

高考调研

COLLEGE

entrance examination

research

2016

数
学

理科
· 版

★衡水重点中学★
新课标高考总复习

名不见经传的学校 普普通通的老师

连续十年重点 升学率 全国第一

却创造了一个 高考的神话

清华北大 人数占河北省总数的三分之一



衡水一座平凡的小城，
衡水一个高考的神话！

衡水市

河北出版传媒集团
河北少年儿童出版社

高考调研

COLLEGE

entrance examination

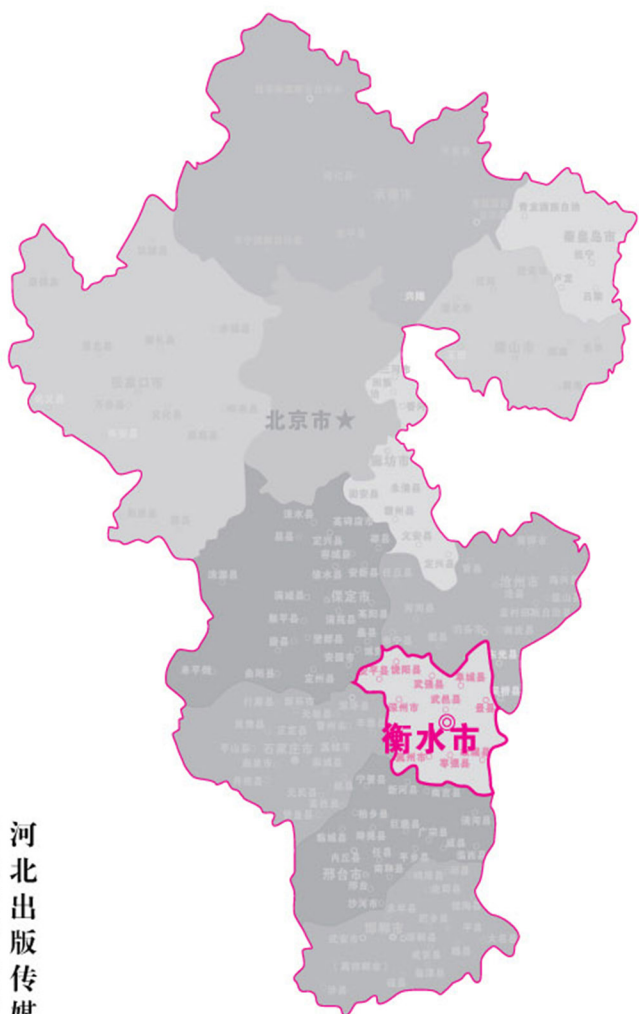
research

2019

★衡水重点中学★
新课标高考总复习

数学

理科
· 版



丛书主编：李书恒
本册主编：王发成 金顺利
副主编：曾敏

编委：金流成 常利忠 张东梅 于茸茸
王丽娜 马寒 张莉 马繁
边洁 郑文斌 李春芳 谢安富
李彩霞 白英 任宏满 许毅
高斯标 赵彦成 高嘉凌 贺院
高莹莹 刘丹 徐亚莉

河北出版传媒集团
河北少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

衡水重点中学高考总复习：新课标理科版. 数学 /
李书恒主编. — 石家庄：河北少年儿童出版社，2015.2
(高考调研)
ISBN 978-7-5376-7785-1

I. ①衡… II. ①李… III. ①中学数学课—高中—升
学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第034361号

衡水重点中学高考总复习·新课标理科版·数学

出版 河北出版传媒集团
河北少年儿童出版社
通信地址 石家庄市中华南大街172号 邮政编码 050051
网 址 www.hebcph.com
印刷 河间市华联印刷厂
发行 新华书店
开 本 880毫米×1230毫米 1/16
印 张 31.5
字 数 756千字
版 次 2015年2月第1版
印 次 2015年2月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5376-7785-1
定 价 89.50元

版权所有·翻版必究

目录

没有谁的青春，是在红毯上微笑着走过的；求学的路总是难免艰辛，高考就是赛场；每个人心中都有赢的梦想，选对方向才能成功。选择高考调研，相信品牌的力量！

温馨提示：本书包括课时学案、题组层级快练、单元测试卷、参考答案四部分。

第一章 集合与简易逻辑	1	第八章 立体几何	111
第1课时 集合	1	第1课时 空间几何体的结构、三视图、直观图	111
第2课时 命题及其关系、充要条件	3	第2课时 空间几何体的表面积、体积	114
第3课时 逻辑联结词与量词	5	第3课时 空间点、线、面间位置关系	118
第二章 函数与基本初等函数	8	第4课时 直线、平面平行的判定及性质	121
第1课时 函数及其表示	8	第5课时 直线、平面垂直的判定及性质	124
第2课时 函数的定义域与值域	11	第6课时 空间向量及运算	127
第3课时 函数的单调性和最值	13	第7课时 空间向量的应用(一) 平行与垂直	129
第4课时 函数的奇偶性和周期性	17	第8课时 空间向量的应用(二) 空间的角与距离	131
第5课时 二次函数	20	第九章 解析几何	136
第6课时 指数函数	22	第1课时 直线方程	136
第7课时 对数函数	24	第2课时 两直线的位置关系	138
第8课时 幂函数及基本初等函数的应用	27	第3课时 圆的方程	140
第9课时 函数的图像	29	第4课时 直线与圆、圆与圆的位置关系	143
第10课时 函数与方程	32	第5课时 椭圆(一)	145
专题研究 函数模型及其应用	36	第6课时 椭圆(二)	148
第三章 导数及应用	38	第7课时 双曲线(一)	150
第1课时 变化率与导数	38	第8课时 双曲线(二)	153
第2课时 导数的应用(一)——单调性	40	第9课时 抛物线(一)	155
第3课时 导数的应用(二)——极值与最值	42	第10课时 抛物线(二)	157
专题研究 导数的综合运用	45	第11课时 直线与圆锥曲线的位置关系	159
第4课时 定积分与微积分基本定理	47	专题研究一 曲线与方程	161
第四章 三角函数	49	专题研究二 圆锥曲线中的最值与范围	162
第1课时 三角函数的基本概念	49	专题研究三 定值、定点与存在性问题	163
第2课时 同角三角函数的基本关系式及诱导公式	51	第十章 计数原理和概率	165
第3课时 两角和与差的三角函数	53	第1课时 两个计数原理	165
第4课时 简单的三角恒等变换	56	第2课时 排列与组合	167
第5课时 三角函数的图像	58	专题研究 排列组合的综合应用	169
第6课时 三角函数的性质	61	第3课时 二项式定理	171
专题研究 三角函数的值域与最值	63	第4课时 随机事件的概率	173
第7课时 正余弦定理	65	第5课时 古典概型	176
专题研究 正、余弦定理应用举例	67	第6课时 几何概型	179
第五章 平面向量与复数	69	第7课时 离散型随机变量及分布列	181
第1课时 向量的概念及线性运算	69	第8课时 二项分布及应用	184
第2课时 平面向量基本定理及坐标运算	72	第9课时 随机变量的期望与方差	187
第3课时 平面向量的数量积	74	第10课时 正态分布	189
专题研究 平面向量的综合应用	77	第十一章 算法初步与统计	192
第4课时 复数	79	第1课时 算法与程序框图	192
第六章 数列	81	第2课时 随机抽样	197
第1课时 数列的基本概念	81	第3课时 用样本估计总体	200
第2课时 等差数列	83	第4课时 线性回归分析与统计案例	204
第3课时 等比数列	85	选考部分 选修系列4208	
专题研究一 数列的通项	87	选修4-1 几何证明选讲	208
专题研究二 数列的求和	88	第1课时 相似三角形的判定及有关性质	208
专题研究三 数列的综合应用	90	第2课时 圆	210
第七章 不等式及推理与证明	92	选修4-4 坐标系与参数方程	212
第1课时 不等式与不等关系	92	第1课时 坐标系	212
第2课时 一元二次不等式的解法	94	第2课时 参数方程	215
专题研究 一元二次方程根的分布	96	选修4-5 不等式选讲	217
第3课时 二元一次不等式(组)的解与简单的线性规划	97	第1课时 绝对值不等式	217
第4课时 基本不等式	100	第2课时 不等式的证明与柯西不等式	219
第5课时 合情推理与演绎推理	103		
第6课时 直接证明与间接证明	105		
专题研究 数学归纳法	109		

