高职高专教育“十三五”规划教材

公共基础课系列

高等数学（上）

GAODENG SHUXUE

主编◎翟术风　徐　燕　柴富杰

电子科技大学出版社

高职高专教育“十三五”规划教材

公共基础课系列

高等数学（上）

GAODENG SHUXUE

主编◎翟术风　徐　燕　柴富杰

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上 / 翟术风，徐燕， 柴富杰主编. — 成都：电子科技大学出版社， 2017.5
ISBN 978-7-5647-4504-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①翟… ②徐… ③柴… Ⅲ. ①高等数学 – 高等职业教育 – 教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第109308号

高等数学（上）
翟术风 徐 燕 柴富杰 主编

策划编辑 张 鹏
责任编辑 张 鹏

出版发行 电子科技大学出版社
成都市一环路东一段159号电子信息产业大厦九楼 邮编 610051
主 页 www.uestcp.com.cn
服务电话 028-83203399
邮购电话 028-83201495

印 刷 北京荣玉印刷有限公司
成品尺寸 185mm × 260mm
印 张 10
字 数 231千字
版 次 2017 年 5 月第 1 版
印 次 2017 年 5 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5647-4504-2
定 价 36.00元

前　言

教育部关于加强高职高专的教学工作会议中,明确指出高职高专以培养技术应用型专门人才为根本任务。高等数学是高等职业技术院校理工类各专业必修的主要基础课,学生学好了高等数学,既为后续各专业课的学习准备了必需的数学知识,也发展了自己的智力,锻炼和提高了分析问题与解决问题的能力,这些均有利于提高技术应用人才的素质. 而教育离不开教材,因此,编写一本适合高职高专院校的《高等数学》教材是十分重要和非常必要的.

本书在"应用能力培养为主,理论够用为度"的思想指导下,充分注意语言简练和陈述通俗易懂,降低数学理论难度要求. 本书在编写过程中充分考虑到高职高专学生对高等数学的应用性问题,引入了 Matlab 数学软件算法,使这本《高等数学》具有很强的实用性.

全书由翟术风、徐燕、柴富杰任主编,具体分工如下:翟术风编写第一、二、三、四章,徐燕编写第五、六章,柴富杰编写第七、八章,由翟术风统稿.

由于编者水平有限,书中难免有不足之处,衷心希望得到专家、同行和读者的批评指正. 联系电话:010 - 57749959,邮箱:2033489814@ qq. com.

编　者

目录

Contents

第 1 章

函 数

§1.1 实数与数集

数是数学中最基本的概念之一,是构成数学这门学科的基本材料和出发点,实数是微积分的基本材料,是微积分中的数量,实数的连续性反映了可以无限精确性的度量过程.

1.1.1 实数及其性质

人类的祖先最早认识的数是自然数,伴随着人类文明的发展,数的范围不断扩展,当人们认识到有理数时,由于有理数具有稠密性,古希腊人曾设想它是与同一条直线上的点相对应的.但是这种关于数的连续性的设想,不久就被希腊人证明是完全错误的.大约公元前 500 年前后,古希腊的毕达哥拉斯学派发现了一个惊人的事实:用现在的语言讲,就是当正方形的边长是 1 时,其对角线的长竟然不是一个“数”(即不是一个有理数).这一事实在人们只认识有理数的当时,那就是一件天大的事情,尤其是它与毕达哥拉斯学派“万物皆为数”的哲理大相径庭,因此,它的发明引起了这个学派的恐慌和愤怒,传说发现这一事实的希泼索斯竟然遭到沉舟身死的惩罚,但是希泼索斯的发现第一次向人们揭示了有理数的缺陷,即它不是连续的,同时也使人们认识了这样的“无理的数”,还使得人们对于“数形结合”的愿望推迟了 1000 多年,直到实数系的构造成功.

简单地说,实数就是有理数和无理数的总和.

$$
\text{实数}\begin{cases}
\text{有理数}\begin{cases}
\text{正数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{正分数}\\ \text{零}\end{cases}\\
\text{负数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}
\end{cases}\\
\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数(如}\sqrt{2}\text{)}\\ \text{负无理数(如 }\pi\text{)}\end{cases}
\end{cases}
$$

通过现代集合论的创始者康托尔等人的努力,人们认识到对实数进行任意分割不会产生新数,说明实数本质上不同于有理数,它具有一种“完备”的性质,称之为实数的连续性,因此,全体实数称为实数集.

