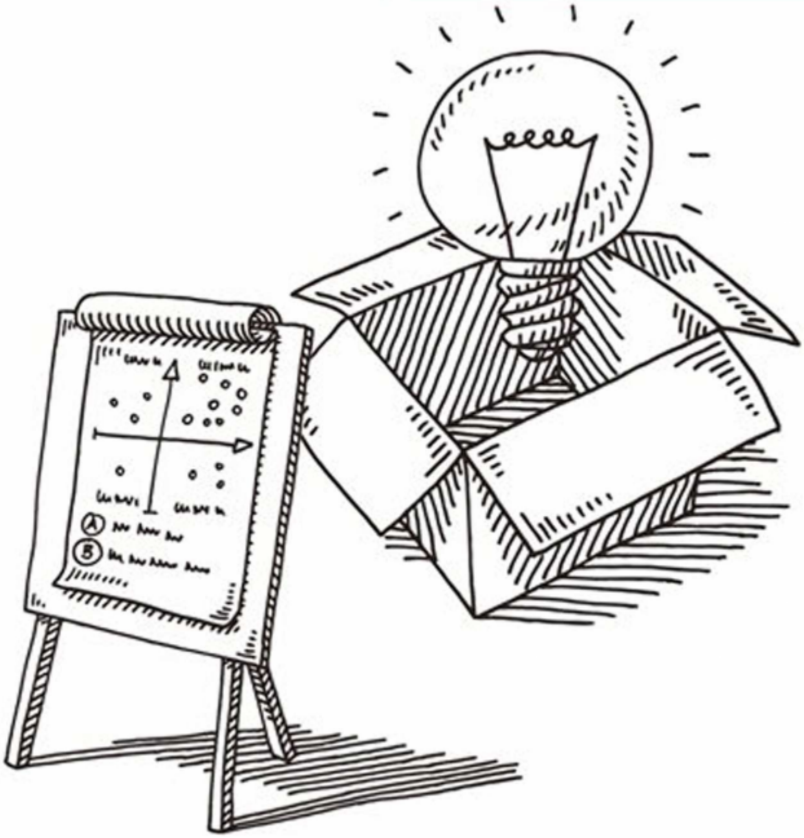
高等教育公共基础课精品系列规划教材



微积分

主编　马军　许成锋

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等教育公共基础课精品系列规划教材

微　积　分

主　　编　马　军　许成锋
副主编　孔祥文

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

微积分/马军，许成锋主编. —北京：北京理工大学出版社，2016.8
ISBN 978-7-5682-2980-7

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①马…②许…　Ⅲ.①微积分　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 196355 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
　　　　　（010）82562903（教材售后服务热线）
　　　　　（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 /
开　　本 / 710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张 / 19.75　　　　责任编辑 / 陆世立
字　　数 / 460 千字　　　　文案编辑 / 赵　轩
版　　次 / 2016 年 8 月第 1 版　2016 年 8 月第 1 次印刷　　　　责任校对 / 周瑞红
定　　价 / 46.00 元　　　　责任印制 / 马振武

前　　言

教材改革作为我国高等学校改革的一项重要内容正在不断深入，针对国家教育部提出的部分高等院校向应用型高校转型，重点培养“地方性、应用型、高素质”人才的精神。本书在“理论够用，适度延展”的前提下，内容深度、广度适中，符合新的应用型人才培养方案和教学需求。结合与当前高中新课程衔接，及高等学校目前微积分教学的现状和教学对象，由教学经验丰富，多年从事本课程教学的一线教师进行编写的。

在编写过程中，我们认真分析研究了高中新课程的相关内容，参照历年来我们使用过的各种教材，结合自己的教学体会，反复推敲，始终贯彻培养“深造有基础、发展有后劲”的高素质应用型人才：教材以函数为研究对象，以极限为基本工具，主要讨论函数的微分和积分问题以及无穷级数、常微分方程及差分方程，并要求会应用理论知识解决相应的实际问题。

本书由马军、许成锋担任主编，孔祥文担任副主编。第一章、第十章由许成锋编写，第二章、第三章由孔祥文编写，第四章、第五章由马军、李琦编写，第六章由付香英编写、第七章由由尹志刚编写，第八章、第九章由杨曲编写。本书由周金贵教授担任主审。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免出现不妥、错漏之处，恳请专家、同行与广大读者提出宝贵意见。

编　者
2016 年 4 月

目　录

第一章　函数的极限与连续

微积分以函数作为主要的研究对象，即考察变量的变化规律及各量之间的相互依存关系. 研究时所采用的方法就是考察各量在特定过程中的变化趋势，揭示其内在的运动规律，这种规律称为极限理论.