目录

没有谁的青春，是在红毯上微笑着走过的，求学的路总是难免艰辛，高考就是赛场；每个人心中都有赢的梦想，选对方向才能成功。选择高考调研，相信品牌的力量！

附：

题组层级快练 (一)	221	题组层级快练 (五十四)	327
题组层级快练 (二)	223	题组层级快练 (五十五)	329
题组层级快练 (三)	225	题组层级快练 (五十六)	331
题组层级快练 (四)	227	题组层级快练 (五十七)	333
题组层级快练 (五)	229	题组层级快练 (五十八)	335
题组层级快练 (六)	231	题组层级快练 (五十九)	337
题组层级快练 (七)	233	题组层级快练 (六十)	339
题组层级快练 (八)	235	题组层级快练 (六十一)	341
题组层级快练 (九)	237	题组层级快练 (六十二)	343
题组层级快练 (十)	239	题组层级快练 (六十三)	345
题组层级快练 (十一)	241	题组层级快练 (六十四)	347
题组层级快练 (十二)	243	题组层级快练 (六十五)	349
题组层级快练 (十三)	245	题组层级快练 (六十六)	351
题组层级快练 (十四)	247	题组层级快练 (六十七)	353
题组层级快练 (十五)	249	题组层级快练 (六十八)	355
题组层级快练 (十六)	251	题组层级快练 (六十九)	357
题组层级快练 (十七)	253	题组层级快练 (七十)	359
题组层级快练 (十八)	255	题组层级快练 (七十一)	361
题组层级快练 (十九)	257	题组层级快练 (七十二)	363
题组层级快练 (二十)	259	题组层级快练 (七十三)	365
题组层级快练 (二十一)	261	题组层级快练 (七十四)	367
题组层级快练 (二十二)	263	题组层级快练 (七十五)	369
题组层级快练 (二十三)	265	题组层级快练 (七十六)	371
题组层级快练 (二十四)	267	题组层级快练 (七十七)	373
题组层级快练 (二十五)	269	题组层级快练 (七十八)	375
题组层级快练 (二十六)	271	题组层级快练 (七十九)	377
题组层级快练 (二十七)	273	题组层级快练 (八十)	379
题组层级快练 (二十八)	275	题组层级快练 (八十一)	381
题组层级快练 (二十九)	277	题组层级快练 (八十二)	383
题组层级快练 (三十)	279	题组层级快练 (八十三)	385
题组层级快练 (三十一)	281	题组层级快练 (八十四)	387
题组层级快练 (三十二)	283	题组层级快练 (八十五)	389
题组层级快练 (三十三)	285	题组层级快练 (八十六)	391
题组层级快练 (三十四)	287	题组层级快练 (八十七)	393
题组层级快练 (三十五)	289	题组层级快练 (八十八)	395
题组层级快练 (三十六)	291	题组层级快练 (八十九)	397
题组层级快练 (三十七)	293	题组层级快练 (九十)	399
题组层级快练 (三十八)	295	题组层级快练 (九十一)	401
题组层级快练 (三十九)	297	题组层级快练 (九十二)	403
题组层级快练 (四十)	299	题组层级快练 (九十三)	404
题组层级快练 (四十一)	301	第一章 单元测试卷	405
题组层级快练 (四十二)	303	第二章 单元测试卷	409
题组层级快练 (四十三)	305	第三章 单元测试卷	413
题组层级快练 (四十四)	307	第四章 单元测试卷	417
题组层级快练 (四十五)	309	第五章 单元测试卷	421
题组层级快练 (四十六)	311	第六章 单元测试卷	425
题组层级快练 (四十七)	313	第七章 单元测试卷	429
题组层级快练 (四十八)	315	第八章 单元测试卷	433
题组层级快练 (四十九)	317	第九章 单元测试卷	437
题组层级快练 (五十)	319	第十章 单元测试卷	441
题组层级快练 (五十一)	321	第十一章 单元测试卷	445
题组层级快练 (五十二)	323	选修系列 4 综合测试卷	449
题组层级快练 (五十三)	325	参考答案	453

第1课时 集合

课|前|自|助|餐

回归教材

1. 集合的基本概念

- (1)集合的概念: _____;
(2)集合中元素的三个特性: _____;
(3)集合的三种表示方法: _____.

2. 集合的运算

- (1)子集:若 _____,则 $A \subseteq B$;
真子集:若 $A \subseteq B$,且 _____,则 $A \subsetneq B$;
 $\emptyset$ 是 _____集合的子集,是 _____集合的真子集;
(2)交集: $A \cap B =$ _____;
(3)并集: $A \cup B =$ _____;
(4)补集:若 U 为全集, $A \subseteq U$,则 $\complement_U A =$ _____.

3. 集合的常用运算性质

- (1) $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A =$ _____;
(2) $A \cup \emptyset = A$; $A \cup A =$ _____;
(3) $A \cap (\complement_U A) =$ _____; $A \cup (\complement_U A) =$ _____;
 $\complement_U (\complement_U A) =$ _____;
(4) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B =$ _____ $\Leftrightarrow A \cup B =$ _____;
(5) $\complement_U (A \cap B) =$ _____;
 $\complement_U (A \cup B) =$ _____;

(6)如图 1.1-1 所示,用集合 A, B 表示图中 I、II、III、IV 四个部分所表示的集合分别是 _____; _____; _____; _____.

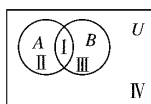


图 1.1-1

- (7) $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) -$ _____.

夯实双基

1. 判断下列说法是否正确(打“√”或“×”).