我们知道,利用数轴可以建立直线上的点同实数之间的一一对应关系,这一关系的建立,就将直线的连续性与实数的连续性统一起来.可见,实数集等价于整个数轴上点的集合.

1.1.2 数集与区间

以数为元素的集合称为数集,数集中含有有限个元素,则称为有限数集;若含有无限个元素,则称为无限数集.常见的数集有:自然数集(记为 $\mathbf{N}$),整数集(记为 $\mathbf{Z}$),有理数集(记为 $\mathbf{Q}$),实数集(记为 $\mathbf{Q}$).它们之间的关系如下:

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$$

任何一个实数集都对应数轴上的一部分连续点集,数学中称这样的点集为区间.区间是微积分中最常用的数集,一般分为有限区间和无限区间两类.

有限区间:若 a,b 为两个实数,且 $a<b$,则数集 $\{x|a<x<b\}=(a,b)$ 称为开区间;$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}=[a,b]$ 称为闭区间;$\{x|a\leqslant x<b\}=[a,b)$ 和 $\{x|a<x\leqslant b\}=(a,b]$ 称为半开半闭区间.

无限区间:引入记号 $+\infty$ 和 $-\infty$,则有 $\{x|x>a\}=(a,+\infty)$,$\{x|x<b\}=\{-\infty,b\}$ 等为无限区间.全体实数集 R 也可以表示为无限区间 $(-\infty,+\infty)$.

1.1.3 领域

在微积分中经常用到一种特殊的区间:以数 a 为中心,以可以任意小的正数 δ 为半径形成的特殊开区间 $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$,称为点 a 的 δ 领域,记作

$$U(a,\delta)=\{x|\alpha-\delta<x<\alpha+\delta\}.$$

这里 a 叫作该领域的中心,δ 叫作该领域的半径.

$\{x|0<|x-\alpha|<\delta\}$ 称为点 a 的去心领域,记作

$$\overset{o}{U}(a、b)=\{x|0<|x-\alpha|<\delta\}.$$

特别说明,当不需要特殊指明领域的半径时,点 a 的领域可表示为 $U(a)$,表示以 a 为中心的任意一个很小的开区间.

§1.2 函数概述

1.2.1 初等数学的应用案例

通过下面案例的学习,培养我们的设计能力,进一步掌握初等数学的应用性.

一位老太太有两儿子,她喜欢一个人生活,两儿子每人每年给母亲 400 斤稻谷.一天老大娘来到附近的一个小型工厂,要求帮她做一个能装 800 斤(400kg)稻谷的圆柱形铁

桶,师傅把此任务交给了刚从本科院校毕业的年青小伙子郭亮,郭亮考虑:如何设计这个铁桶?

解 (1)首先根据老大娘的身高确定铁桶的高,铁桶高不能超过老大娘的胸部,否则使用不安全,若铁桶做矮了占地方,也不好看. 因此郭亮同学首先想到人体高度的黄金分割数 0.618(一个人从脚到肚脐的高度与此人的身高之比为 0.618),郭亮量得老大娘身高 $1.62m$,于是,确定铁桶的高最少不低于老大娘身高的 0.618 倍,即 $0.618\times1.62(\mathrm{m})=1(\mathrm{m})$,而铁桶高最多不能超过老大娘的胸部 1.2m.

(2)要确定铁桶的容积,必须知道稻谷的比重,于是郭亮上网找,但是没有找着稻谷的比重,又翻阅了有关书籍也没有找到,怎么办呢? 后来郭亮想了一个办法,才知道稻谷比重为每立方米 725kg(请思考,郭亮想的是什么办法),于是得出:

$$400\div725=0.55(\mathrm{m}^3).$$

(3)由容积和高可以确定铁桶的底面半径 r:

若 $h=1m,\pi r^2\cdot1=0.55,r=0.42m$,

若 $h=1.1m,\pi r^2\cdot1.1=0.55,r=0.40m$,

若 $h=1.2m,\pi r^2\cdot1.2=0.55,r=0.38m$.