§1.1　预备知识

在中学，我们学习过集合、实数和简单的极限以及微积分知识，这为进一步学习高等数学奠定了一定的基础. 本节对中学学过的实数、代数式和数列等知识作一些总结和延伸.

一、实数

1. 有理数

人类历史上最先认识的数是自然数，它们是 0，1，2，…，全体自然数的集合叫作自然数集，记作 N. 自然数分为奇数和偶数，其中能被 2 整除的数叫偶数，不能被整除的数叫奇数.

假如整数除以 m，结果是无余数的整数，那么我们称 m 就是 n 的因数，反过来说，我们称 n 为 m 的倍数. 若只有 1 和它本身这两个因数的自然数叫作质数，也称作素数. 除了 1 和它本身还有其他的因数的自然数叫作合数. 0 和 1 既不是质数也不是合数.

自然数集对加法和乘法运算封闭，即两个自然数相加或相乘的结果仍为自然数，也可以作减法或除法，但相减和相除的结果未必都是自然数. 人们为使自然数对减法运算封闭便引进负数，这便从自然数集扩展为整数集，记作 Z，其中把正整数集记作 Z^{+}. 在整数范围内，加法、减法和乘法运算是封闭的，但对除法运算不是封闭的，从而引出了有理数的概念，这便从整数集扩展为有理数集，记作 Q.

任一有理数都可以写成 $\dfrac{p}{q}$ 的形式，其中 $p,q\in Z$，且 $q\neq 0$. 同整数比较起来有理数具有整数所没有的良好的性质. 例如，设 $a,b(a<b)$ 是任意给定的两个有理数，则在 a 与 b 之间至少存在一个有理数 c，即 $a<c<b\left(\text{如取 } c=\dfrac{a+b}{2}\text{ 就可}\right)$；类似，在 a 与 c 之间至少存在一个有理数 d，即 $a<d<c$. 如此类推，无论 a 与 b 相差多么

小,总可以在 a 与 b 之间找到无穷多个有理数,这就是有理数的稠密性,这是整数所不具备的.

2. 无理数

有理数在数轴上均可以找到唯一的一点和它相对应(该点称为有理点),所以反映在数轴上,任意两个有理点之间总可以找到无穷多个有理点,即有理点在数轴上是稠密分布的,但它并没有铺满整个数轴. 如$\sqrt{2}$在数轴上就找不到一个有理点和它相对应.

例 1 证明$\sqrt{2}$不是有理数.

证明 (反证法)假设$\sqrt{2}$是有理数,令$\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$(p、q 互质),

两边平方得:
$$2=\frac{p^2}{q^2}\Rightarrow 2q^2=p^2,$$
故 p^2 为偶数,从而 p 必为偶数,令 $p=2m$,则 $p^2=4m^2$,于是,
$$2q^2=4m^2\Rightarrow q^2=2m^2$$
于是 q^2 为偶数,从而 q 必为偶数.

综上,q 和 p 都是偶数,这与 p、q 互质矛盾,故$\sqrt{2}$不是有理数.

由例 1 知,数轴上除了有理点外,还会留下许多空隙,同时也说明有理点尽管"很稠密",但不具有连续性,我们把这些空隙处的点称为无理点,无理点所对应的数叫作无理数.

3. 无理数 e 和 π

e 是自然对数的底数,是一个无限不循环小数,其值是 2.718 28……,是这样定义的:数列$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$的极限,即:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$. 这个数列每一项都是有理数,但是它的极限却是无理数,所以高等数学中研究的数域是实数域。在后面的无穷级数中我们可以得到无理数 e 的表达式:
$$\mathrm{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$
其中,$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$,表示 1 到 n 的连乘积,而约定 $0!=1$.

