

以探究领略数学思维之美

——基于素养培养的探究式教学研究

YI TANJIU LINGLUE SHUXUE SIWEI ZHIMEI

偶伟国 著



苏州大学出版社
Soochow University Press

以探究领略数学思维之美

——基于素养培养的探究式教学研究

偶伟国 著

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

以探究领略数学思维之美:基于素养培养的探究式
教学研究 / 偶伟国著. — 苏州:苏州大学出版社,
2017.5

ISBN 978-7-5672-2129-1

I. ①以… II. ①偶… III. ①中学数学课-教学研究
-高中 IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 096109 号

书 名: 以探究领略数学思维之美
——基于素养培养的探究式教学研究

作 者: 偶伟国
责任编辑: 管兆宁
装帧设计: 刘 俊

出版发行: 苏州大学出版社(Soochow University Press)

社 址: 苏州市十梓街 1 号 邮编: 215006

印 装: 宜兴市盛世文化印刷有限公司

网 址: www.sudapress.com

邮购热线: 0512-67480030

销售热线: 0512-65225020

开 本: 700mm×1000mm 1/16 印张: 10.75 字数: 195 千

版 次: 2017 年 5 月第 1 版

印 次: 2017 年 5 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5672-2129-1

定 价: 25.00 元

凡购本社图书发现印装错误,请与本社联系调换。服务热线:0512-65225020



前言

学生核心素养的提升,是当下备受教育界重视的一个话题,其落实的关键在于教师素养的提升.事实上,两者之间有着前因后果的关系,高素养的教师是促进学生素养提升的有力保障;而且两者之间又能相互促进,所谓教学相长,即指此意.这中间最为关键的是要打破教学传统,把能有效促进学生发展的探究式教学方式落实于平时的教学实践中.鉴于此,本书围绕以下三个方面展开探讨.

1. 教师深度研究 提升专业素养

深度研究教学是提升教师专业素养的有效路径,教师要善于学习先进的教法,领悟其本质,并在实践中积极探索,使先进的理念根植于我们的教学中.

以目前倡导的探究式教学为例,我们首先要对其理念、理论支撑、教学模式、把握原则等展开系列研究,然后再付诸教学实践.而所谓深度研究,是指对于那些被大家普遍认同的理念、理论、模式等要有高于一般意义上的理解,要在关键点和障碍点上研究突破,形成独特的理解和认识,总结出能被同行认可和接受的观点,并由此产生积极的影响力.

笔者通过对探究式教学实践的研究,提出了以下八大教学原则,即主体性原则、适切性原则、情景性原则、引导性原则、坡度性原则、连贯性原则、拓展性原则、生成性原则.每个教学原则都赋予了鲜活的教学实践案例,作为有力的佐证材料.这些个性化的研究成果,一经推广,便被大家接受和普遍认同,并为他们有效开展探究式



教学提供了原则支撑.

探究式教学理念的生根落地,还要研究如何与教学内容的无缝对接.探究式教学鼓励通过创设问题情境来激发学生的探究欲望.那么如何选择合理的问题情境就值得深究.照本宣科显然行不通,而不基于学情的问题情境也是缺乏针对性的,问题设计得再多,学生们却是启而不发,所以探究只能无功而返.

在一次省级的教学研讨活动中,围绕教学课例《平面向量基本定理》进行同课异构.一位教师直接利用了课本的两个情境:一个是生活化的情境,“火箭在升空的某一时刻,速度可以分解成竖直向上和水平向前的两个分速度”;另一个是物理学的情境,即力的分解.展示了两个情境之后,即进入研究主题:平面内任一向量是否可以用两个不共线的向量来表示呢?这两个情境其实是异曲同工,都涉及正交分解.而要研究的问题从表象来看仅是代数形式下的向量线性表示关系,即使学生能剖析出其本质是分解,但是要向两个任意方向进行分解,显然要求过高、跨度太大.因此,课堂上不可避免地出现了探究无法推进的状况,教师无奈之下只能照本宣科.

出现如此窘境的原因在于教师对课本情境未做深入研究,拿来主义,用了情境,但没有设计相应的导引性问题,大跨度的探究只能是徒劳的.所谓问题情境,既要有情境,更应蕴含好的问题,这样才能启发学生去积极思考和探究,然后步步为营,逼近核心问题,彰显创设问题情境的价值所在.

对于探究式教学的其他环节,也需要深究.如选择例题要明确其功能,要通过追问、变式等方式来充分挖掘其潜在的价值.

教学研究永无止境,越深入越精湛.