(4)若从节约材料出发,圆柱形的底面直径与高的比为 1:1 时,材料最省(以后学了导数就知道为什么),但是郭亮同学觉得底面直径太大,既不好看又占地方(为顾客着想).

最后郭亮同学确定铁桶的高和底面半径后,下料做好了铁桶送给老大娘,老大娘非常满意. 你认为铁桶的高和底面半径到底各定多少才最佳?

由此可知,一个简单的铁桶制作都要这样精心设计,那么一个机械设备的制作,设计那就更重要了. 可见,学好高等数学十分有用,函数是研究高等数学的重要工具,下面复习函数有关问题.

1.2.2 函数

1. 函数的定义

定义 1 设 D 是非空实数集合,如果对于 D 中的每一个 x,按照某个对应法则 f,都有确定的实数 y 与之对应,则称 y 是定义在 D 上面的函数,记作 $y=f(x)$.

2. 确定函数的定义域

(1)若 $x\in(-\infty,+\infty)$,$y=e^{\frac{1}{f(x)}}+1$,则 $y\in(1,+\infty)$(即分母不能为 0);

(2)若 $y=\sqrt[2k]{f(x)}$,则 $f(x)\geqslant0$(即开偶次方,被开方数大于或等于 0);

(3)若 $y=\log_a f(x)$,则 $f(x)>0$($a>0$ 且 $a\neq1$);

(4)若 $y=\arcsin f(x)$ 或 $y=\arccos f(x)$,则 $-1\leqslant f(x)\leqslant1$;

(5)分段函数的定义域是各个部分自变量取值的并集;

(6)由几项代数和构成的函数,其定义域是各项定义域的公共部分(交集).

例 1 填空

(1)$y=\sqrt{\lg\dfrac{x^2-3x+2}{2}}$的定义域是________;

(2) $y=\arcsin\ln\dfrac{x}{e}$的定义域是________.

解　(1) $\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{2}>0\\ \lg\dfrac{x^2-3x+2}{2}\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-3x+2>0\\ \dfrac{x^2-3x+2}{2}\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow x^2-3x+2\geqslant 2\Rightarrow x(x-3)\geqslant 0$,

解得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant 0$,即所求定义域为$(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$.

(2) 由 $-1\leqslant\ln\dfrac{x}{e}\leqslant 1$ 得 $-1\leqslant\ln x-\ln e\leqslant 2$,函数的定义域是$[1,e^2]$.

3. 函数的几种特性

(1)奇偶性

$$f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$$

定义 2　给定函数 $y=f(x)$,定义域 D 关于原点对称,

如果对于所有的 $x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数;

如果对于所有的 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数.

图像特征:奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

例 2　判断函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 的奇偶性.

解　定义域为$(-\infty,+\infty)$,

又,$f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$,有 $f(-x)+f(x)=0$,即 $f(-x)=-f(x)$

所以 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 是奇函数.

(2)单调性

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,对区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,若有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加;若有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少.

(3)有界性

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果存在一个正数 M,对于任意的 $x\in I$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是有界函数. 否则,称函数 $f(x)$ 是无界函数.

注意:通常讨论函数是否有界是相对于某个区间而言,如 $y=e^x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是无界的,在$(-\infty,0)$内却是有界的.

几个常见的在 **R** 内有界的函数:

$$|\sin f(x)|\leqslant 1;|\cos f(x)|\leqslant 1;0<\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1;-1\leqslant\frac{2x}{1+x^2}\leqslant 1.$$

(4)周期性

定义 5　对于函数 $y=f(x)$,如果存在正的常数 T,使得 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立,则称此函数为周期函数. 满足这个等式的最小正数 T,称为函数的最小正周期,简称周期.

三角函数都是周期函数,$y=\sin x$、$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期,$y=\tan x$、$y=\cot x$ 都是以

π 为周期,$y=A\sin(ax+\theta)$ 的周期是$\frac{2\pi}{a}$.

若函数 $f(x)$ 的周期 $T(T>0)$,则函数 $f(ax)(a>0)$ 的周期为$\frac{T}{a}$.