- (1)集合 $\{x \in \mathbf{N} | x^3 = x\}$, 用列举法表示为 $\{-1, 0, 1\}$.
(2)已知集合 $A = \{x | y = x^2\}$, $B = \{y | y = x^2\}$, $C = \{(x, y) | y = x^2\}$, 则 $A = B = C$.
(3)方程 $\sqrt{x-2015} + (y+2016)^2 = 0$ 的解集为 $\{2015, -2016\}$.
(4)若 $5 \in \{1, m+2, m^2+4\}$, 则 m 的取值集合为 $\{1, -1, 3\}$.
(5)若 $P \cap M = P \cap N = A$, 则 $A \subseteq M \cap N$.

2. (课本习题改编)已知 $A = \{x | x = 3k + 2, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x = 6m - 1, m \in \mathbf{Z}\}$, 用适当的符号填空: -4 _____ A ; -4 _____ B ; A _____ B .

3. (2014 · 北京理)已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x = 0\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ _____ ()

- A. $\{0\}$ B. $\{0, 1\}$
C. $\{0, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

4. (2015 · 皖南八校联考)已知集合 $P = \{x | x^2 - 4 < 0\}$, $Q = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 $P \cap Q =$ _____ ()

- A. $\{-1, 1\}$ B. $[-1, 1]$
C. $\{-1, -3, 1, 3\}$ D. $\{-3, 3\}$

5. (2014 · 辽宁)已知全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | x \leq 0\}$, $B = \{x | x \geq 1\}$, 则集合 $\complement_U (A \cup B) =$ _____ ()

- A. $\{x | x \geq 0\}$ B. $\{x | x \leq 1\}$
C. $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ D. $\{x | 0 < x < 1\}$

授|人|以|渔

题型一 集合的基本概念

例 1 (1)已知集合 $A = \{x | x = \frac{2n+1}{3}, n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x = \frac{2n}{3} + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, 则集合 A 与 B 的关系是 _____.

(2)(2015 · 衡水调研卷)设集合 $M = \{y | y = 2\sin x, x \in [-5, 5]\}$, $N = \{x | y = \log_2(x-1)\}$, 则 $M \cap N =$ _____ ()
A. $\{x | 1 < x \leq 5\}$ B. $\{x | -1 < x \leq 0\}$
C. $\{x | -2 \leq x \leq 0\}$ D. $\{x | 1 < x \leq 2\}$

(3)已知集合 $A = \{a + 2016, a^2 - 2015a + 2016, 2015\}$, 且 $2016 \in A$, 则实数 a 的取值集合为 _____.

[听课记录] _____

探究 1 由本例讲透集合的基础知识:

(1)由例(1)讲清:列举法与描述法及它们之间的相互转换.

通过此题使学生深刻理解元素与集合,集合与集合之

间的关系,并共同总结此类题的解法.

(2)例(2)的难点是对集合 M, N 的识别: M 是函数 $y = 2\sin x$ 的值域, N 是函数 $y = \log_2(x-1)$ 的定义域.

(3)由例(3)深刻理解集合中元素的互异性的应用.



思考题 1 (1)给出以下三个命题:

① $\{(x, y) | x=1 \text{ 或 } y=2\} = \{1, 2\}$;

② $\{x | x=3k+1, k \in \mathbf{Z}\} = \{x | x=3k-2, k \in \mathbf{Z}\}$;

③由英文单词“apple”中的所有字母组成的集合有 15 个真子集.

其中正确的命题是_____.

(2)设 $2016 \in \{x, \sqrt{x^2}, x^2\}$, 则满足条件的所有 x 组成的集合的真子集的个数为_____.

题型二 集合的基本关系

例 2 (1)已知集合 $A = \{1, 3, \sqrt{m}\}$, $B = \{1, m\}$, $A \cup B = A$, 则 $m =$ _____ ()

A. 0 或 $\sqrt{3}$

B. 0 或 3

C. 1 或 $\sqrt{3}$

D. 1 或 3

(2)设 $A = \{x | x^2 - 8x + 15 = 0\}$, $B = \{x | ax - 1 = 0\}$.

①若 $a = \frac{1}{5}$, 试判定集合 A 与 B 的关系;

②若 $B \subseteq A$, 求实数 a 组成的集合 C .

[听课记录] _____

探究 2 (1)判断两集合的关系常有两种方法:一是化简集合,从表达式中寻找两集合间的关系;二是用列举法表示各集合,从元素中寻找关系.

(2)已知两集合间的关系求参数时,关键是将两集合间的关系转化为元素间的关系,进而转化为参数满足的关系.解决这类问题常常是合理利用数轴、Venn 图来帮助分析.

(3) B 为 A 的子集,不要漏掉 $B = \emptyset$ 时的情况.



思考题 2 (1)已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | 0 < x < 5, x \in \mathbf{N}\}$, 则满足条件 $A \subseteq C \subseteq B$ 的集合 C 的个数为 _____ ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

(2)设 $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$,

①若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的值;

②若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的值.

题型三 集合的基本运算

例 3 (1)(2014·大纲全国理改编)设集合 $M = \{x | x^2 - 3x - 4 < 0\}$, $N = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$, 则 $M \cap (\complement_{\mathbf{R}} N) =$ _____ ()

A. $(0, 4]$

B. $[0, 4)$

C. $[-1, 0)$

D. $(-1, 0)$

(2)(2015·上海四区联考)全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} | x^2 - 2x \leq 0\}$, $B = \{y | y = \cos x, x \in \mathbf{R}\}$, 则如图 1.1-2 中阴影部分表示的集合为_____.

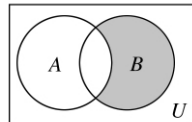


图 1.1-2

(3)若 A, B, C 为三个集合,且 $A \cup B = B \cap C$, 则一定有 _____ ()

A. $A \subseteq C$

B. $C \subseteq A$

C. $A \neq C$

D. $A = \emptyset$

[听课记录] _____

探究 3 (1)高考对集合的考查,多是考查具体集合(给出或可以求出集合的具体元素)的交、并、补运算,如 2014 年的 19 份高考卷中有 13 份是此类题,预测明年对于集合的考查仍以此类题为主.

(2)例 3(3)是考查抽象集合(没有给出具体元素的集合)间的关系判断和运算的问题.解决此类问题的途径有二:

一是利用特例法将抽象集合具体化;

二是利用韦恩图化抽象为直观.



思考题 3 (1)(2014·江西文)设全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 9 < 0\}$, $B = \{x | -1 < x \leq 5\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$ _____ ()

A. $(-3, 0)$

B. $(-3, -1)$

C. $(-3, -1]$

D. $(-3, 3)$

(2)(2015·福州模拟)已知集合 $A = \{3, a^2\}$, $B = \{0, b, 1-a\}$, 且 $A \cap B = \{1\}$, 则 $A \cup B =$ _____ ()

A. $\{0, 1, 3\}$

B. $\{1, 2, 4\}$

C. $\{0, 1, 2, 3\}$

D. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

(3)(2015·郑州质检)已知 M, N 为集合 I 的非空真子集,且 M, N 不相等,若 $N \cap (\complement_I M) = \emptyset$, 则 $M \cup N =$ _____ ()

A. M

B. N

C. I

D. $\emptyset$



[本课总结]

1. 通过例 1~例 3 的讲解使学生对集合的表示及子、交、并、补运算等基础知识再一次巩固并系统化,体现本书:以“基础知识”为根本、以“通性通法”为重点的宗旨.

