

FENSHUJIE WEIJIFEN TUXIANG XIUFU MOXING ZAI
YIXUE CT TUXIANG JINSHU WEIYING QUCHU ZHONG DE YINGYONG

分数阶微积分图像修复模型在 医学CT图像金属伪影去除中的应用

周激流 蒲亦非 张 意 刘 彦 主编



四川大学出版社

分数阶微积分图像修复模型在 医学CT图像金属伪影去除中的应用

周激流 蒲亦非 张 意 刘 彦 主编



四川大学出版社

责任编辑:毕 潜
责任校对:唐 飞
封面设计:墨创文化
责任印制:王 炜

图书在版编目(CIP)数据

分数阶微积分图像修复模型在医学 CT 图像金属伪影去除中的应用 / 周激流等主编. —成都:四川大学出版社, 2013. 6

ISBN 978-7-5614-6917-0

I. ①分… II. ①周… III. ①微积分—应用—计算机 X 线扫描体层摄影—图象处理 IV. ①R814. 42

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 138179 号

书名 分数阶微积分图像修复模型在医学 CT 图像金属伪影去除中的应用

主 编 周激流 蒲亦非 张 意 刘 彦
出 版 四川大学出版社
地 址 成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发 行 四川大学出版社
书 号 ISBN 978-7-5614-6917-0
印 刷 四川永先数码印刷有限公司
成品尺寸 185 mm×260 mm
印 张 7.875
字 数 163 千字
版 次 2015 年 12 月第 1 版
印 次 2015 年 12 月第 1 次印刷
定 价 32.00 元

◆ 读者邮购本书,请与本社发行科联系。
电话:(028)85408408/(028)85401670/
(028)85408023 邮政编码:610065

◆ 本社图书如有印装质量问题,请
寄回出版社调换。

◆ 网址: <http://www.scup.cn>

版权所有◆侵权必究

前 言

分数阶微积分理论在图像处理中的应用尚属起步阶段，但由于其本身具有的特殊数学性质，取得了一些基于整数阶微积分方法难以得到的效果。本书正是沿着这条思路，主要研究如何将分数阶微积分的理论扩展到医学 CT 图像金属伪影的去除中，主要内容包括：

(1) 根据分数阶微积分的 Riemann-Liouville 定义分析和推导了数字图像的 1~2 阶分数阶微分掩模，其中包括 x 正方向、 x 负方向、 y 正方向、 y 负方向、左上对角线、左下对角线、右上对角线和右下对角线八个方向的 $(n+2) \times (n+2)$ 分数阶微分掩模，然后，在此基础上，提出并论述了基于该定义的 1~2 阶分数阶微分滤波器的理论与构造。仿真实验证明了该分数阶微分运算不仅可以保留平滑区域的低频轮廓信息，还可以非线性地增强图像中的高频边缘，同时还能增强高频的纹理信息。对于纹理信息的意义相对重要的图像而言，该方法具有独特的优势和良好的效果。

(2) 构造了基于分数阶偏微分框架下的全变分图像修复模型以及全变分小波修复模型，并以此为基础，提出了基于分数阶全变分模型的 CT 图像金属伪影去除算法。首先，分析了经典全变分图像修复模型以及全变分小波修复模型的缺点，即其具有无法保证连通性的问题，并会产生阶梯效应，如果简单提高微分方程的阶次，虽然可以避免这一问题，但是会产生新的副作用。本书使用分数阶的变分项取代原模型的整数阶变分项，使用分数阶的范数取代原模型中的 L_1 范数，这可以看成是整数阶的全变分图像修复模型的分数阶扩展，可以通过调节模型中的分数阶阶次来控制方程的阶次，以满足连通性的要求，并克服阶梯效应。利用欧拉-拉格朗日方程近似地得到对应的梯度下降流，再使用分数阶的模板对分数阶微分方程进行离散化，得到数值计算方案。然后，将分数阶的全变分图像修复模型进行适当简化，应用于医学 CT 图像金属伪影的去除中。先将含金属伪影的医学 CT 图像进行传统的阈值分割，把金属区域分割出来，再将含金属伪影的医学 CT 图像以及分割出来的金属图像进行前向投影，以金属区域的投影数据的像素点坐标为索引，与含金属伪影的医学 CT 图像的投影数据进行逻辑与运算，得到

去掉金属伪影投影数据的破损弦图，使用分数阶全变分修复模型对破损的弦图进行修复，修复完成之后进行滤波反投影，最后将前面分割出来的金属区域重新加入到医学CT图像中。实验证明，通过适当调节分数阶阶次，可以克服传统整数阶全变分模型的缺点，并能同时避免产生高阶模型所产生的人工噪声点。