2. 学生主动参与 提升学科素养

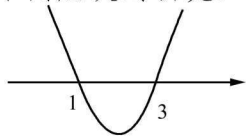
没有学生主动参与的学习,提升其学科素养只能是一纸空文.要发挥学生的学习主动性,关键要给他们搭建自主的平台,能让他们体现自身价值.

对有些问题的研究,结合学情,可以适当增强问题的开放度,让



每个学生都能参与其中,根据自己的能力来展开不同层次的研究.

如在初高中衔接教学时,笔者曾设计了这样一个开放性问题:观察右面这个二次函数的图像,你能得出哪些结论?



对于这个问题,每个学生都能得出一些结论,能力越强则发现的结论越多.虽然能力有差异,但有了主动思考和探索,学生的直观想象、数学抽象等素养都在不同程度上得到了培养和提升.

当然,这个开放性问题若止步于此,则仅起了知识回顾的作用.事实上,该问题还大有文章可做.顺沿学生思路,教师继续抛出问题:“结合刚才的研究,你目前能解怎样的一元二次不等式?”

该问题也具有一定的开放度,但学生还是都能参与其中,只是不同层次的学生研究的深度不一.最浅层次,模仿上例,举一些类似的实例,但也使其有了类比的意识,使其能逐步具备数据分析素养.高一层次的则能从这些实例中抽象出一般规律,其数学抽象素养则在原有基础上有了跨越.为进一步放大功效,提升素养,教师可以追问:“能解一般形式的一元二次不等式吗?”该问意在引发争论,探寻推理方法,为培养逻辑推理素养提供契机.

事实上,在实施探究教学的众多环节上,我们都可以创设机会,让学生主动参与到学习中来.特别是当一个定理通过探究将要呼之欲出之时,定理的概述就应让位于学生,因为亲历了前期的探究,再来叙述最后的结论,这种类似于成果发布的体验会让他们感触颇深,也成了他们进一步探究学习的动力.而经常性地自我总结概述,能不断促进学生数学抽象素养的积累和提升.

3. 师生共同研习 相互促进提升

学习研究要形成氛围,要让学生养成研究的意识,那么作为引领学生发展的教师,更应具有前瞻的研究素养;并且在教学过程中,教师要带动和指导学生开展有效研究,使课堂成为师生共同研习的良好场所.

教师认真研究教材是做好共同研习的前提,所谓认真研究教材



就是要善于捕捉教材的空白点,把它作为一个好的探究素材,融于教学设计中.

所谓教材空白点,就是因限于篇幅,教材没能过多展开,方法层面突出重点择简或择优介绍,有些只是结论性的描述.教师若缺乏研究意识或者缺乏挖掘能力,就会错失时机,造成学生的认知盲点.

以课例《椭圆的标准方程》为例,若顺着教材安排开展教学,一堂课学习下来,学生能理解椭圆的标准方程,且能掌握求标准方程的一些方法和技巧.但从提升学生素养的角度来看,显然是高度不够,要求过低了.这样的简单处理原因是教师没有深入研究教材或者研究不到位所致.事实上,在该课例中,有很多要点值得推敲.

首先,以课题为例,标准方程含义是什么?学生能否理解?其次,课本在推导椭圆标准方程的过程中,先是把一个根号移项之后再两边平方,这样的方法学生能想到吗?如果直接两边平方能否化简?特别是当推导得出椭圆的标准方程之后,课本附加一段文字表述:“由上述过程可知,椭圆上的点的坐标 (x, y) 都满足上面这个方程,并且满足上面这个方程的点 (x, y) 都在已知的椭圆上.”学生能真正理解其含义吗?这一问题迫使教师要去研究思考,在深思熟虑之后,再把这些问题作为探究点设计到教学中.

以问题为导向的探究教学,让本课例在重新设计后,课堂充满生机活力,精彩纷呈.以解读课本这段文字为例,针对教师的设问:“大家是否认可教材的这段结论?”学生们展开了激烈的争论和探讨,最终达成共识,尤其对后一个论述给出了合理推断.

学生首先回答道:“所谓满足方程的点都在椭圆上,即这些点均满足到两焦点的距离和为定值 $2a$,其代数式表示为 $PF_1 + PF_2 = 2a$.”那么如何从点的坐标满足椭圆方程到推断出其满足等式 $PF_1 + PF_2 = 2a$ 呢?面临当前问题又是一番探索研究,终于探寻出了以下的证法.