2. 通过例 3 树立学生“数形结合”的思想意识:

①在深刻理解集合的交、并、补概念的基础上,用韦恩图解有关集合问题,可化难为易.

②两个集合都是不等式的解集时,求它们的交、并、补通常用数轴直观显示,但要注意区间的开与闭.

3. 注意五个等价关系式.

$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow \complement_U A \supseteq \complement_U B \Leftrightarrow A \cap \complement_U B = \emptyset$.

1. 设 $M = \{x | x \leq 2^{11}\}$, $a = 2\ 016$, 则下列关系中正确的是 ()
- A. $a \subseteq M$ B. $a \notin M$
C. $\{a\} \notin M$ D. $\{a\} \subseteq M$
2. 设 $f: x \rightarrow x^2$ 是集合 A 到集合 B 的映射, 如果 $B = \{1, 2\}$, 那么 $A \cap B$ 等于 ()
- A. $\emptyset$ B. $\{1\}$
C. $\emptyset$ 或 $\{2\}$ D. $\emptyset$ 或 $\{1\}$
3. 设全集 $U = \mathbf{Z}$, 集合 $P = \{x | x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$, $Q = \{x | x = 4m, m \in \mathbf{Z}\}$, 则 U 等于 ()
- A. $P \cup Q$ B. $(\complement_U P) \cup Q$

- C. $P \cup (\complement_U Q)$ D. $(\complement_U P) \cup (\complement_U Q)$
4. 若 $P = \{x | x < 1\}$, $Q = \{x | x > -1\}$, 则 ()
- A. $P \subseteq Q$ B. $Q \subseteq P$
C. $\complement_{\mathbf{R}} P \subseteq Q$ D. $Q \subseteq \complement_{\mathbf{R}} P$
5. (2014 · 重庆理) 设全集 $U = \{n \in \mathbf{N} | 1 \leq n \leq 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B =$ _____.
6. 设全集为 U , 在下列条件中, 是 $B \subseteq A$ 的充要条件的有 _____.
- ① $A \cup B = A$; ② $(\complement_U A) \cap B = \emptyset$;
③ $\complement_U A \subseteq \complement_U B$; ④ $A \cup (\complement_U B) = U$.

集合中的创新性问题

在知识交汇点处命题的信息迁移题是近几年(以及明年)高考中的热点题型, 解决此类问题, 既要有扎实的基本功, 又要有创新意识, 要迅速阅读理解题意准确把握新的信息, 敢于下笔计算.

例 1 设有限集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 则 $\sum_{i=1}^n a_i$ 叫做集合 A 的和, 记作 S_A . 若集合 $P = \{x | x = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*, n \leq 4\}$, 集合 P 的含有 3 个元素的全子集分别为 $P_1, P_2, \dots, P_k$, 则 $\sum_{i=1}^k S_{P_i} =$ _____.

解析 由题意知集合 $P = \{1, 3, 5, 7\}$, 其三元素子集为: $\{1, 3, 5\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}$, 故 $\sum_{i=1}^k S_{P_i} = 3(1 + 3 + 5 + 7) = 48$.

答案 48

例 2 (2015 · 《高考调研》原创题) 在平面直角坐标系 xOy 中, Ω 是一个平面点集, 若存在非零平面向量 $\mathbf{a}$, 对于任意 $P \in \Omega$, 均有 $Q \in \Omega$, 使得 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \mathbf{a}$, 则称 $\mathbf{a}$ 为平面点集 Ω 的一个向量周期. 现有以下四个命题:

① 若平面点集 Ω 存在向量周期 $\mathbf{a}$, 则 $k\mathbf{a}$ ($k \in \mathbf{Z}, k \neq 0$) 也是 Ω 的向量周期;

② 若平面点集 Ω 形成的平面图形的面积是一个非零常数, 则 Ω 不存向量周期;

③ 若平面点集 $\Omega = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$, 则 $\mathbf{b} = (1, 2)$ 为

Ω 的一个向量周期;

④ 若平面点集 $\Omega = \{(x, y) | [y] - [x] = 0\}$ ($[m]$ 表示不大于 m 的最大整数), 则 $\mathbf{c} = (1, 1)$ 为 Ω 的一个向量周期.

其中真命题是 _____. (写出所有真命题的序号)

解析 对于①, 取 $\Omega = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$, $\mathbf{a} = (1, 0)$, 则 $\mathbf{a}$ 为 Ω 的向量周期, 但 $-\mathbf{a} = (-1, 0)$ 不是 Ω 的向量周期, 故①是假命题;

易知②是真命题;

对于③, 任取点 $P(x_p, y_p) \in \Omega$, 则存在点 $Q(x_p + 1, y_p + 2) \in \Omega$, 所以 $\mathbf{b}$ 是 Ω 的一个向量周期, 故③是真命题;

对于④, 任取点 $P(x_p, y_p) \in \Omega$, 则 $[y_p] - [x_p] = 0$, 存在点 $Q(x_p + 1, y_p + 1)$, 所以 $[y_p + 1] - [x_p + 1] = [y_p] + 1 - ([x_p] + 1) = 0$, 所以 $Q \in \Omega$, 所以 $\mathbf{c}$ 是 Ω 的一个向量周期. 故④是真命题.

综上, 真命题为②③④.

答案 ②③④

讲评 破解此类问题的突破口是: ①能读懂新定义的意义, 如本题, 读懂新定义的向量周期的意义, 并将其运用到新的情境中; ②区分点集与数集, 适时运用数形结合思想, 通过画草图, 举反例, 排除假命题的选项.



检验能力的提高 · 见证水平的攀升
完成题组层级快练 (一)

第 2 课时 命题及其关系、充要条件

回归教材

1. 命题

用语言、符号或式子表达的, 可以 _____ 的陈述句叫做命题.

2. 四种命题及其关系

(1) 原命题为“若 p 则 q ”, 则它的逆命题为 _____; 否

命题为 _____; 逆否命题为 _____.

(2) 原命题与它的 _____ 等价; 逆命题与它的 _____ 等价.

3. 充分条件与必要条件

(1) 若 _____, 则 p 是 q 的充分非必要条件.

(2) 若 _____, 则 p 是 q 的必要非充分条件.

(3) 若 _____, 则 p 是 q 的充要条件.

(4)若_____,则 p 是 q 的非充分非必要条件.

夯实双基

1. 判断下列说法是否正确(打“√”或“×”).

- (1)语句“ $2a+1>0$ ”是命题.
- (2)语句“ $2\ 016\geq 2\ 015$ ”是真命题.
- (3)命题“三角形的内角和是 180° ”的否命题是“三角形的内角和不是 180° ”.
- (4)已知集合 A, B , 则 $A\cup B=A\cap B$ 的充要条件是 $A=B$.
- (5) p 是 q 的充分不必要条件等价于 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件.