π 是一个无理数,众所周知它是圆周率. 我们都知道圆周率就是圆的周长和同一圆的直径的比,这个比值是一个常数,现在通用希腊字母"π"来表示. 圆周率是一个永远除不尽的无穷小数,它不能用分数、有限小数或循环小数完全准确地表示出来. 通过傅里叶级数的学习我们可以得到无理数 π 的表达式为:
$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

数学大师欧拉给出的欧拉公式:$\mathrm{e}^{x\mathrm{i}}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$,把指数、对数和三角函数有机的联系在一起,给人统一和谐之美. 当 $x=\pi$ 时,得到 $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}+1=0$. 这个公式把数学

中最重要的五个常数 0、1、π、e、i 联系起来，使“五朵金花”组成了一个瑰丽的花环. 被世人称为科学史上最美的公式，激励着无数人为了数学华章的更加华美而不懈的探索和追求.

4. 实数

有理数和无理数统称为实数，通常用字母 R 表示. 实数是高等数学研究的数域. 实数与数轴上的点是一一对应的，就是说所有的实数都可以用数轴上的点来表示；反之，数轴上的每一个点都表示一个实数.

数轴上表示数 a 的点离原点的距离就叫作。数的绝对值，记作 $|a|$.

绝对值及其运算有如下性质：

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$.

这一性质在计算中常会用到，如 $\sqrt{1-\sin 2x}=|\sin x-\cos x|$.

(2) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$.

(3) 对任意实数 x 及 y，则

$|x+y|\leqslant |x|+|y|$ 及 $||x|-|y||\leqslant |x-y|\leqslant |x|+|y|$.

(4) $x^2+y^2\geqslant 2|xy|$.

5. 区间

区间是常用的一类数集. 下面四种区间称为有限区间. 设 $a,b\in R$ 且 $a<b$.

开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开区间 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$、$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

符号“$+\infty$”与“$-\infty$”分别读作“正无穷大”与“负无穷大”. 除有限区间外，还有无限区间，例如 $[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$，$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x||x|<+\infty\}$.

6. 邻域

对任意正数 δ，开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$ 或简记作 $U(a)$. 即

$$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}.$$

其中点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 而集合 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 称为去心邻域.

二、代数式

由数和表示数的字母经有限次加、减、乘、除、乘方和开方等代数运算所得的式子，或含有字母的数学表达式称为代数式. 在实数范围内，代数式分为有理式和无理式.

有理式包括整式(除数中没有字母的有理式)和分式(除数中有字母且除数不为 0 的有理式).这种代数式中对于字母只进行有限次加、减、乘、除和整数次乘方这些运算.含有字母的根式或字母的非整数次乘方的代数式叫作无理式.在有理分式分解和无理式有理化时,下面是常用的一些公式:

(1)$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;

(2)$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

(3)$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

(4)$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$;

(5)$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$;

(6)$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;

(7)$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots+\mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^k+\cdots+nab^{n-1}+b^n$.

例 2 把$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+1}}$分母有理化.

解
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+1}}&=\frac{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+1}}{\left(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+1}\right)}\\&=\frac{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+1}}{3n-1}.\end{aligned}$$

例 3 将有理函数数$\dfrac{1}{x(1+x^2)}$化为部分分式之和.

解
$$\begin{aligned}\frac{1}{x(1+x^2)}&=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}=\frac{A(1+x^2)+(Bx+C)x}{x(1+x^2)}\\&=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(1+x^2)}.\end{aligned}$$

由分子相同得:
$$\begin{cases}A+B=0,\\ C=0,\\ A=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1,\\ B=-1,\\ C=0.\end{cases}$$

故
$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}.$$

例 4 将有理假分式$\dfrac{x^3+3x^2+2x-1}{x^2+1}$表示成一个多项式和一个真分式的和.

$$\begin{array}{r|l}
 & x+3\\ \hline
x^2+0\cdot x+1 & x^3+3x^2+2x-1\\
 & x^3+0\quad+x\\ \hline
 & \quad 3x^2+x-1\\
 & \quad 3x^2+0+3\\ \hline
 & \qquad x-4
\end{array}$$

解 $\dfrac{x^3+3x^2+2x-1}{x^2+1}=x+3+\dfrac{x-4}{x^2+1}$.

三、数列

1. 数列的概念

按一定的次序排列的一列数，称为数列，即 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$，简记为$\{a_n\}$，其中 a_1 称为数列的首项，a_n 称为数列的通项. 实际上数列是项数 n 的函数，其定义域为自然数 N 或其子集.