证明:设点 $P(x, y)$ 满足方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,其中



$F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$. 则

$$PF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}.$$

由 $b^2 + c^2 = a^2$, 故上式变形为 $\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2} = \left| \frac{c}{a}x - a \right|$.

由于 $-a \leq x \leq a$, 则 $PF_1 = a - \frac{c}{a}x$.

同理可得 $PF_2 = a + \frac{c}{a}x$, 所以 $PF_1 + PF_2 = 2a$.

即点 P 在椭圆上.

对于课本这段文字的叙述, 教师往往一带而过. 但经过师生这番研习之后, 不仅让学生理清了思路, 也再次体验了探索成功的乐趣, 更让他们有了质疑问难的意识, 而教师也从中体会到了研究教材的价值.

从本例的知识层面来看, 得出的 $PF_1 = a - \frac{c}{a}x, PF_2 = a + \frac{c}{a}x$ 这两个式子其实就是椭圆的焦半径公式, 由它来引出椭圆第二定义, 自然顺畅而不费周折. 从培养学生素养的层面来看, 多种素养并举提升, 如数学抽象、逻辑推理、数据运算等, 实乃一举多得. 这种对课本深度探究的方法, 恰恰给学生提供了研究范式, 使他们逐步养成用质疑问难的态度去解读文本、看待问题, 这也是一种科学素养的培养.

教学共赢, 关键在于研学并举, 让理念落实于设计, 让探究付诸实践, 让课堂呈现更多高素养的精彩亮点.



目 录

理论篇 探得究竟 浸润素养

- 一 探究式教学定义 / 7
- 二 探究式教学理念 / 7
- 三 探究式教学组成要素 / 8
- 四 探究式教学理论依据 / 8
- 五 探究式教学遵循的八大原则 / 10

设计篇 精于设计 有效探究

- 一 函数的章首课 / 50
- 二 函数的概念 / 53
- 三 指数函数 / 56
- 四 用二分法求方程的近似解 / 59
- 五 正弦函数的图像和性质 / 62
- 六 基本不等式 / 64
- 七 平面向量基本定理 / 67
- 八 直线与平面所成的角 / 70
- 九 平均变化率 / 74



十 数系的扩充 / 77

研究篇 多角度视野下的数学教学研究

- 一 也谈“线性回归”的教学策略 / 86
- 二 理解数学,不失本性 / 92
- 三 一课两构的“异”和“意” / 98
- 四 MPCK 视角:以“基本不等式”为例 / 107
- 五 尝试研究,助推能力提升 / 114
- 六 去“伪”存“真”话探究 / 120
- 七 例谈有效“顺应”的最佳时机 / 124
- 八 衔接教学,应凸显思维衔接 / 128
- 九 高中数学活动教学的实践与思考 / 133
- 十 雅俗共赏“二分法” / 141
- 十一 剖析函数单调性及其表示 / 145
- 十二 赏析经典——二项式定理 / 149
- 十三 趋利避短,活用信息技术 / 152
- 十四 精准着力,有效提升数学核心素养 / 156



理 论 篇

探得究竟 浸润素养





目前,教育界围绕学科教学与学科核心素养之间的联系开展了广泛研究,大家达成的共识是落实学科核心素养必须有赖于学科教学,这是毋庸置疑的。从理念上来说,学科核心素养是指学生在接受学科教育过程中逐步形成的适应个人终身发展和社会需要的必备品格和关键能力,是学生通过学科学习内化的带有学科特性的品质。数学学科核心素养同样兼具这样的特性和品质,其基本要素由数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学建模、数学运算、数据分析六个方面构成。在具体数学教学时,不能指望通过某堂课或某个教学内容就能对应培养某方面的素养,事实上,素养的培养应该是浸润式的。当然,一种好的教学方式能够加速素养的落实与提升。鉴于此,本文就当下倡导的探究式教学与核心素养之间的关联性作探讨,以期把握核心、打通关键、有效实施。坚持不懈地浸润素养,必将使素养全面落实、整体提升。下面围绕三个方面进行具体阐述。

(一) 探究式教学理论 指向学科核心素养

探究式教学,就是以探究为主的教学。具体地说,它是指教学过程在教师的启发下,以学生独立自主学习和合作讨论为前提、以现行教材为基本探究内容、以学生周围世界和生活实际为参照对象,为学生提供充分自由地表达、质疑、探究、讨论问题的机会和可能,让学生通过个人、小组、集体等多种形式解难释疑、尝试学习活动,并将自己所学知识应用于解决实际问题的一种教学形式。