2. (课本改编题)命题“若 $a<0$, 则一元二次方程 $x^2+x+a=0$ 有实根”与其逆命题、否命题、逆否命题中真命题的个数是 ()

A. 0

B. 2

C. 4

D. 不确定

3. “ $a>0$ ”是“ $|a|>0$ ”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. (2014·安徽理)“ $x<0$ ”是“ $\ln(x+1)<0$ ”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 写出下列命题的否定形式和否命题:

(1)若 $xy=0$, 则 x, y 中至少有一个为零;

(2)若 $a+b=0$, 则 a, b 中最多有一个大于零;

(3)若四边形是平行四边形, 则其相邻两个内角相等;

(4)有理数都能写成分数.

授人以渔

题型一 四种命题及其真假的判定

例1 分别写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题, 并判断它们的真假.

- (1)面积相等的两个三角形是全等三角形;
- (2)若 $q<1$, 则方程 $x^2+2x+q=0$ 有实根;
- (3)若 $x^2+y^2=0$, 则实数 x, y 全为零.

[听课记录]

探究2 判定充要条件应注意:

- (1)弄清条件 p 和结论 q 分别是什么?
- (2)尝试 $p\Rightarrow q, q\Rightarrow p$.
- (3)一定要熟悉命题内容涉及到的知识.



思考题2 判断下列各题中 p 是 q 的什么条件?

(1) $p: x^2-2x-3\geq 0, q: x\leq 1$ 或 $x\geq 2$;

(2)在 $\triangle ABC$ 中, $p: \angle A\neq 60^\circ, q: \sin A\neq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

(3)在 $\triangle ABC$ 中, $p: \angle A=\angle B, q: \sin A=\sin B$;

(4)非空集合 A, B 中, $p: x\in A\cup B, q: x\in B$;

(5)对于实数 $x, y, p: x+y\neq 8, q: x\neq 2$ 或 $y\neq 6$.

探究1 (1)此类题应先把原命题改写成“若 p , 则 q ”的形式, 然后再写出其他命题. 对于含有大前提的命题, 在改写命题形式时, 大前提不要动.

(2)若说明命题为真, 必须证明. 若说明为假, 只需举出一个反例即可.

(3)否命题是难点, 注意量词和逻辑联结词.



思考题1 以下命题:

①“若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(-x)$ 也是奇函数”的逆命题;

②“若 x, y 是偶数, 则 $x+y$ 也是偶数”的否命题;

③“正三角形的三个内角均为 60° ”的否命题;

④“若 $a+b+c=3$, 则 $a^2+b^2+c^2\geq 3$ ”的逆否命题.

其中真命题的序号是_____.

题型二 充要条件的判定

例2 判断下列各题中, p 是 q 的什么条件?

(1) $p: a>b, q: a>b-1$;

(2) $p: a>b, q: \lg a>\lg b$;

(3) $p: a>b, q: 2^a>2^b$;

(4) $p: a>b, q: a^2>b^2$.

[听课记录]

题型三 充分条件与必要条件的应用

例3 已知 $p: -2\leq x\leq 10, q: x^2-2x+1-m^2\leq 0(m>0)$, 且 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件, 求实数 m 的取值范围.

[听课记录]

探究3 (1)充要条件可以融入 to 数学各个分支题型灵活多变, 但万变不离其宗, 只要紧扣定义, 结合其他知识, 便

可迎刃而解.

(2)本例涉及参数问题,直接解决较为困难,先用等价转化思想,将复杂、生疏的问题化归为简单、熟悉的问题来解决.一般地,在涉及字母参数的取值范围的充要关系问题中,常常要利用集合的包含、相等关系来考虑,这是破解此类问题的关键.



思考题 3 (1)(2015·延安质检)函数 $f(x) =$

$$\begin{cases} \log_2 x, & x > 0, \\ -2^x + a, & x \leq 0 \end{cases} \text{ 有且只有一个零点的充分不必要条件是}$$

- ()
- A. $a < 0$ B. $0 < a < \frac{1}{2}$
- C. $\frac{1}{2} < a < 1$ D. $a \leq 0$ 或 $a > 1$

(2)已知 $p: \frac{1}{2} \leq x \leq 1, q: (x-a)(x-a-1) > 0$, 若 p 是 $\neg q$ 的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围是_____.



【本课总结】

1. 命题真假的判断.

(1)对于一些简单命题,若判断其为真命题需推理证明.若判断其为假命题只需举出一个反例.

(2)对于复合命题的真假判断应利用真值表.

(3)也可以利用“互为逆否命题”的等价性,判断其逆否命题的真假.

2. 充分、必要条件的判定方法.

(1)定义法.

(2)传递法.

(3)集合法:若 p 以集合 A 的形式出现, q 以集合 B 的形式出现,即 $A = \{x | p(x)\}, B = \{x | q(x)\}$, 则

①若 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 的充分条件;

②若 $B \subseteq A$, 则 p 是 q 的必要条件;

③若 $A = B$, 则 p 是 q 的充要条件.

(4)等价命题法:利用原命题和逆否命题是等价的这个结论,有时可以准确快捷地得出结果,是反证法的理论基础.

自助餐

1. (2014·陕西理)原命题为“若 z_1, z_2 互为共轭复数, 则 $|z_1| = |z_2|$ ”, 关于其逆命题, 否命题, 逆否命题真假性的判断依次如下, 正确的是 ()

- A. 真, 假, 真 B. 假, 假, 真
- C. 真, 真, 假 D. 假, 假, 假

2. 命题“若 $x^2 < 1$, 则 $-1 < x < 1$ ”的逆否命题是 ()

- A. 若 $x^2 \geq 1$, 则 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$
- B. 若 $-1 < x < 1$, 则 $x^2 < 1$
- C. 若 $x > 1$ 或 $x < -1$, 则 $x^2 > 1$
- D. 若 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$, 则 $x^2 \geq 1$

3. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 则“ $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ”是“ $x^2 + y^2 \geq 4$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 设命题 $p: x < -2\ 015$, 或 $x > 2\ 015$; 命题 $q: x < -2\ 016$, 或 $x > 2\ 016$, 则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. (2014·湖北理)设 U 为全集, A, B 是集合, 则“存在集合 C 使得 $A \subseteq C, B \subseteq \complement_U C$ ”是“ $A \cap B = \emptyset$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

温馨提示

检验能力的提高·见证水平的攀升

完成题组层级快练(二)

第3课时 逻辑联结词与量词

课前自助餐

回归教材

1. 命题 $p \wedge q, p \vee q, \neg p$ 的真假判断

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$
真	真	真	真	假
真	假	假	真	假
假	真	假	真	真
假	假	假	假	真

2. 全称量词和存在量词

(1)全称量词有: _____, _____, _____, 用符号“_____”表示.

存在量词有: _____, _____, _____, 用符号

“_____”表示.

(2)含有全称量词的命题, 叫做_____ ; “对 M 中任意一个 x , 有 $p(x)$ 成立”可用符号简记为: _____, 读作:

“_____”.