(3) 给出了基于曲率扩散的医学CT图像金属伪影去除方法，并基于前面的分数阶框架对该模型进行扩展，得到基于分数阶曲率扩散的CT图像金属伪影去除算法。首先，分析了经典全变分模型无法满足连通性的原因，由原模型得到的欧拉-拉格朗日方程中，扩散项并未包含图像的几何信息。本书将图像的曲率直接加入到欧拉-拉格朗日方程中的扩散系数中，得到了基于曲率扩散的医学CT图像金属伪影去除方法，并给出了数值计算方案。然后根据前面的分数阶框架，对此模型进行扩展，使用分数阶的曲率以及分数阶的梯度替换原模型中的对应项，得到了基于分数阶曲率扩散的CT图像金属伪影的去除模型。同样利用欧拉-拉格朗日方程近似地得到对应的梯度下降流，再使用分数阶的模板对分数阶微分方程进行离散化，得到该模型的数值计算方案。实验证明，这样可以克服传统方法的连通性缺点，并能有效地提高修复后的峰值信噪比。

(4) 给出了一种非迭代的基于一致性传输的金属伪影去除方法。首先，对修复区域的像素按照距离修复边界的欧氏距离进行排序，这一过程可以看作是求解程函方程，使用快速步进法，即水平集的方法进行求解，得到一个排序之后的集合。然后，分析了原始模型权重函数的缺点，构造了新的加权求和函数。此函数由三部分组成，分别是方向一致性函数、几何距离函数以及水平距离函数，其中方向一致性函数将传统的水平集梯度场替换为一致性流场，并根据此流场给出了一致性强度的计算公式。实验证明，本方法在保证金属伪影的去除性能的同时能够有效地降低算法的运行时间。

本书的编写和出版，得到了张妮、张卫华、张永清、刘军、朱伍洋、陈书书的支持与帮助，得到了四川大学出版社的大力协助，在此一并致谢。

编者

2015年9月

目 录

第 1 章 绪 论	(1)
1.1 引 言	(1)
1.2 国内外研究现状分析	(4)
1.2.1 图像修复以及医学 CT 图像金属伪影去除的国内外研究现状	(4)
1.2.2 分数阶微积分在工程中的应用	(9)
1.3 主要研究内容	(10)
第 2 章 分数阶微积分的理论与数学基础	(13)
2.1 引 言	(13)
2.2 分数阶微积分的基本理论	(14)
2.2.1 常见函数及其变换	(14)
2.2.2 Riemann-Liouville 定义	(16)
2.2.3 Grünwald-Letnikov 定义	(19)
2.2.4 分数阶微积分的基本性质	(21)
2.3 偏微分方程及变分法	(21)
2.3.1 偏微分方程的基本概念及分类	(21)
2.3.2 偏微分方程的数值计算方法	(23)
2.3.3 变分法的基本概念	(26)
2.4 CT 成像原理	(29)
第 3 章 基于 Riemann-Liouville 定义的分数阶数值计算模板、滤波器的构造及其在 图像增强上的应用	(32)
3.1 引 言	(32)
3.2 基于 Riemann-Liouville 定义的分数阶数值计算模板	(33)

3.3	基于 Riemann-Liouville 定义的分	数阶微分滤波器的构造	(37)
3.4	实验仿真与结果分析		(40)
3.5	本章小结		(44)
第 4 章 基于分数阶全变分图像修复模型的医学 CT 图像金属伪影去除算法 (45)			
4.1	引言		(45)
4.2	基于分数阶全变分的数字图像修复模型		(46)
4.2.1	整数阶全变分图像修复模型		(46)
4.2.2	基于分数阶全变分的图像修复模型		(47)
4.2.3	数值计算		(49)
4.2.4	实验仿真		(51)
4.3	基于分数阶全变分的数字图像小波修复模型		(54)
4.3.1	整数阶全变分图像小波修复模型		(54)
4.3.2	基于分数阶全变分的图像小波修复模型		(55)
4.3.3	数值计算方法		(56)
4.3.4	实验仿真		(56)
4.4	分数阶全变分的图像修复模型在医学 CT 图像金属伪影去除中的应用		(59)
4.4.1	基于分数阶全变分的医学 CT 图像金属伪影去除模型		(59)
4.4.2	数值计算		(60)
4.4.3	实验仿真		(60)
4.5	本章小结		(65)
第 5 章 基于泛化曲率驱动扩散模型的医学 CT 图像金属伪影去除方法 (67)			
5.1	引言		(67)
5.2	基于整数阶曲率驱动扩散的医学 CT 图像金属伪影去除模型		(68)
5.2.1	算法描述		(68)
5.2.2	数值计算		(69)
5.2.3	实验仿真		(70)
5.3	基于分数阶曲率驱动扩散的医学 CT 图像金属伪影去除模型		(74)
5.3.1	算法描述		(74)
5.3.2	数值计算		(75)
5.3.3	实验仿真		(76)

5.4 本章小结	(85)
第6章 基于一致性扩散的非迭代快速 CT 图像金属伪影去除模型	(87)
6.1 引 言	(87)
6.2 数学模型	(88)
6.2.1 模型基本框架	(88)
6.2.2 计算修复顺序	(89)
6.2.3 权重函数的设计	(90)
6.3 实验仿真	(94)
6.4 本章小结	(100)
第7章 总结与展望	(102)
7.1 总 结	(102)
7.2 未来研究工作展望	(104)
参考文献	(106)