4. 基本初等函数

(1)常数函数 $y=C$(C 为实常数),定义域是全体实数.

(2)幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 为实常数),定义域根据具体的 μ 而定.

(3)指数函数 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$),其定义域为$(-\infty,+\infty)$,不论 x 为何值,总有 $a^x>0$,且 $a^0=1$,所以它的图形总是在 x 轴的上方,且通过点$(0,1)$,如图 1-1 所示.

当 $a>1$ 时,函数 $y=a^x$ 单调增加且无界;

当 $0<a<1$ 时,函数 $y=a^x$ 单调减少且无界.

以无理数 e=2.7182818…为底的指数函数 $y=e^x$ 是微积分中常用的指数函数.

(4)对数函数 $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$),如图 1-2 所示.

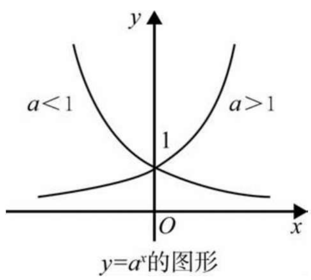

图 1-1

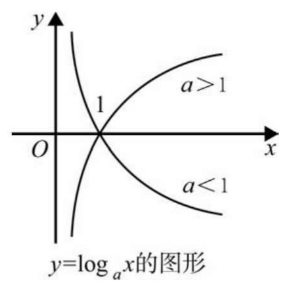

图 1-2

其定义域为$(0,+\infty)$,不论 a 为何值,对数曲线都通过点$(1,0)$.

当 $a>1$ 时,函数 $y=\log_a x$ 单调增加且无界;

当 $0<a<1$ 时,函数 $y=\log_a x$ 单调减少且无界.

以 10 为底的对数叫作常用对数,其函数简记为 $y=\lg x$;

以无理数 e 为底的对数叫作自然对数,其函数简记为 $y=\ln x$,它是微积分中常用的对数函数.

(5)三角函数

①正弦函数 $y=\sin x$,如图 1-3 所示.

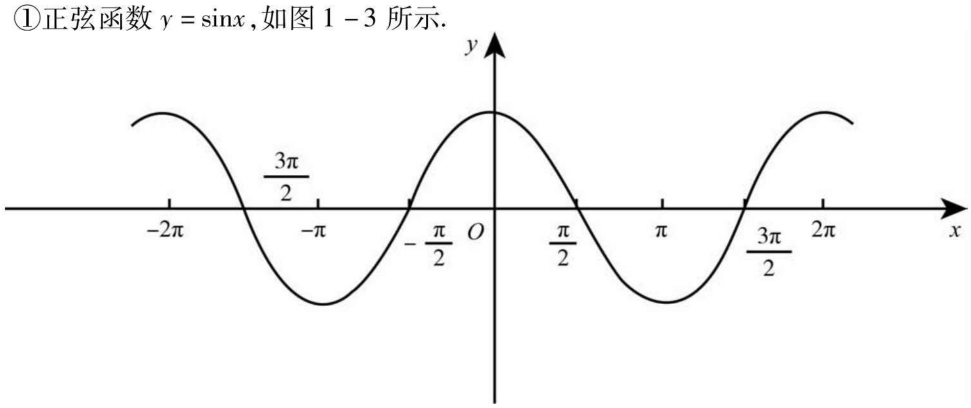

图 1-3

$y=\sin x$ 定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,是奇函数,是周期函数,周期为 2π. 因为$|\sin x|\leqslant 1$,所以 $y=\sin x$ 是有界函数.

②余弦函数 $y=\cos x$,如图 1-4 所示.

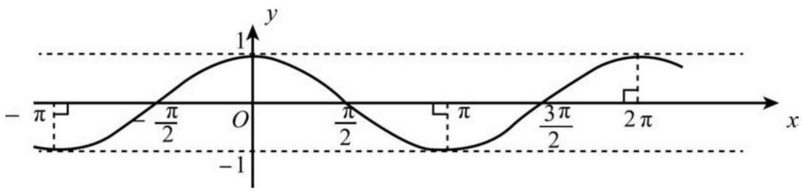

图 1-4

$y=\cos x$ 定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,是偶函数,是周期函数,周期为 2π. 因为$|\cos x|\leqslant 1$,所以 $y=\cos x$ 是有界函数.