可见,探究式教学强调学生的自主、合作,注重学生综合能力的培养,并强调学以致用,为学生的终身发展打下坚实的基础,这些都与培养学生的核心素养所追求的终极目标是一致的。

探究式教学的基本特征有八个方面,即问题性、自主性、引导性、实践性、研究性、过程性、渐近性和开放性。每个教学特征都为学科核心素养的渗透与落实提供了有利条件。

探究式教学的两个重要理论依据分别为建构主义理论和多元智能理论。建构主义理论的基本观点是:学习是学习者在自己原有经验、知识、概念、技能、信仰、习惯等因素的基础上所进行的主动、积极的意义建构过程。多元智能理论认为:每个孩子都是一个潜在的天才儿童,只是表现为不同的方式。理



论创始人加德纳提出人类的智能至少可以分成八个范畴。

自主建构学习的过程,也是提升学科核心素养的过程。这种学习方式有助于学习者的创新意识、创新思维、创新能力和合作精神的培养。而创新与合作正是现代高素质人才应该具有的基本素养。多元智能理论倡导现代教育要成为开发和释放人的创造潜能的发动机,八大智能中有逻辑数学智能和空间智能,这与数学学科核心素养一脉相承,成了培养学生数学学科核心素养佐证的理论依据,关键要开发利用好。

(二) 探究式教学模式 环环紧扣素养提升

在数学学科教学中应用探究式教学,大多与数学概念教学相结合。基本模式是:问题情境→探究新知→知识应用→课堂小结。

对于模式中的问题情境,重点是必须要有情境,情境的创设目的在于能激发学生的学习兴趣,燃起他们的求知欲。对于学习同一个知识,可以采用不同的情境,可以是生活化的,或者是跨学科的,也可以是学科内部的,不管采用何种情境,关键在于能否合理应用。合理应用情境即是要能激发起学生的好奇心,让他们能够产生问题意识,并有主动探究的意愿。当然问题情境肯定要蕴含问题,没有问题的情境是没有意义的。而从情境中如何挖掘问题则由学生来完成,倘若学生还有困难,教师要跟进引导。问题情境是为探究新知识作铺垫的,随着问题的逐步抽象,也就慢慢揭开了新概念的神秘面纱。这一过程就是数学建模、数学抽象、逻辑推理等素养也都浸润其中。

探究新知,亦是数学解模。针对不同问题,有相应的解模策略。有些可能要凭借数据分析,批量代入验证,得出共性结论,再进行严格论证。有些可以把相近的问题摆在一起,通过类比,猜想结论,再推理论证。有些必须要经过严格的演绎推理等。同时,对于概念的外延往往逐一剖析研究,使概念的内涵逐渐清晰明朗。这样,学生通过探究不同的新知,摸索出针对性的研究策略,在积累研究经验的同时,探究能力也在不断提高,这也就促使了学科素养的有效提升。

探究式教学理念指导下的知识应用环节,凸显三点:一是先让学生尝试解决,再相互交流探讨;二是通过变式,让学生学会举一反三;三是引导学生透过现象抓本质,总结提升形成规律。在亲历了知识应用的三部曲后,学生的



分析问题、解决问题能力会有一个从量变到质变的飞跃,同时,通过解决不同类型的问题,也培养了学生相应的学科素养.特别是规律总结对数学抽象素养的提升有着积极的助推作用.

一般的课堂小结有两种形式:一种是教师带着学生再现新知识和新方法;另一种则貌似开放性的总结,即“通过本节课的学习,你有哪些收获?”.两种总结,正好是两个极端,前者平铺直叙,后者没有主题,两种课堂小结意义和价值都不大.而从培养学生学科素养角度来看,最好能用导引性的问题来启发学生进行总结回顾,通过设置相近问题来激励学生去尝试解决,这样既有针对性,兼具思辨性;同时,通过解决相近问题来培养学生的知识迁移能力,学生在主动参与的过程中,其自身的数学抽象、逻辑推理等素养都得以兼顾培养.

(三) 探究式教学原则 确保素养落地生根

探究式教学在学科教学中的有效应用,大家都在积极探索实践.但在实际教学过程中,效果参差不齐,有的表面上看热热闹闹,但对学生能力提升没有实质性帮助;有的貌似探究,其实是被教师牵引着的;有的探究只因学生的启而不发,只能戛然终止.林林总总都是因为追求了形式,而没有领会探究教学的本质所致.笔者结合了自己的教学实践,总结出了有效实施探究式教学的八大原则,下面逐一加以赘述.