第1章 绪论

1.1 引言

图像处理作为计算机视觉的重要组成部分，其研究历史已经有几十年的时间了。图像质量的好坏关系到许多图像理解以及机器识别方面的应用，如人脸识别系统、车牌识别系统、图像检索系统等。而目前图像处理这个课题主要包括图像增强、图像去噪、图像分割、图像修复、图像压缩等问题，根据应用领域的不同，又衍生出许多其他的分支，如医学图像处理、生物图像处理等，但是其本质都是处理二维的图像信号^[1]。本书主要集中在图像修复以及相应理论在医学图像处理中的一个重要子课题——CT图像金属伪影去除中的应用。

图像修复的主要目的是恢复破损图像中的某些信息。在这里，所定义的“破损”是一个主观概念，根据人们不同的应用需求，这个“破损”就会出现不同的具体情况，如图1.1所示。

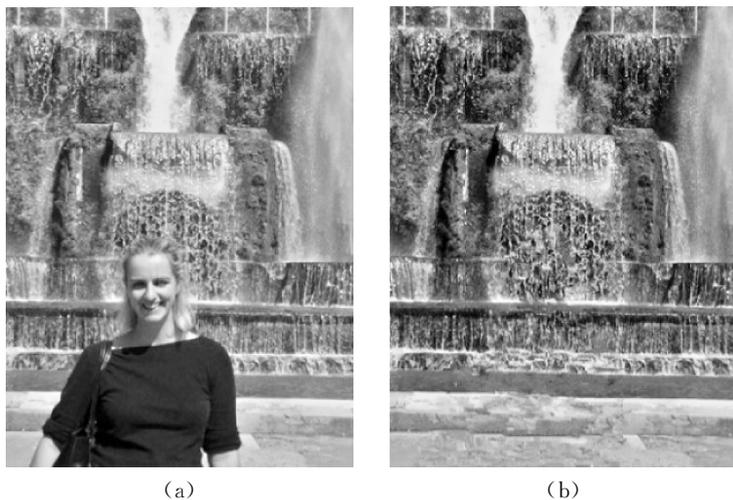




图 1.1 图像修复的两个例子

可以看到，图 1.1 (b) 将人物从图 1.1 (a) 中去掉了，这里进行图像修复的目的是目标物体的去除，而在图 1.1 (d) 中，仅仅是将图 1.1 (c) 中的文字去掉了。当然，图像修复不仅仅包含这两方面的内容，还包括目标物体去除^[2-3]、视频编辑^[4-6]、视频或图像数据通信当中的错误隐匿^[7-9]等。在医学图像处理中，图像修复的许多技术可以应用到 CT 图像金属伪影去除之上^[10-11]。

图像修复问题可以进行如下描述： Ω 表示图像域，即有限个像素组成的矩阵，表示最终修复后的图像 $u: \Omega \rightarrow [u_{\min}, u_{\max}]$ 。 $D \subset \Omega$ 表示图像 u 中需要确定的修复区域。 $\Omega \setminus D$ 表示数据域，即表示待修复图像中数据已知的部分 $u^0 = u|_{\Omega \setminus D}$ 。需要得到这样一个 u ，其中被修复的区域 D 对于人的认知系统来说是“有意义的”。

当前医学 CT 图像已经在临床应用中扮演着非常重要的角色，但是在实际应用中，各种各样的伪影会掩盖病灶的一些基本特征，影响医生的诊断，而这些伪影的成因多种多样，例如探测器、重建算法、金属等。而其中金属伪影是比较复杂的一种，因为伪影的具体表现形式以及影响的范围受实际金属大小、材质以及形状的影响，常常差异比较大。产生金属伪影的原因多种多样，主要包括数据采集不完整、射束硬化等。

X 射线穿过人体组织时，是满足朗伯定律的，但是朗伯定律所关注的是单一频率的光子，而非像实际应用中的 X 射线那样包含多种频率的光子。在这种包含多种频率的光子穿过人体组织时，能量较低的光线率先被吸收，能量较高的光线更容易穿过人体，而在整个 X 射线的投射过程中，射线的平均能量会上升，射线会变硬，这就是常说的射束硬化现象^[12]。

其实，常见的金属伪影是由于数据采集不全所造成的，其原理主要是由于 CT 成像是通过若干角度的 X 射线透射之后，探测器接收到投射过来的 X 射线，根据射线的衰减情况，建立衰减系数的联立方程组，并通过计算得到的衰减系数映射到可以显示的像素值，从而给出组织的密度分布，达到辅助诊断的作用。但是，当人体组织内存在金属时，由于金属对射线的吸收非常强烈，导致最后能够穿