③正切函数 $y=\tan x$,如图 1-5 所示.

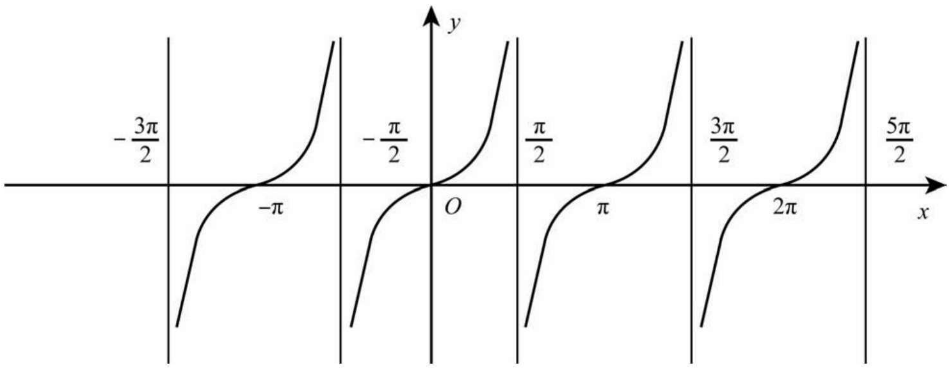

图 1-5

$y=\tan x$ 定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的一切实数,值域为$(-\infty,+\infty)$,是奇函数,是周期函数,周期为 π.

④余切函数 $y=\cot x$,如图 1-6 所示.

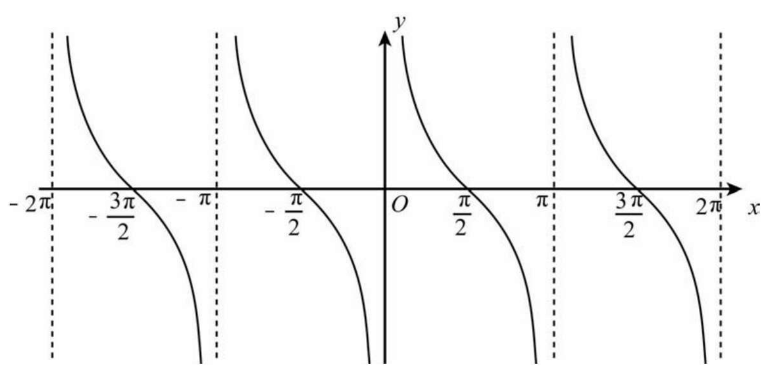

图 1-6

$y=\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的一切实数,值域为 $y\in(-\infty,+\infty)$,是奇函数,是周期函数,周期为 π.

⑤正割函数 $y=\sec x$(图略),正割函数是余弦函数的倒数 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$.

⑥余割函数 $y=\csc x$(图略),余割函数是正弦函数的倒数 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

(6)反三角函数

常见的反三角函数有以下四个.

①反正弦函数 $y=\arcsin x$,如图 1-7 所示,定义域为 $x\in[-1,1]$,值域为 $y\in[-\dfrac{\pi}{2}$、$\dfrac{\pi}{2}]$.

②反余弦函数 $y=\arccos x$,如图 1-8 所示,定义域为 $x\in[-1,1]$,值域为 $y\in[0,\pi]$.

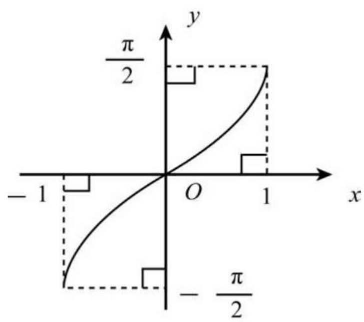

图 1-7

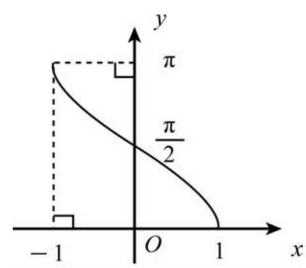

图 1-8

③反正切函数 $y=\arctan x$,如图 1-9 所示,定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$,值域为 $x\in(-\dfrac{\pi}{2}$、$\dfrac{\pi}{2})$.

