{3},\ 2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$是增函数，$f(x)$在每一个区间$\left(2k\pi+\dfrac{2\pi}{3},\ 2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$是减函数.

【点评】 $f'(x)$与 $2\cos x+1$ 的正负取值等价，故作出余弦函数 $y=\cos x$ 的图像，考查它与直线 $y=-\dfrac{1}{2}$的位置关系，从而判断函数 $f(x)$的单调性.

【例 1-7】（2012 年新课标卷·理 21）已知函数 $f(x)$满足 $f(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)x+\dfrac{1}{2}x^2$.

（Ⅰ）求 $f(x)$的解析式及单调区间；

（Ⅱ）略.

【解析】（Ⅰ）$f'(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)+x$，故 $f'(1)=f'(1)-f(0)+1$，得 $f(0)=1$. 所以 $f(x)=f'(1)e^{x-1}-x+\dfrac{1}{2}x^2$，由 $f(0)=f'(1)e^{-1}=1$，得 $f'(1)=e$. 所以 $f(x)=e^x-x+\dfrac{1}{2}x^2$. 又 $f'(x)=e^x+x-1$，且 $f'(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$f'(0)=0$. 所以当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,\ +\infty)$上单调递增；当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(-\infty,\ 0)$上单

调递减.

【点评】 本题通过求出 $f'(x)$的零点 $x=0$，再结合 $f'(x)$单调递增（$y=e^x$ 单调递增，$y=x-1$ 单调递增，故 $y=e^x+x-1$ 单调递增），确定出 $f(x)$的单调区间.

1.3　求含参函数的单调区间

【例 1-8】（2013 年课标卷Ⅱ·理 21）已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$.

（Ⅰ）设 $x=0$ 是 $f(x)$的极值点，求 m，并讨论 $f(x)$的单调性；

（Ⅱ）略.

【解析】（Ⅰ）$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+m}$，由 $x=0$ 是 $f(x)$的极值点得 $f'(0)=0$，所以 $m=1$，于是 $f(x)=e^x-\ln(x+1)$，定义域为$(-1，+\infty)$. $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$. 如图 1-2 所示，当 $x\in(-1，0)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(0，+\infty)$时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(-1，0)$单调递减，在$(0，+\infty)$单调递增.

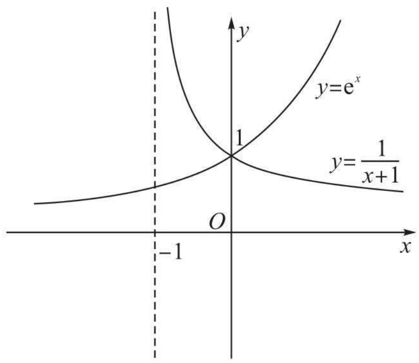

图 1-2

【点评】 本题通过将 $f'(x)$求零点问题转化为两函数 $y=e^x$，$y=\dfrac{1}{x+1}$的交点问题，容易观察 $f'(x)$正负取值时所对应的自变量取值范围. 利用数形结合思想避免了直接求解 $f'(x)$零点的困难.

【例 1-9】（2015 年课标卷Ⅱ·理 21）设函数 $f(x)=e^{mx}+x^2-mx$.

（Ⅰ）证明：$f(x)$在$(-\infty，0)$上单调递减，在$(0，+\infty)$上单调递增；

（Ⅱ）略.

【解析】（Ⅰ）法①：二阶求导分析单调性.

$f'(x)=me^{mx}+2x-m$，所以 $f''(x)=m^2e^{mx}+2>0$ 恒成立，故 $f'(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 又 $f'(0)=0$，故当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

法②：分类讨论＋单调性.

$f'(x)=me^{mx}+2x-m=m(e^{mx}-1)+2x$.

(1) 当 $m \geqslant 0$ 时,

①若 $x \geqslant 0$, $e^{mx} \geqslant 1$, $e^{mx}-1 \geqslant 0$, 故 $f'(x) \geqslant 0$ 成立, $f(x)$单调递增;

②若 $x<0$, $e^{mx}<1$, $e^{mx}-1<0$, 故 $f'(x)<0$ 成立, $f(x)$单调递减.