过人体组织被探测器接收到的射线强度非常小，从而造成数据的有效性大大下降，还会影响最后成像时的算法性能，产生金属伪影。图 1.2 是一些金属伪影的例子。

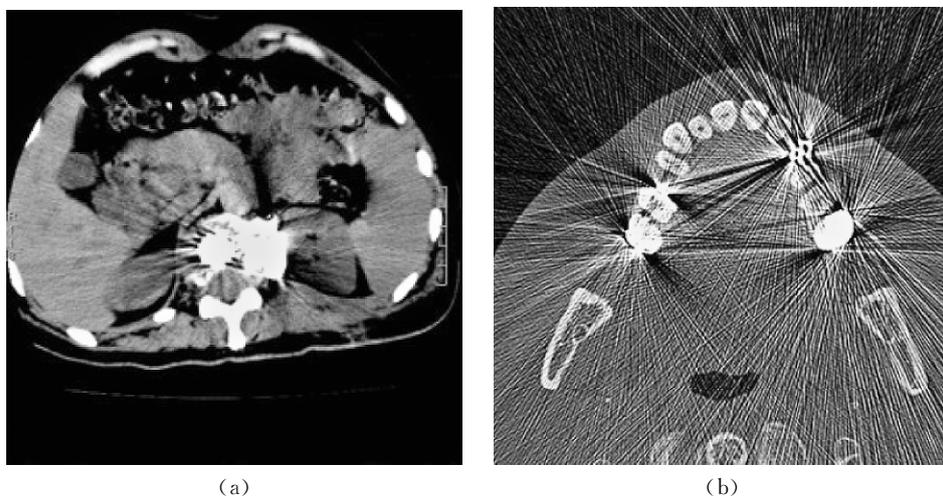


图 1.2 含金属伪影的医学 CT 图像

分数阶微积分理论应用到信号处理中属于起步阶段，而运用到图像处理中的研究更是非常少，近几年仅有很少的学术期刊刊载了基于分数阶微积分理论的图像处理论著，但这并非意味着这个研究方向的潜力不大，吸引不了学者们进行深入研究，恰恰相反，正是由于分数阶微积分是整数阶微积分的扩展，而整数阶微积分在图像处理中的应用，特别是基于偏微分方程的图像处理已经成为一门独立的学科，将分数阶微积分应用到图像处理中应该是顺理成章的事情，但是困难在于：一是分数阶微积分虽然是整数阶微积分的扩展，但是其数学理论与整数阶微积分有一定差异，特别是在运算法则以及数学性质上；二是分数阶微积分的发展比整数阶微积分要晚得多，其物理意义的研究处于探索阶段，而物理意义的研究又直接影响到分数阶微积分理论在工程中的应用。正是少数的数学理论的研究者，以及其他领域的研究者发表的关于分数阶微积分在各种领域的应用的著作，引起了大家的关注，分数阶微积分特殊的数学性质，能够更深入地反映自然界的内在规律，而这些规律还体现在身边的各个地方。而近年来的文献利用分数阶微积分的非线性、弱导数性质、分形特征等，将分数阶微积分运用到图像处理中，取得了令人惊喜的效果。

本书旨在通过对 Riemann-Liouville 分数阶定义的研究，给出一种新的用于图像增强的分数阶微分掩模模板，并构造对应的滤波器，基于该计算模板，针对现有经典的基于偏微分方程图像修复的全变分方法的缺点，给出一个基于分数阶偏微分方程的框架，能够解决一些传统方法存在的问题，并将基于这一框架下的几个图像修复的分数阶模型应用到医学 CT 图像的金属伪影去除中。最后为了在保持去除金属伪影的基本性能不变的条件下，减小算法的运算时间，给出一种非迭代的基于一致性传输的 CT 金属伪影去除方法。

1.2 国内外研究现状分析

1.2.1 图像修复以及医学CT图像金属伪影去除的国内外研究现状

1.2.1.1 基于传统整数阶变分偏微分方程的图像修复方法

当前数字图像的修复技术主要分为两个类型：一类主要针对修复尺度比较小、含结构信息比较多的图像，也就是说，图像的主要信息表现为边缘、几何形状等，纹理信息比较少的图像，这类方法一般以变分偏微分方程的方法为主^[4,13-20]；而另一类主要针对含纹理信息比较多、结构信息少一点的图像，这类方法一般以纹理合成为主^[2,21-24]。

基于传统整数阶变分偏微分方程的方法也主要分为两类。

一类是根据偏微分方程的扩散传播机制来模拟图像的修复过程，而使用哪一个已有的经典偏微分方程或者如何构造图像随时间变化的微分方程，主要依赖于图像待修复区域的外部信息进行扩散传播时的具体形式，可以说这种方法是微观的。这类方法最早是由 Masnou 和 Morel 在 1998 年发表的文献 [18] 中给出，其主要思想是给出图像待修复区域周围的等照度线，并将待修复区域两端断开的等照度线用直线进行连接，同时在文献 [25] 中添加了遇到 T 字形情况时所做的处理。Bertalmío 等^[13] 于 2000 年首次提出图像修复 (image inpainting) 的概念，给出了一种基于传播的偏微分方程方法 (BSCB 方法)，其主要思想是将待修复区域的 Laplace 信息沿等照度线方向传入待修复区域，从本质上来讲，这是一种基于各向异性扩散的方法^[26]。随后，Bertalmío 等^[4] 分析了该方法与流体力学中的 Navier-Stokes 方程的联系，并将此方法应用于视频修复以及高分辨率重建中。为了解决 Chan 等^[17] 在 2000 年提出的全变分图像修复的连通性问题，Chan 和 Shen 在文献 [16] 中将曲率加入了由全变分模型得到的欧拉-拉格朗日方程 (CDD 模型) 当中。Chan 等^[19] 分析了 BSCB 方法与 CDD 模型的数学性质以及内在联系，提出了欧拉弹性曲率的图像修复模型。Bertozi 等在文献 [27] 中给出了一种基于 Cahn-Hilliard 方程的二值图像修复方法，并在文献 [28] 中对该方法进行了改进，引入了扩散尺度因子以及特征尺度因子，从而解决了原方法所无法满足的连通性问题。Burger 等^[29] 将这种基于 Cahn-Hilliard 方程的方法扩展到了灰度图像中。Tschumperlé^[30] 将曲率引入一个新的张量驱动的偏微分方程中，针对彩色图像提出一种基于扩散的彩色图像修复模型。Auclair-Fortier 以及 Ziou^[31] 给出了一种基于热传导方程的全局原理方法，从而在图像去噪与修复过程中能够更好地保持结构信息。受文献 [32] 的启发，Bertalmío^[20] 将图像修复看作插值的特殊情况，将线性插值使用泰勒公式进行展开，从而得到一个具有连通性、对比不变性的最优三阶偏微分方程。Telea^[33] 使用快速步进法，对待修复区域内的像素进行排序，然后构造权重函数对排序后的像素点进行修复，其处理速度有了很大