例 5 $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$.

例 6 $-1,1,-1,\cdots,(-1)^n,\cdots$.

例 7 $1,2^2,3^2,\cdots,n^2,\cdots$.

例 8 $1,2,3,\cdots,30$.

按照数列的项数分，数列分为有穷数列，如例 8，而例 5、例 6、例 7 称为无穷数列.

按照项与项之间的大小关系分为递减数列，如例 5 和递增数列例 7、例 8，两者统称为单调数列.

对于一个数列，如果每一项的绝对值都小于某个正数，称为有界数列，如例 5、例 6、例 8，否则称为无界数列，如例 7.

2. 等差数列和等比数列

如果一个数列，第二项起，每一项减去它前一项所得的差等于一个常数，这个数列就叫作等差数列. 常数称为公差，通常用字母 d 表示，通项 $a_n=a_1+(n-1)d$. 等差数列的前 n 项和：$S_n=\dfrac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$.

如果一个数列，第二项起，每一项和它前面一项的比等于一个常数，这个数列就叫作等比数列. 常数称为公比，通常用字母 q 表示，通项 $a_n=a_1q^{n-1}$. 当 $q\neq1$ 时，等比数列的前 n 项和：$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

常见数列前 n 项和公式：

(1) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$.

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

(4) $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$.

§1.2 函　数

一、函数概念

在生产实践和科学研究中，会碰到各种各样的量.例如，温度、时间、路程、重量、体积、速度等.在某个问题的研究过程中，保持不变的量称为常量，可以取不同数值的量称为变量.例如研究自由落体的运动中，其变化规律为 $s=\frac{1}{2}gt^2$，那么，对同一地点，重力加速度 g 就是常量，而时间 t 和路程 s 都是变量，但 t 和 s 变量并不是孤立地在变，而是按照一定的规律相互联系着，当 t 变时，s 也跟着变，而且 t 值一确定，则 s 也随之而唯一确定，这种变量之间的对应关系就是函数的本质.

定义 1.1　设有两个变量 x,y，其中 x 属于非空实数集合 D.如果存在一个法则 f，使得对于每个 $x\in D$，必存在唯一的 y 与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在集合 D 上的一个函数，记作$y=f(x)$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 $D(f)$，函数全体取值的集合称为 f 的值域，记作$Z(f)$，即

$$Z(f)=\{y\mid y=f(x),x\in D(f)\}.$$

函数的定义域和对应法则是确定函数关系的两个要素.如果两个函数的定义域和对应法则都相同，我们称这两个函数是相同的函数.

练习 1　函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是不是相同的函数关系.

思考 1　函数 $y=x^2,x\in R$，是否可称 x 是 y 的函数(反函数)？

根据函数的定义，我们知道，对于每一个自变量的值都有唯一的函数值与之对应.反过来，对于每一个函数值，不一定只有唯一的自变量的值与之对应，如思考1，当 $y=1$ 时，就有 $x=\pm1$ 与之对应.但对于 $y=x^3$，情况有所不同，在它们的值域中任取一个数，有唯一的一个自变量与它对应。这种不同的自变量对应不同函数值的函数称为一一对应的函数.

定义 1.2　设 $f(x)$是定义在 D 上的一一对应函数，值域为 Z，若对应关系 g 使得对任意的 $y\in Z$，都有唯一的 $x\in D$ 与之对应，且 $f(x)=y$，则称 g 是 f 的反函数，记为 $g=f^{-1}$.

习惯上将自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，因此 $y=f(x)$的反函数是 $y=f^{-1}(x)$.所以两个函数 $y=f(x),y=f^{-1}(x)$互为反函数，其中任意一个函数的值域就是另一个函数的定义域，而且$f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$.

将 $y=f(x),y=f^{-1}(x)$的图形画在同一坐标平面上，则这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的.这是因为如果 $P(a,b)$是 $y=f(x)$图形上的点，则有 $b=f(a)$.按反函数的定义，有 $a=f^{-1}(b)$，故 $Q(b,a)$是 $y=f^{-1}(x)$图形上的点；反之，若 $Q(b,a)$

是 $y=f^{-1}(x)$图形上的点，则$P(a,b)$是$y=f(x)$图形上的点. 而 $P(a,b)$与 $Q(b,a)$是关于直线 $y=x$ 对称的.