(3)含有存在量词的命题, 叫做特称命题(存在性命题); “存在 M 中的元素 x_0 , 使 $p(x_0)$ 成立”可用符号简记为:

_____, 读作: “_____”.

3. 含有一个量词的命题的否定

命题	命题的否定
$\forall x \in M, p(x)$	$\exists x_0 \in M, \neg p(x_0)$
$\exists x_0 \in M, p(x_0)$	$\forall x \in M, \neg p(x)$

夯实双基

- (课本习题改编)命题“所有奇数的立方都是奇数”的否定是 ()
 A. 所有奇数的立方都不是奇数
 B. 不存在一个奇数,它的立方是偶数
 C. 存在一个奇数,它的立方是偶数
 D. 不存在一个奇数,它的立方是奇数
- (2014·湖南理)已知命题 p :若 $x>y$,则 $-x<-y$;命题 q :若 $x>y$,则 $x^2>y^2$. 在命题 ① $p\wedge q$; ② $p\vee p$; ③ $p\wedge(\neg q)$; ④ $(\neg p)\vee q$ 中,真命题是 ()
 A. ①③ B. ①④
 C. ②③ D. ②④
- 命题“ $\forall x\in\mathbf{R},(\frac{1}{3})^x>0$ ”的否定是 ()

- A. $\exists x_0\in\mathbf{R},(\frac{1}{3})^{x_0}<0$ B. $\forall x_0\in\mathbf{R},(\frac{1}{3})^{x_0}\leq 0$
 C. $\forall x_0\in\mathbf{R},(\frac{1}{3})^{x_0}<0$ D. $\exists x_0\in\mathbf{R},(\frac{1}{3})^{x_0}\leq 0$

- (2014·天津文)已知命题 p : $\forall x>0$,总有 $(x+1)e^x>1$, 则 $\neg p$ 为 ()
 A. $\exists x_0\leq 0$,使得 $(x_0+1)e^{x_0}\leq 1$
 B. $\exists x_0>0$,使得 $(x_0+1)e^{x_0}\leq 1$
 C. $\forall x>0$,总有 $(x+1)e^x\leq 1$
 D. $\forall x\leq 0$,总有 $(x+1)e^x\leq 1$
- 已知 $a>0$,函数 $f(x)=ax^2+bx+c$. 若 x_0 满足关于 x 的方程 $2ax+b=0$,则下列选项的命题中为假命题的是 ()
 A. $\exists x\in\mathbf{R},f(x)\leq f(x_0)$ B. $\exists x\in\mathbf{R},f(x)\geq f(x_0)$
 C. $\forall x\in\mathbf{R},f(x)\leq f(x_0)$ D. $\forall x\in\mathbf{R},f(x)\geq f(x_0)$

授人以渔

题型一 含逻辑联结词的命题及真假

例1 写出由下列各组命题构成的“ $p\wedge q$ ”,“ $p\vee q$ ”,“ $\neg p$ ”形式的复合命题,并判断真假.

- p :1是素数; q :1是方程 $x^2+2x-3=0$ 的根;
- p :平行四边形的对角线相等; q :平行四边形的对角线互相垂直;
- p :方程 $x^2+x-1=0$ 的两实根符号相同; q :方程 $x^2+x-1=0$ 的两实根的绝对值相等.

[听课记录]

[听课记录]

探究2 要判定一个全称命题是真命题,必须对限定集合 M 中的每个元素 x 验证 $p(x)$ 成立;但要判定全称命题是假命题,只要能举出集合 M 中的一个 $x=x_0$,使得 $p(x_0)$ 不成立即可(这就是通常所说的“举出一个反例”).

要判定一个特称命题是真命题,只要在限定集合 M 中,至少能找到一个 $x=x_0$,使 $p(x_0)$ 成立即可;否则,这一特称命题就是假命题.



思考题2 试判断以下命题的真假.

- $\forall x\in\mathbf{R},x^2+2>0$;
- $\forall x\in\mathbf{N},x^4\geq 1$;
- $\exists x\in\mathbf{Z},x^3<1$;
- $\exists x\in\mathbf{Q},x^2=3$;
- $\forall x\in\mathbf{R},x^2-3x+2>0$;
- $\exists x\in\mathbf{R},x^2+1=0$.

题型三 含量词命题的否定

例3 写出下列命题的否定,并判断其真假.

- p : $\forall x\in\mathbf{R},x^2-x+\frac{1}{4}\geq 0$;
- q :所有的正方形都是矩形;
- r : $\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+2\leq 0$;
- s :至少有一个实数 x ,使 $x^3+1=0$.

[听课记录]

题型二 全(特)称命题及真假判断

例2 指出下列命题中,哪些是全称命题,哪些是特称命题,并判断真假.

- 若 $a>0$,且 $a\neq 1$,则对任意实数 $x,a^x>0$;
- 对任意实数 x_1,x_2 ,若 $x_1<x_2$,则 $\tan x_1<\tan x_2$;
- $\exists T\in\mathbf{R}$,使 $|\sin(x+T)|=|\sin x|$;
- $\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x^2+1<0$.

探究1 (1)判断一个复合命题的真假往往用真值表,一般先确定复合命题的构成形式,然后根据简单命题的真假和真值表得出结论.

(2) p 且 q 形式是“一假必假,全真才真”, p 或 q 形式是“一真必真,全假才假”,非 p 则是“与 p 的真假相反”.



思考题1 已知命题 p :若 $t\neq 3$ 且 $t\neq -3$,则 $t^2\neq 9$;命题 q : $x^2-3x+2<0$ 的解集是 $\{x|1<x<2\}$,下列结论:

①命题“ $p\wedge q$ ”是真命题;②命题“ $p\wedge(\neg q)$ ”是假命题;
 ③命题“ $(\neg p)\vee q$ ”是真命题;④命题“ $(\neg p)\vee(\neg q)$ ”是假命题. 其中正确的是 ()

- A. ②③ B. ①②④
 C. ①③④ D. ①②③④

探究 3 (1)全(特)称命题的否定与命题的否定有着一一定的区别,全(特)称命题的否定是将其全称量词改为存在量词(或存在量词改为全称量词),并把结论否定;而命题的否定则是直接否定结论即可.

(2)常见词语的否定形式有:

原语句	是	都是	$>$	至少有一个	至多有一个	对任意 $x \in A$ 使 $p(x)$ 真
否定形式	不是	不都是	$\leq$	一个也没有	至少有两个	存在 $x_0 \in A$ 使 $p(x_0)$ 假



思考题 3 写出下列命题的否定并判断真假.

- (1) p :所有末位数字是0或5的整数都能被5整除;
- (2) p :每一个非负数的平方都是正数;
- (3) p :存在一个三角形,它的内角和大于 180° ;
- (4) p :有的四边形没有外接圆.

题型四 应用问题

例 4 已知命题 p :“ $\forall x \in [1, 2], x^2 - a \geq 0$ ”命题 q :“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 2ax_0 + 2 - a = 0$ ”,若命题“ $p \wedge q$ ”是真命题,求实数 a 的取值范围.

[听课记录]

探究 4 (1)含有逻辑联结词的命题要先确定构成命题的(一个或两个)命题的真假,求出此时参数成立的条件,再求出含逻辑联结词的命题成立的条件.

(2)对全称命题可转化为恒成立问题.