程度地提高。Bornemann 和 März^[34] 讨论并分析了 Telea 的方法的缺点, 基于原始模型, 给出了一种基于一致性传输的图像修复方法。王卫红与秦绪佳^[35] 将待修复的图像看作残缺的三维散乱点集, 使用径向函数重建破损的三维曲面。作冀颖和阮秋琦^[36] 将 CDD 模型引入 Helmholtz 涡量方程中, 能够更好地保持图像的结构信息。Wu 等^[37] 专门针对欠曝光图像给出了一种联合扩散图像修复模型, 先对图像进行光照补偿, 然后通过偏微分方程进行扩散。这类方法的核心集中在传导系数的构造上, 关系到外围已知信息向待修复区域进行传导的方向与大小。

另一类是基于泛函极值的变分方法。这类方法首先通过图像的一些先验信息, 建立起对应的数据模型, 从而将图像修复问题转化为泛函求极值的变分问题, 即满足某一正则条件下的最优解, 这种方法可以看作是宏观的。这类方法最早是由 Chan 和 Shen^[17] 根据全变分去噪模型^[38] 构造全变分修复模型, 并同时提出基于变分的图像修复模型必须满足三个性质, 即局部性、连通性和鲁棒性。针对压缩数据在网络通信时发生的丢包问题, Chan 等^[7] 同时将全变分方法应用到小波系数的修复上, 建立了全变分小波修复模型。Yau 等^[39] 使用 L_0 范数取代经典模型里面的 L_1 或 L_2 范数, 简化了数值计算的过程。为了解决全变分模型难以反映图像的高阶信息, 比如曲率, Esedoglu 和 Shen^[15] 提出了基于 Mumford-Shah-Euler 模型的图像修复方法。Ballester 等^[40] 将向量场以及灰度水平集引入能量函数的构造当中, 同时对灰度水平集以及梯度方向进行插值。Tai^[41] 等引入零收敛条件来计算修复方向, 构造了基于 TV-Stokes 方程的图像修复模型。同样基于这种思想, Hahn 等^[42] 提出一种最小化图像梯度与正则法向量方向的方法, 实现了依赖于向量场的自适应扩散。当压缩图像在进行网络通信而出现包丢失的时候, 会遇到小波系数丢失的情况, 这时就需要在小波域进行修复, 而非传统的空域当中。Chan 等^[7] 针对这一情况将全变分模型扩展到小波域, 提出了全变分小波修复模型, 在小波系数的丢失比例不大时, 得到了理想的效果。同样的, Cai 等给出了一种基于框架小波^[43] 变换的图像修复算法。Zhang 等在文献 [44] 和文献 [45] 中分别将全变分图像修复模型以及全变分小波修复模型中的 TV- L_1 范数修改为 TV- L_p 范数, 提高了修复图像的质量。

基于传统整数阶变分偏微分方程的图像修复方法的主要思想是将修复区域周围的已知像素信息以某种特定的能量最小化方式扩散到待修复区域中, 那么当修复区域比较大时, 单纯地提高模型的阶次虽然能够得到闭合的修复结果, 但是会产生阶梯效应, 并且对纹理丰富的图像修复效果不是很理想。

1.2.1.2 基于纹理合成的图像修复方法

纹理合成技术是近年来发展非常迅速的一种纹理拼接的算法。对于给定的区域纹理样本, 按照表面的几何特征, 拼接生成整个曲面的纹理, 在视觉上是相似连续的。Igehy 和 Pereira^[46] 最早将纹理合成的方法引入图像修复中。近年来的方法主要是基于 Efros 和 Leung^[22] 以及 Wei 和 Levoy^[47] 非参数采样方法, 而参数采样的方法由 Levin 等^[48] 在 2003 年提出。在这些模型中, 纹理被构建为二维概率图模型, 每一个像素值都主要由其邻域像素来决定, 为了寻找最佳匹配的块, 往往要检索这个图像, 因此, 不同于基于传统整数阶变分偏微分方程方法的图像修复, 基于纹理合成的方法往往是全局的。基于前面的工作, 改进的模型层出不穷^[24,49], 其中最为重要的是 Criminisi^[2] 等采用的一种基于