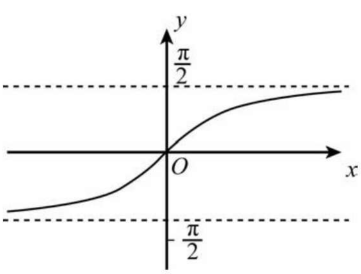

图 1-9

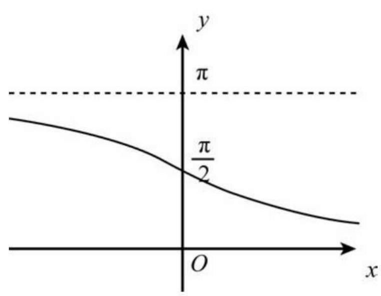

图 1-10

④反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$,如图 1-10 所示,定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$,值域为 $y\in(0,\pi)$.

基本初等函数的自变量可以换成任意的字母,但自变量出现的时候只能是一个字母,如 $y=\sin t$ 是基本初等函数,但 $y=\sin 2x$ 或 $y=\sin(1-x)$ 就不是基本初等函数了,而是复合函数.

5. 复合函数

定义 6 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$,若 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$,$D(f)\cap Z(\varphi)$

非空,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数,x 为自变量,y 为因变量,u 称为中间变量.

例 3 写出下列函数的复合过程及四则运算:

(1) $y=\mathrm{e}^{\mathrm{coe}^2 x}$; (2) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) $y=\mathrm{e}^u, u=v^2, v=\cos x$;

(2) $y=\ln u, u=x+\sqrt{v}, v=1+x^2$.

例 4 下列函数哪些是基本初等函数?哪些是复合函数?

(1) $y=\mathrm{e}^{-x}$; (2) $y=\mathrm{e}^{2x}$; (3) $y=\ln 2x$;

(4) $y=\dfrac{1}{1-X}$; (5) $Y=\sin 6x$; (6) $y=\arctan\dfrac{1}{x}$.

解 都是复合函数.

6. 初等函数

定义 7 由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次复合步骤所构成,并且可以用一个式子表示的函数叫作初等函数.

7. 分段函数

定义 8 函数定义域被分成若干个互不相交的部分,在不同的部分上,函数有着不同的对应规律,这样的函数称为分段函数.

例 5 $f(x)=\begin{cases}\sin x+1, x<0\\ 0, x=0\\ 2x-1, x>0\end{cases}$ 是分段函数,$x=0$ 称为“分段点”,其定义域是 $\mathbf{R}$.

例 6 符号函数 $y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$,是分段函数,分段点为 $x=0$,定义域是 $\mathbf{R}$.

分段函数大多不是初等函数,极少有例外,例如 $f(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$ 既是分段函数又是初等函数.

习题 1.2

1. 选择题

(1) 下列函数中属于偶函数的是( ).

A. $x^2\sin x$ B. $\dfrac{\sin x}{x}$

C. $\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$ D. $\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)$

(2) 下列函数中不是复合函数的是( ).

A. $y=\sqrt[3]{3x-1}\,(x\in Z^+)$ B. $y=(\dfrac{1}{3})^x$

C. $y=\sin(3x-1)$ D. $y=\ln^2 x$

(3) 函数 $y=2-\sin x$ 是(　　).

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 单调增加函数　　D. 有界函数

(4) 函数的 $f(x)=\begin{cases} x+2, & -2<x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^2+2, & 0<x\leqslant 2 \end{cases}$ 定义域是(　　).

A. $(-2,2)$　　B. $(-2,0)$

C. $(-2,2]$　　D. $(0,2]$

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{2-x}}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{x(x-1)}$;

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$;　　(4) $y=\sqrt{\ln\dfrac{5x-x^2}{4}}$.

3. 指出下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的.

(1) $y=\sin x^3$;　　(2) $y=\sqrt{\lg x}$;

(3) $y=\ln\tan\dfrac{1}{x^2}$;　　(4) $y=\sin^2(\ln x)$.