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在数 k_1，使对任一 $x\in D$，有 $f(x)\leqslant k_1$，则称函数 $f(x)$在 D 上有上界，而称 k_1 为函数 $f(x)$在 D 上的一个上界. 图形特点是 $y=f(x)$的图形在直线 $y=k_1$ 的下方.

如果存在数 k_2，使对任一 $x\in D$，有 $f(x)\geqslant k_2$，则称函数 $f(x)$在 D 上有下界，而称k_2为函数$f(x)$在 D 上的一个下界. 图形特点是，函数$y=f(x)$的图形在直线 $y=k_2$ 的上方.

如果存在正数 M，使对任一 $x\in D$，有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在 D 上有界；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$在 D 上无界. 有界函数图形特点是，函数 $y=f(x)$的图形在直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间.

函数 $f(x)$无界，就是说对任何 M，总存在 $x_1\in D$，使$|f(x_1)|>M$.

例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在开区间$(0,+\infty)$内是无上界的，但在$(1,+\infty)$内有界.

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D. 如果对于区间 D 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 D 上是单调增加的.

如果对于区间 D 上任意两点 x_1，及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 D 上是单调减少的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0]$上是单调增加的，在区间$[0,+\infty)$上是单调减少的，在$(-\infty,+\infty)$上不是单调的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则$-x\in D$). 如果对于任一 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$为偶函数. 如果对于任一 $x\in D$，有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

$y=x^2$, $y=\cos x$ 都是偶函数. $y=x^3$, $y=\sin x$ 都是奇函数, $y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 l, 使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$, 且 $f(x+l)=f(x)$ 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期. 设 l 是周期函数 $f(x)$ 的周期, 显然 $2l, 3l, \cdots$ 也都是函数的周期. 在这无穷多个周期中, 若有一个最小正周期 T, 则 T 称为 $f(x)$ 的最小正周期. 通常所说的周期都是指最小正周期.

例如, 函数 $\sin x$, $\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数; 函数 $\tan x$, $\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数. 注意, 不是所有的周期函数都有最小正周期. 事实上, 常数函数是周期函数, 但它没有最小正周期. 两个周期函数相加也不一定是周期函数, 如 $\sin 2x$ 和 $\sin \pi x$ 都是周期函数, 但 $\sin 2x+\sin \pi x$ 不是周期函数.

三、基本初等函数

定义 1.3 幂函数 $y=x^{\mu}$ ($\mu\in R$ 是常数)、指数函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)、对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)、三角函数和反三角函数等五类函数统称为基本初等函数.

1. 幂函数

底数是变量, 指数是常数, 形如 $y=x^u$ ($u\in R$ 是常数) 的函数称为幂函数. 幂函数 $y=x^u$ 不仅定义域和值域与 u 有关, 而且图像和性质与 u 有密切的联系. 由于中学这类函数研究的比较多, 我们给出部分函数图像.

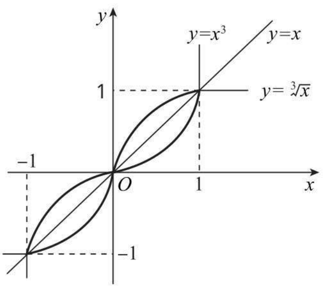


图 1-1

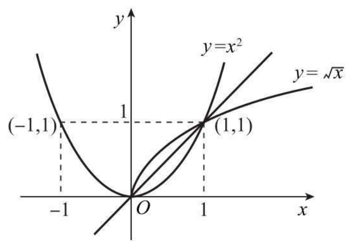


图 1-2

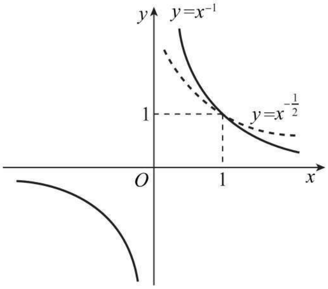


图 1-3

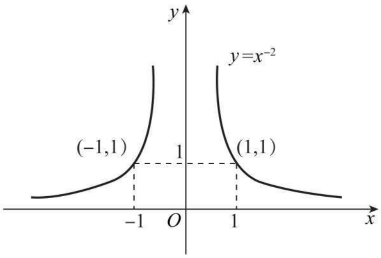


图 1-4

2. 指数函数

形如 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的函数称为指数函数.