样本的图像修复算法，其实质是结合结构传输以及纹理合成的方法，去除图像中的大物体，主要步骤包括优先权计算、搜索和复制，实验结果证明该方法的效果要优于前面几种方法。Demaret 等^[50]指出，基于采样的修复方法的主旨是找到一个映射，将待修复区域内的像素映射到已知区域当中，而前面的修复方法将会对像素的修复顺序相当敏感，为了解决此问题，构造了映射的优化泛函。Aujol 等^[51]研究了文献 [50] 提出的能量函数的非凸性，并给出了改进方法。与此方法类似，文献 [52—54] 分别给出了自己的优化策略。这种基于统计的思想还被用于图像去噪中，当前非常流行的非局部均值方法就是基于这种思想^[55—57]。

虽然纹理合成对于纹理部分的修复具有明显的优势，但是当样本中缺少图像的结构信息时，这种方法将难以得到满意的结果。为了解决这个问题，许多学者将应对几何结构缺失的修复方法以及应对纹理缺失的修复方法结合起来进行了研究。Sun 等^[58]提出一种基于结构传播的图像修复算法，该方法需要由使用者首先画一段曲线来指定缺失结构的主要信息。Bertalmio 等^[14]提出，先将图像进行分解，得到几何结构以及纹理两部分，对这两部分分别使用 BSCB 模型以及纹理合成进行修复，与此类似的方法见文献 [24, 59]。Gilboa 和 Osher^[60—61]将非局部均值的思想应用到全变分上，加入图论的思想，提出非局部全变分的图像处理框架，并给出了应用于图像分割、图像修复、图像去噪等几个正则化问题的讨论。类似的方法同样出现在文献 [62—66]。Zhang 和 Chan^[9]也给出了基于非局部全变分框架下的小波修复模型。Arias 等^[67]提出了基于采样的变分框架，推导出了一系列修复方式，这个框架可以看作是^[53—54, 68]的扩展。Bugeau 等^[69]将纹理合成、传播扩散和一致性三类图像修复的方法通过建立权重函数的方式给出了其能量泛函。Xu 和 Sun^[70]、Elad 等^[71]分别根据稀疏表达的思想^[72—73]构造了不同的修复模型。王晨与杜建洪^[74]使用一种改进的纹理合成方法来进行图像压缩。Wu^[75]等将泊松方程以及一个双向扩散方程引入纹理合成当中，以去除纹理合成所产生的各种视觉伪影。

本书的主要目标是处理医学 CT 图像的金属伪影，其对应的弦图基本不含纹理信息，所以本书主要处理包含结构信息的图像，主要集中在第一类，也就是基于传统整数阶变分偏微分方程的图像修复方法。

1.2.1.3 CT 金属伪影去除的国内外现状研究

CT 金属伪影的去除可以使用硬件和软件两类方法。硬件方法包括 Robertson 等^[104]提出的增强射线的强度以及 Ebraheim 等^[105]提出的使用钛作为体内植入物的材质两个方向，但是这两种方法在临床应用中存在一些困难，提高射线强度将缩短 CT 设备的寿命，并且对病人身体的损害也会加剧，而植入物的材质还受成本以及受体反应的影响。

当前金属伪影去除的方法主要集中在软件方面的研究，而该方法可以分为两类。

一类是基于迭代重建的方法，其基本思想是：首先假设一个初始图像，然后进行迭代重建，将每一次迭代得到的结果与实际测量得到的结果进行比较，并按照某种测度进行衡量，进而对图像进行校正，随后继续迭代，对最后的真实图像进行逼近。最早的迭代重建算法是由 Gordon 等^[126]于 20 世纪

70 年代提出的代数重建法 (Algebraic Reconstruction Technique, ART) 以及由 Gilbert^[127] 提出的联合代数迭代重建法 (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique, SIRT)。代数重建算法在迭代过程中, 每次投影计算的修正值并不是完全相同的, 穿过同一像素网格时, 图像的模糊误差修正将会引起重建区域的严重噪声, 且算法需要较多的迭代次数才能得到较好的重建结果, 重建效率不高。针对这些问题, Anderson 和 Kak^[128] 于 1984 年提出了联合代数重建算法。该算法对于每个像素是同一投影角度内通过该像素的所有射线误差值之累加, 其实质就是对 ART 中的噪声进行了平滑, 因此可以获得较为理想的重建结果。Lange 和 Carson^[129] 将数学中研究极大似然估计的最大期望方法 (Expectation Maximization, EM) 扩展到医学 CT 图像的重建算法当中。由最大期望的方法来求与测量投影数据具有最大似然 (Maximization Likelihood, ML) 的估计解^[130], 但是这种基于迭代的方法计算效率比较低。为了提高运算速度, 很多快速迭代的算法被提了出来, 其中基于块的有序子集最大期望 (Ordered Subset Expectation Maximization, OSEM)^[131] 的方法的效果比较明显, 但是这类方法的本质都是基于迭代求解线性方程组的近似解, 其算法效率还是比较低, 实际临床应用中还是极少使用。