第 2 章

极限与连续

§2.1 极 限

引例 我们在小学就学过圆的面积公式，但不知它是怎么来的，学了微积分可有多种方法证明它，其中用极限来证明圆的面积公式 $A=\pi r^2$ 就是方法之一.

证明 如图 2－1 所示，圆内接正 n 边形的面积为 n 个三角形面积的和，由两边及夹角求三角形面积公式得，$\triangle OAB$ 面积 $=\frac{1}{2}r\cdot r\sin\frac{2\pi}{n}$，设圆内接正 n 边形的面积为 S_n，则

$$S_n=\frac{1}{2}r^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot n=\frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n} \tag{1}$$

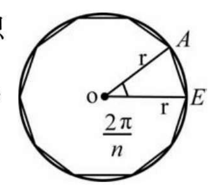

图 2－1

当边数 n 无限增大时，可记为 $n\to\infty$，则正 n 边形无限趋近于圆，即：

当 $n\to+\infty$ 时，(1) 式左边正 n 边形的面积 $s_n\to$圆的面积 A；当 $n\to+\infty$ 时，(1) 式右边 $\frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\to$?，当然趋于 πr^2，为什么？后面 §2.3 节详细介绍.

通过上面引例，我们对极限有一个大概印象，下面我们来讨论极限问题.

2.1.1 数列极限概念

例如，古代庄子说过："一尺之棰，日取其半，万世不竭."

解 第一天余下$\frac{1}{2}$，第二天余下$\frac{1}{2^2}$，…，第 n 天余下$\frac{1}{2^n}$，…，因此产生对应关系.

第 n 天：$1,2,3,\cdots,n,\cdots$，

余下：$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$，

当 n 无限增大时，a_n 无限接近于 0，可以记为 $n\to+\infty$，$a_n=\frac{1}{2^n}\to 0$，或记为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

读作"当 n 趋于正无穷大时，$a_n=\dfrac{1}{2^n}$的极限为 0". 一般有如下定义：

定义 1 设有数列$\{y_n\}$，若当 n 无限增大时，y_n 的值无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为数列$\{y_n\}$的极限，或说数列$\{y_n\}$收敛于 A，记作

$$\lim_{n\to\infty}y_n=A \text{ 或 } y_n\to A(n\to\infty).$$

若$\{y_n\}$不收敛，则称$\{y_n\}$发散，或说极限$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$不存在.

例如 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$； 2) $\lim\limits_{n\to\infty}2=2$； 3) $\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$ 不存在.

注 一个数列若收敛，极限值只有一个有限值，否则发散，即极限不存在.

例如$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$就不存在(因当 $n\to\infty$ 时，奇数项$\to-1$，偶数项$\to 0$，极限不唯一).

又如$\lim\limits_{n\to\infty}n^2$不存在(因当 $n\to\infty$ 时，极限不是有限数，而是无穷大).

2.1.2 函数的极限

1. x 趋于无穷大时 $f(x)$ 的极限

定义 2 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称 A 为当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

$x\to\infty$ 包括 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 两种情况，有下面的结论：

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不存在.

如当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\to 0$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，如图 2-2 所示；

另当 $x\to-\infty$ 时，也有$\dfrac{1}{x}\to 0$，即 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$，则有

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$，于是得$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

又如图 1-10 所示，由 $y=\arctan x$ 的图形所知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，则$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

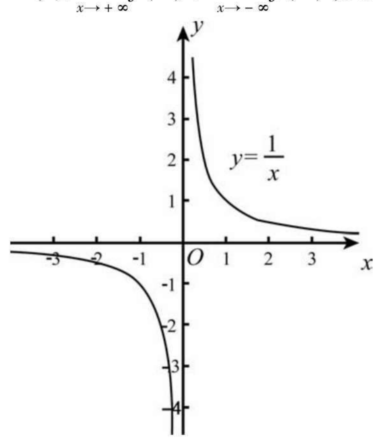

图 2-2

2. $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限

定义 3 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称 A 为当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

例 1 $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$($C$ 为一常数)，因 x 的目标是趋于 x_0，所以函数 $f(x)$ 的目标是趋于 C.