思考题 4 已知命题 $p: x^2 + 2x - 3 > 0$; 命题

$q: \frac{1}{3-x} > 1$,若 $\neg q$ 且 p 为真,则 x 的取值范围是_____.



[本课总结]

1. 命题的否定与否命题的区别:

否命题是既否定其条件,又否定结论;而命题 p 的否定即非 p ,是只否结论不否条件.

2. 命题的否定与原命题的真假总是相对立的,即一真一假;而否命题与原命题的真假无必然联系.

3. 含一个量词的命题的否定,既要否定量词,又要否定结论.

自助餐

- 下列命题的否定是真命题的是 ()
A. 有些实数的绝对值是正数
B. 所有平行四边形都不是菱形
C. 任意两个等边三角形都是相似的
D. 3 是方程 $x^2 - 9 = 0$ 的一个根
- 若 p 是真命题, q 是假命题,则 ()
A. $p \wedge q$ 是真命题
B. $p \vee q$ 是假命题
C. $\neg p$ 是真命题
D. $\neg q$ 是真命题
- (2015·梅州质检)下列命题中的假命题是 ()
A. $\forall x \in \mathbf{R}, 2^{x-1} > 0$
B. $\forall x \in \mathbf{N}^*, (x-1)^2 > 0$
C. $\exists x \in \mathbf{R}, \ln x < 1$
D. $\exists x \in \mathbf{R}, \tan x = 2$
- (2014·安徽文)命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, |x| + x^2 \geq 0$ ”的否定是 ()

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, |x| + x^2 < 0$
B. $\forall x \in \mathbf{R}, |x| + x^2 \leq 0$
C. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, |x_0| + x_0^2 < 0$
D. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, |x_0| + x_0^2 \geq 0$
- 在一次驾照考试中,甲、乙两位学员各试驾一次. 设命题 p 是“甲试驾成功”, q 是“乙试驾成功”,则命题“至少有一位学员没有试驾成功”可表示为 ()
A. $(\neg p) \vee (\neg q)$
B. $p \vee (\neg q)$
C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$
D. $p \vee q$
- 已知命题 $p: \exists x \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos 2x + \cos x - m = 0$ 为真命题,则实数 m 的取值范围是_____.



温馨提示

检验能力的提高·见证水平的攀升
完成题组层级快练(三)

第1课时 函数及其表示

课 前 自 助 餐

回归教材

1. 函数与映射的概念

	函数	映射
两集合 A, B	设 A, B 是两个 _____	设 A, B 是两个 _____
对应关系 $f: A \rightarrow B$	如果按照某种确定的对应关系 f , 使对于集合 A 中的 _____ 一个数 x , 在集合 B 中有 _____ 的数 $f(x)$ 和它对应	如果按某一个确定的对应关系 f , 使对于集合 A 中的 _____ 一个元素 x 在集合 B 中有 _____ 的元素 y 与之对应
名称	称 _____ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数	称对应 _____ 为从集合 A 到集合 B 的一个映射
记法	$y = f(x), x \in A$	对应 $f: A \rightarrow B$ 是一个映射

2. 函数

(1) 函数实质上是从一个非空数集到另一个非空数集的映射.

(2) 函数的三要素: _____.

(3) 函数的表示法: _____.

(4) 两个函数只有当 _____ 都分别相同时, 这两个函数才相同.

3. 分段函数

在一个函数的定义域中, 对于自变量 x 的不同取值范围, 有着不同的对应关系, 这样的函数叫分段函数, 分段函数是一个函数而不是几个函数.

夯实双基

1. 判断下列说法是否正确(打“√”或“×”).

(1) $A = \mathbf{N}, B = \mathbf{N}, f: x \rightarrow y = |x - 1|$, 表示从集合 A 到集合 B 的映射(也是函数).

(2) $A = \mathbf{R}, B = \mathbf{R}, f: x \rightarrow y = \frac{1}{x}$, 表示从集合 A 到集合 B 的映射(也是函数).

(3) $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{2-x}$ 是一个函数.

(4) $y = 2x (x \in \mathbf{N})$ 的图像是一条直线.

(5) $y = \lg x^2$ 与 $y = 2 \lg x$ 表示同一函数.

(6) $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 表示同一函数.

2. 2016 年是闰年, 假设月份的集合 A , 每月的天数构成集合 B , f 是月份与天数的对应关系, 其对应如下:

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
天数	31	29	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

对照课本中的函数概念上述从 A 到 B 的对应是函数吗? 又从 B 到 A 的对应是函数吗?

3. 已知 $f(x^5) = \lg x$, 则 $f(2)$ 等于 ()

A. $\lg 2$ B. $\lg 32$

C. $\lg \frac{1}{32}$ D. $\frac{1}{5} \lg 2$

4. 函数 $y = f(x)$ 的图像如图 2.1-1 所示, 那么, $f(x)$ 的定义域是 _____; 值域是 _____; 其中只与 x 的一个值对应的 y 值的范围是 _____.

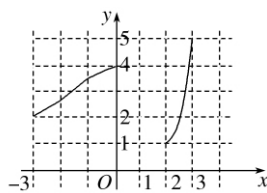


图 2.1-1

5. (2015 · 梅州质检) 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq 0) \\ 2^x - 1 & (x > 0) \end{cases}, \text{ 则 } f(f(0)) \text{ 的值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

授 人 以 渔

题型一 函数与映射的概念

例 1 下列对应是否是从集合 A 到 B 的映射, 能否构成函数?

(1) $A = \mathbf{N}, B = \mathbf{N}, f: x \rightarrow y = (x-1)^2$;

(2) $A = \mathbf{N}, B = \mathbf{R}, f: x \rightarrow y = \pm \sqrt{x}$;

(3) $A = \mathbf{N}, B = \mathbf{Q}, f: x \rightarrow y = \frac{1}{x-1}$;

(4) $A = \{\text{衡中高三} \cdot \text{一班的同学}\}, B = [0, 150], f$: 每个同学与其高考数学的分数相对应.

[听课记录] _____

探究 1 (1)映射只要求第一个集合 A 中的每个元素在第二个集合 B 中有且只有一个元素与之对应;至于 B 中的元素有无原象、有几个原象却无所谓.

(2)函数是特殊的映射:当映射 $f:A \rightarrow B$ 中的 A, B 为非空数集时,即成为函数.

(3)高考对映射的考查往往结合其他知识,只有深刻理解映射的概念才能在解决此类问题时游刃有余.



思考题 1 (1)如图 2.1-2 中建立了集合 P 中元素与集合 M 中元素的对应 f ,其中为映射的对应是 _____.