另一类是基于投影插值的方法, 其主要思想: 首先用图像分割的方法对含金属伪影的医学 CT 图像进行分割, 将金属区域分割出来, 然后同时将金属部分以及含金属伪影的医学 CT 图像进行 Radon 变换, 分别得到对应的投影数据, 也就是常说的弦空间或者弦图, 随后在原图中标记金属部分对应的区域, 再去掉这个区域的伪数据之后, 使用图像插值的方法对破损的弦图进行插值, 得到结果之后再滤波反投影 (Filtered Back Projection, FBP), 最后将先前分割得到金属部分再重新加入到处理后的图像当中。通过这个过程, 可以看出这类算法的核心思想主要集中在金属部分的分割以及对破损弦图的修复, 很多学者就这两个方向进行了深入的研究。Kalender 等^[106] 对人工手动分割后的图像得到的破损弦图进行了线性插值, Crawford 等^[107] 在此基础上增加了一些辅助操作。Lewitt 和 Bates^[108] 使用了 Chebyshev 多项式进行插值, 林宙辰和石青云^[109] 提出使用四次多项式进行插值。Glover 和 Plec^[110] 利用了金属区域投影数据周围的几何信息进行多项式插值。针对线性插值视觉效果较差以及会产生附加效果两个缺点, Zhao 等^[111] 提出了在进行线性插值之后, 将原始数据以及插值之后的数据变换到小波域, 对这两种数据进行加权合成, 再进行反变换, 得到最后的投影数据。Hsieh^[112] 提出根据 CT 投影数据中的噪声的局部统计特征设计一个自适应的前置滤波器, 以达到平衡金属伪影与空间解析率的目的。由于 Kalender 等的算法无法得到骨骼和软组织的准确边缘, Wei 等^[113] 提出使用阈值法得到边缘部分, 再使用二次多项式进行插值。Watzke 和 Kalender^[114] 使用多维自适应滤波器对图像进行滤波, 同时对投影数据进行线性插值, 最后将两种结果进行加权求和。Bal 和 Spies^[115] 采用类似的思想, 先使用高斯自适应滤波器去除图像中的噪声, 再使用 k 均值聚类算法对图像进行分割, 最后使用插值的方法进行修复。Prell 等^[116] 根据 FD-CT 的特点, 首先对原始数据进行三维插值^[117], 然后使用阈值法将图像分为三类物质: 空气、软组织以及骨骼, 最后使用前向投影的方法对图像进行修复。Gu 等^[118] 通过计算含金属伪影的医学 CT 图像中相邻像素间的差分值来确定金属区域。马建华等^[119] 利用最大互信息熵差的方法对金属区域进行分割, 然后通过反馈式插值方法对投影

数据中的金属区域进行插值。与前面的方法不同, Veldkamp 等^[120] 使用马尔科夫随机场的方式在投影数据内对金属区域进行分割, 取得了良好的效果。Kim 等^[121] 通过构造相关邻域, 再使用相关邻域内的像素对需要修复的投影数据点进行线性插值或者多项式插值, 减小了单独使用这两种插值方法的误差。Gu 等^[122] 首次将数字图像修复中的基于整数阶偏微分方程的方法引入 CT 图像金属伪影的去除中, 使用了文献 [19] 的基于欧拉弹性曲率的模型进行投影数据的修复。基于相同的思想, Duan 等^[123] 将图像修复领域的经典算法全变分模型引入了 CT 图像金属伪影去除中。Xue 等^[124] 基于这种方式, 在弦图中使用经典的无边缘活动轮廓模型^[125] 进行金属区域的分割。

当前实际临床应用中, 为了保证处理速度, 主要还是采用线性插值的方法, 但是当需要插值的区域比较大时, 经典的插值方法难以达到理想的效果。由于插值与修复本质上具有一定的相似性, 所以一些学者已经对图像修复的方法在医学 CT 图像金属伪影去除中的应用进行了研究, 但是在修复结果的连续性上又不是特别理想, 而弦图的不连续将会直接导致其他伪影的出现。基于分数阶微积分进行信号处理时所展示出的特殊性质, 本书将对基于分数阶微积分的图像修复模型引入医学 CT 图像金属伪影当中给出了初步的研究结果, 希望能对同领域的研究有所启发, 并对以后的深入研究打下一定的基础。

1.2.2 分数阶微积分在工程中的应用

近三百年来, 分数阶微积分在数学分析领域中业已成为一个重要分支^[76-78], 但对于大多数工程技术界学者而言, 它还鲜为人知。Mandelbrot 提出分形学说, 将 Riemann-Liouville 分数阶微积分用以分析和研究分形媒介中的布朗运动后, 分数阶微积分才在许多学科的现代工程计算中, 特别在化学、电磁学、控制学、材料科学和力学中得到广泛关注和应用。一般而言, 欧氏测度下的分数阶微积分将整数阶微积分的整数步长推广到分数步长的结果, 数学上要求必须使用欧氏测度^[79]; 同时, 由于物理过程中的随机变量为粒子随机运动的位移, 所以, 在欧氏测度意义下, 原则上可以应用分数阶微积分来处理与分析物理状态与过程^[80]。函数的分数阶微积分具有两个明显的特征: 大多数函数的分数阶微积分是幂函数; 其他函数的分数阶微积分或者是某种函数与幂函数的迭加, 或者是某种函数与幂函数的乘积。这种规律性是否预示着某种自然界的变化规律呢? 目前, 科学研究已经证实, 许多分数阶、分数维的数学方法是目前人类对许多自然现象的最佳描述。欧氏测度下的分数阶微积分已经被用于扩散过程、黏弹性理论和随机分形动力学的研究, 但其绝大多数应用还仅仅停留在处理物理变化过程中的暂态, 而对系统的演化过程很少涉及^[81]。