(2) 当 $m<0$ 时,

①若 $x \geqslant 0$, $e^{mx} \leqslant 1$, $e^{mx}-1 \leqslant 0$, 故 $f'(x) \geqslant 0$ 成立, $f(x)$单调递增;

②若 $x<0$, $e^{mx}>1$, $e^{mx}-1>0$, 故 $f'(x)<0$ 成立, $f(x)$单调递减.

综上, 无论 m 取何值, $f(x)$在$(-\infty, 0)$上单调递减, 在$(0, +\infty)$上单调递增.

【点评】 $f'(x)>0$ 是较难求解的超越不等式. 法①通过求二阶导数, 由 $f''(x)>0$ 恒成立, 得出 $f'(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 再结合 $f'(0)=0$ 容易求出单调区间. 法②利用指数函数的单调性, 通过讨论 m 及自变量 x 的范围, 比较 e^{mx} 与 1 的大小, 进而得出单调区间.

本题考查学生直觉思维和推理能力.

【例 1－10】(2004 年大纲卷Ⅰ·理 19)已知 $a \in \mathbf{R}$, 求函数 $f(x)=x^2e^{ax}$ 的单调区间.

【解析】 $f'(x)=2xe^{ax}+ax^2e^{ax}=(2x+ax^2)e^{ax}=x(ax+2)e^{ax}$.

(1) 当 $a=0$ 时, $f'(x)=2x$. 若 $x<0$, 则 $f'(x)<0$; 若 $x>0$, 则 $f'(x)>0$. 所以当 $a=0$ 时, 函数 $f(x)$的减区间为$(-\infty, 0)$, 增区间为 $[0, +\infty)$.

(2) 当 $a>0$ 时, 由 $f'(x)>0$, 得 $x>0$ 或 $x<-\dfrac{2}{a}$; 由 $f'(x)<0$, 得 $-\dfrac{2}{a}<x<0$. 所以 $f(x)$的增区间为$(0, +\infty)$, $\left(-\infty, -\dfrac{2}{a}\right)$, 减区间为 $\left[-\dfrac{2}{a}, 0\right]$.

(3) 当 $a<0$ 时, 由 $f'(x)>0$, 得 $0<x<-\dfrac{2}{a}$; 由 $f'(x)<0$, 得 $x<0$ 或 $x>-\dfrac{2}{a}$. 所以 $f(x)$的增区间为 $\left[0, -\dfrac{2}{a}\right]$, 减区间为$\left(-\dfrac{2}{a}, +\infty\right)$, $(-\infty, 0)$.

【点评】 $f'(x)$的正负取值等价于函数 $y=x(ax+2)$的正负取值, 又函数 y 形如二次函数, 故不难想到利用二次项系数 a 与 0 的大小关系作为分类依据, 进而结合二次函数图像, 判断函数单调性.

1.4 单调区间求参数

【例 1－11】(2009 年课标卷·理 21) 已知函数 $f(x)=(x^3+3x^2+ax+b)e^{-x}$.

(Ⅰ) 略;

(Ⅱ) 若 $f(x)$在$(-\infty, \alpha)$, $(2, \beta)$单调递增, 在$(\alpha, 2)$, $(\beta, +\infty)$单调递减, 证明: $\beta-\alpha>6$.

【解析】 (Ⅱ) $f'(x)=-e^{-x}[x^3+(a-6)x+b-a]$. 由条件, $f'(2)=0$, 即 $2^3+2(a-6)+b-a=0$, 故 $b=4-a$, 从而 $f'(x)=-e^{-x}[x^3+(a-6)x+4-2a]$.

又因为 $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$, 所以 $x^3+(a-6)x+b-a=(x-2)(x-\alpha)(x-\beta)=(x-2)[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]$. 将右边展开, 与左边比较系数, 得 $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=a-2$. 故 $\beta-\alpha=\sqrt{(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{12-4a}$. 又 $\alpha<2<\beta$, 故 $(\beta-2)(\alpha-2)<0$, 即 $\alpha\beta-2$