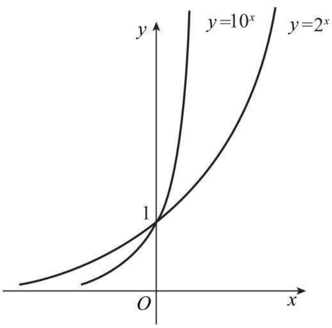


图 1-5

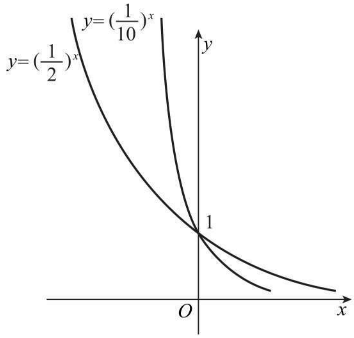


图 1-6

下面是指数函数的一些基本运算规则：

$$a^xa^y=a^{x+y};(a^x)^y=a^{xy};a^xb^x=(ab)^x;a^0=1,a^{-x}=\frac{1}{a^x}.$$

3. 对数函数

当 $a>0$ 且 $a\neq0$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$上是严格单调的，因此它是一个一一对应的函数，于是存在反函数. 函数 $y=a^x$ 的反函数称为以 a 为底的对数函数，也称为以 a 为底的对数，记作 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$，当 $a>1$ 和 $0<a<1$ 对应图像为图 1-7 和图 1-8. 特别以无理数 e 为底的对数称为自然对数，记为 $y=\ln x$.

下面是自然对数的一些基本运算规则：设 $a,b>0$，

$$\ln ab=\ln a+\ln b;$$

$$\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b;$$

$$\ln a^b=b\ln a;$$

$$\ln e=1,\ln1=0;$$

$e^{\ln a}=a$.（这条性质在后面幂指函数应用比较多）

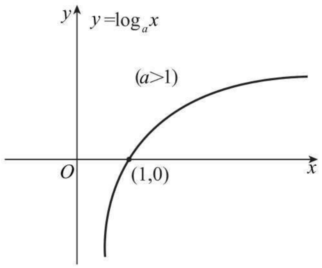


图 1-7

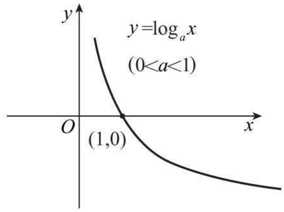


图 1-8

4. 三角函数

三角函数是一种具有周期性的重要函数，自然界中的许多现象都具有周期性，如行星的运动、季节的变化等. 在学习了三角级数后，我们就会知道几乎所有的具有周期性的函数都可以用正弦函数和余弦函数的代数和表示.

三角函数的定义可以在一个圆心在原点、半径为 r 的圆上给出，

如图 1-9 所示，定义

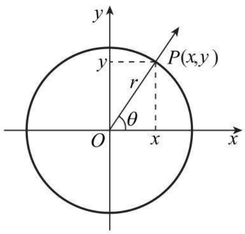


图 1-9

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\cos\theta=\frac{x}{r},\tan\theta=\frac{y}{x},$$

$$\cot\theta=\frac{x}{y},\sec\theta=\frac{r}{x},\csc\theta=\frac{r}{y}.$$

从中可以得到，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta},\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta},$

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta},$$

因此正弦函数 $\sin\theta$ 和余弦函数 $\cos\theta$ 又称为基本三角函数. 图 1-10、图 1-11、图 1-12 和图 1-13 分别为函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 的图像.

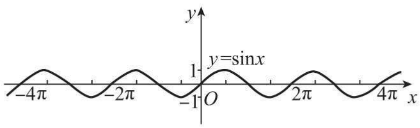


图 1-10

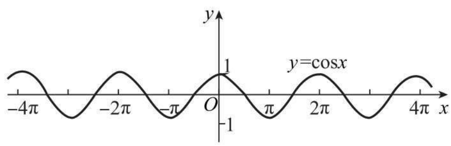


图 1-11

下面是一些常用的三角函数之间的基本关系：

(1)同角公式

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1;$$

$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta.$$

(2)倍角公式(含万能公式)