近年来, 分数阶微积分逐渐进入信号处理以及图像处理的领域。Duits 等^[82] 提出了分数阶尺度空间的概念 (α 尺度空间), Didas 等^[83] 设计了分数高阶线性滤波器, Unser 和 Blu^[84] 将分数阶微分应用到小波以及样条函数中, 在文献 [85] 和 [86] 中, Liu 和 Chang 以及 Ninness 使用分数阶微分进行了噪声的检测和估计。Mathieu 等^[87] 构建了基于分数阶微分的边缘检测方法, 实验证明, 当 $1 < \nu < 2$ 时, 能够有效地提取图像的边缘, 而且当 $-1 < \nu < 1$ 时, 该算子对于噪声具有鲁棒性, 从而

证明了分数阶微分算子的鲁棒性和多尺度性两大特点。Bai 和 Feng^[88] 与 Guidotti 和 Lambers^[89] 分别对经典的各向异性扩散模型 (PM 模型) 进行了推广, 将模型中的梯度算子 ∇u 使用分数阶梯度算子 $\nabla^{\alpha} u$ 进行了替换, 并在频域内对得到的偏微分方程进行数值计算, 得到了更高的峰值信噪比, 在去噪的同时, 纹理细节得到了较好的保留。Pu 等通过对分数阶微积分的研究^[90-92], 将分数阶微积分的经典定义 Grmwald-Letnikov 定义引入到图像处理中, 构造出多尺度的微分掩模, 并成功地应用于图像增强^[93], 同时进一步构造出基于该定义的数字图像微分滤波器^[94-95], 得到了较为理想的处理结果。左凯等^[96] 建立了二维线性离散系统的分数阶差分状态空间, 给出了图像处理的二维分数阶卡尔曼滤波算法。Pu 和 Zhou^[97] 分析了分数阶微分算子的多尺度性, 构造了基于分数阶微分的图像分割算法。Hu 等^[98] 分析了 Riemann-Liouville 定义, 并构造了基于此定义的分滤波器。Gao 等^[99] 通过将分数阶微积分与四元素进行结合, 提出了一种全新的图像增强方法。张军和韦志辉^[100] 研究了经典的针对服从相干斑噪声的 AA 模型^[101], 发现其无法完整地保持纹理细节, 并且会出现阶梯效应, 针对这一情况, 使用分数阶微分与负指数 Sobolev 空间对 SAR 图像进行建模, 得到了良好的去噪效果。在文献 [102] 中, Zhang 和 Wei 利用 Grmwald-Letnikov 定义给出了分数阶的 BV 空间的定义, 并将图像的几何结构部分通过此空间进行建模, 而图像的纹理部分通过负指数 Sobolev 空间进行建模, 分析了分数阶微分算子及其对偶算子的性质, 最后给出了其对应的全变分模型。Liu 等^[103] 构造了分数阶的奇异值分解方法, 并将其应用到人脸识别。

1.3 主要研究内容

基于传统整数阶变分偏微分方程的图像处理已经成为一个独立的研究方向, 而分数阶微积分在信号处理, 特别是图像处理中的应用还处于起步阶段, 而分数阶微积分作为整数阶微积分的扩展, 具有一些特殊的性质, 而这些特点已经在学者们的前期研究中得到了一定程度的体现。本书首先构造了基于 Riemann-Liouville 定义的分数阶微分数值计算模板, 同时给出了对应的分数阶微分滤波器, 并将其应用于图像增强; 研究了基于分数阶偏微分框架下的全变分图像修复模型以及全变分小波修复模型, 并将其应用到了 CT 图像金属伪影的去除中。然后分析了传统全变分图像修复模型的缺点, 同时给出了另外一种基于曲率扩散的 CT 图像金属伪影去除方法, 并将这种方法扩展到了分数阶。最后由于基于迭代的偏微分方程的方法计算效率不是很高, 本书给出了一种非迭代的基于一致性传输的 CT 图像金属伪影去除方法。具体内容如下:

第一, 首先研究了分数阶微积分的基本理论, 介绍了几种分数阶定义涉及的特殊函数, 给出了几种常见的分数阶微积分的定义, 并阐述了几种定义之间的相互联系, 给出了分数阶微积分运算的几种规律; 然后介绍了偏微分方程的基本数值计算方法、变分法的基本概念以及泛函极值的必要条件; 最后对 CT 成像原理进行了介绍。

第二, 为了实现分数阶变分模型的有效数值计算, 研究了基于 Riemann-Liouville 定义的 1~2 阶