主体性原则:探究主体应该是学生.围绕要探究的问题,由学生自行合作探讨解决问题的方案与策略,并付诸实施.遇到问题尽量自行解决或小组合作解决.

适切性原则:探究性教学在数学教学中的应用,关键要有好的题材,并不是所有的概念、定理都适用.所谓好题材是指有探究点、具有开放性.

情景性原则:为激发学生研究热情,经常把数学问题置身于情景中,教材也十分注重情景引入.情景有三重性,即可以是生活化的、可以是数学学科自身的、也可以是与其他学科相关联的.好的情景,关键在于能否引发学生主动发现问题、思考问题,进而解决问题的兴趣.

引导性原则:主要是针对教师而言,在探究教学中,设计好的导引问题非常重要,否则会使学生探究受阻,或者就是走形式.同时,探究如果缺失了教



师的有效指导,那就等同于放任自流.在学生探究遇阻时,教师要及时地点拨、引导.

坡度性原则:同一个探究性问题,由于学生的能力不同,可能实施探究境况不同,因此,针对不同的学生,设计的导引性问题的难度、开放度不同,问题要贴近学生的最近发展区.

连贯性原则:数学探究要以数学知识的发生发展过程和理解数学知识的心理过程为基本线索,为学生构建前后一致、逻辑连贯的学习过程,使他们在探究数学知识的过程中学会思考.

拓展性原则:对一个问题的探究,可能始于课堂,但从培养学生创新性思维角度出发,有必要把对问题的研究拓展延伸到课外.

生成性原则:生成性是探究式教学的重要特征,也是评判教学成效的一个重要依据,当下还能简单地把“明确的预定目标以及对预定目标的达成”作为一堂“好课”的标准吗?英国课程专家斯藤豪斯曾说过:“教育成功的程度就是它所导致的学生不可预期的行为结果增加的程度.”

这八大教学原则让数学课堂充满研究氛围,学生的思维在不断地碰撞中擦出智慧的火花.而每个教学原则给学科素养提供了根植的土壤.有了学生主体的积极参与,才会有他们主动发展的意愿,素养的培养才会有起始点和原动力.挖掘好的探究题材,为持续培养素养提供了源泉.而好情境需配好的导引问题,才能使探究步步深入,让培养学科素养的步伐紧紧跟随.合适的坡度让探究连贯而行,在完成既定探究目标之后,学生研究的热情依然高涨,研究的脚步不愿停息,于是把研究拓展到了课外,在不断挑战自我的过程中,让能力和素养绽放异彩.

探究式教学,以探得究竟为知识目标,以培养能力为己任,在探究前行之中,学科素养浸润其中,并相伴前行,不断螺旋攀升,使学生凭借高超的技能和良好的素养去挑战智慧的新高点.



一 探究式教学定义

探究式教学(Inquiry Teaching)又称发现法、研究法,是指学生在学习概念和原理时,教师只是给出一些事例和问题,让学生自己通过阅读、观察、实验、思考、讨论、听讲等途径去独立探究,自行发现并掌握相应的原理和结论的一种方法.它的指导思想是在教师的指导下,以学生为主体,让学生自觉地、主动地探索,掌握认识和解决问题的方法和步骤,研究客观事物的属性,发现事物发展的起因和事物内部的联系,从中找出规律,形成自己的概念.可见,在探究式教学的过程中,学生的主体地位、自主能力都得到了加强.

二 探究式教学理念

探究式教学的基本特点是不将现成的结论告诉学生,教师为学生提供问题情境并组织、引导学生自己去发现问题、解决问题.

探究式教学基于布鲁纳发现法教学,他认为学生发现学习的“发现”与科学家的“发现”只是形式和程度的不同,而性质是相同的.因此,学生要像数学家那样去思考数学,去发现问题的结论和规律,成为一个“发现者”.教学不能是讲解式的,不能使学生处于接受知识的状态,而应是假设式的,应尽可能让学生保留一些令人兴奋的观念系列,引导学生自己去发现,使之成为科学知识的发现者.

探究式教学重视探究知识的“过程”.布鲁纳认为,认识是一个过程.就认识者而言,认识的过程本身含有积极的意义,而不是消极的.假如认识者要使呈现在他面前的知识成为他自己的知识,就必须亲自从事“发现的行动”,亲自从事构成模式的过程.

探究式教学强调“直觉”思维.直觉思维的本质是映象或图像性的,它的形成过程一般不是靠语言信息,尤其不靠教师指示性的语言文字.布鲁纳认