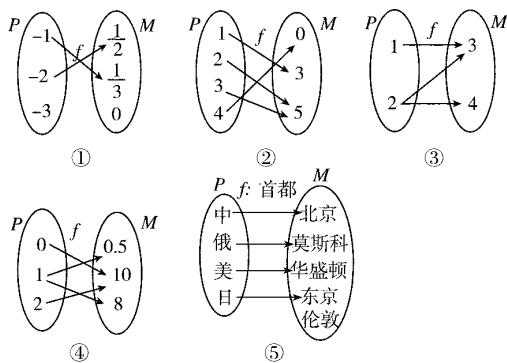


图 2.1-2

(2)集合 $A=\{x|0 \leq x \leq 4\}$, $B=\{y|0 \leq y \leq 2\}$,下列不表示从 A 到 B 的函数的是 ()

- A. $f:x \rightarrow y = \frac{1}{2}x$ B. $f:x \rightarrow y = \frac{1}{3}x$
C. $f:x \rightarrow y = \frac{2}{3}x$ D. $f:x \rightarrow y = \sqrt{x}$

例 2 以下给出的同组函数中,是否表示同一函数?为什么?

(1) $f_1: y = \frac{x}{x}$; $f_2: y = 1$; $f_3: y = x^0$.

(2) $f_1: y = \sqrt{x^2}$; $f_2: y = (\sqrt{x})^2$; $f_3: y = \begin{cases} x, & x > 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

(3) $f_1: y = \begin{cases} 1, & x \leq 1, \\ 2, & 1 < x < 2, \\ 3, & x \geq 2. \end{cases}$

$f_2:$	x	$x \leq 1$	$1 < x < 2$	$x \geq 2$
	y	1	2	3

f_3 : 如图 2.1-3

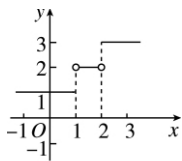


图 2.1-3

[听课记录]

探究 2 (1)构成函数的三要素中,定义域和对应法则相同,则值域一定相同.

(2)两个函数当且仅当定义域和对应法则相同时,是相同函数.



思考题 2 下列函数中一定是同一函数的是 _____.

(1) $y = x$ 与 $y = a^{\log_a x}$;

(2) $y = 2^{x+1} - 2^x$ 与 $y = 2^x$;

(3) $f(u) = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$, $f(v) = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$;

(4) $y = f(x)$ 与 $y = f(x+1)$.

题型二 函数的解析式

例 3 (1)已知 $f(\sqrt{x}+1) = x + 2\sqrt{x}$,求 $f(x)$ 的解析式.

(2)已知 $f(x)$ 是一次函数,并且 $f[f(x)] = 4x + 3$,求 $f(x)$.

(3) $2f(x) - f(-x) = \lg(x+1)$, $x \in (-1, 1)$,求 $f(x)$.

[听课记录]

探究 3 函数解析式的求法:

(1)凑配法:由已知条件 $f(g(x)) = F(x)$,可将 $F(x)$ 改写成关于 $g(x)$ 的表达式,然后以 x 替代 $g(x)$,便得 $f(x)$ 的表达式.

(2)待定系数法:若已知函数的类型(如一次函数、二次函数)可用待定系数法.

(3)换元法:已知复合函数 $f(g(x))$ 的解析式,可用换元法,此时要注意新元的取值范围.

(4)方程思想:已知关于 $f(x)$ 与 $f(\frac{1}{x})$ 或 $f(-x)$ 等的表达式,可根据已知条件再构造出另外一个等式组成方程组,通过解方程组求出 $f(x)$.



思考题 3 已知 $f(x)$ 满足下列条件,分别求 $f(x)$ 的解析式.

(1) $f(\sqrt{x}-1) = x - 2\sqrt{x}$;

(2)设 $y = f(x)$ 是二次函数,方程 $f(x) = 0$ 有两个相等实根,且 $f'(x) = 2x + 2$;

(3)函数 $f(x)$ 满足方程 $2f(x) + f(\frac{1}{x}) = 2x$, $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 0$.

题型三 分段函数与复合函数

例 4 (1)(2013·福建文)已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x^3, & x < 0, \\ -\tan x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 则 $f(f(\frac{\pi}{4})) =$ _____.

(2)(2014·浙江理)设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+x, & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0. \end{cases}$ 若 $f(f(a)) \leq 2$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

[听课记录]

探究 4 分段函数、复合函数是高考热点,分段函数体现在不同定义域的子集上,对应法则不同,因此注意选择法则,而复合函数是把内层函数的函数值作为外层函数的自变量,因此要注意复合函数定义域的变化.



思考题 4 (1)(2014·江西理)已知函数 $f(x) = 5^{|x|}$, $g(x) = ax^2 - x (a \in \mathbf{R})$. 若 $f[g(1)] = 1$, 则 $a =$ ()

- A. 1 B. 2
C. 3 D. -1

(2)已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+2x, & x < 0, \\ x^2-2x, & x \geq 0. \end{cases}$ 若 $f(-a) + f(a)$

≤ 0 , 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[-1, 1]$ B. $[-2, 0]$
C. $[0, 2]$ D. $[-2, 2]$



[本课总结]

常用结论记心中,快速解题特轻松:

1. 映射问题允许多对一,但不允许一对多! 换句话说就是允许三石一鸟,但不允许一石三鸟!

2. 函数问题定义域优先!

3. 抽象函数不要怕,赋值方法解决它!

4. 分段函数分段算,然后并到一起保平安.

本课时主要涉及到三类题型:函数的三要素,分段函数,函数的解析式. 通过例题的讲解(有些题目直接源于教材),一方面使学生掌握各类题型的解法;另一方面,也要教给学生把握复习的尺度,教学大纲是高考命题的依据,而教材是贯彻大纲的载体,研习教材是学生获取知识、能力的重要途径.

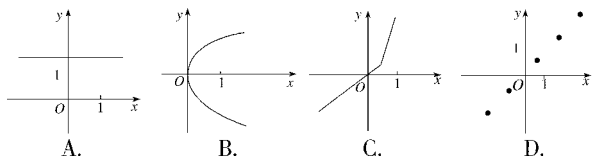
从近几年的新课标高考试题可以看到,高考试题严格遵循教学大纲及《高考大纲》,有一定数量的试题直接源自教材,这就要求我们在教学过程中要紧扣教材和大纲,全面、系统地抓好对基础知识、基本技能、基本思想和方法的教学,对各模块的内容要注重全面,更要突出重点,对重点内容、通解通法要讲清讲透.

| 自助餐 |

1. 已知 $f(x) = k (x \in \mathbf{R})$, 则 $f(k^3)$ 等于 ()

- A. k^3 B. k
C. $\sqrt[3]{k}$ D. 不确定

2. 下列各图中,不可能表示函数 $y = f(x)$ 的图像的是 ()



3. 设 f, g 都是从 A 到 A 的映射(其中 $A = \{1, 2, 3\}$), 其对应关系如下表:

x	1	2	3
f	3	1	2
g	3	2	1

则 $f(g(3))$ 等于 ()

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 不存在

4. 已知 $A = \{x | x = n^2, n \in \mathbf{N}\}$, 给出下列关系式: ① $f(x) = x$; ② $f(x) = x^2$; ③ $f(x) = x^3$; ④ $f(x) = x^4$; ⑤ $f(x) = x^2 + 1$, 其

中能够表示函数 $f: A \rightarrow A$ 的个数是 ()

- A. 2 B. 3
C. 4 D. 5

5. (2015·《高考调研》原创题)已知函数 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x - 2, & x \leq 0, \\ f(x-2) + 1, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f(2016) =$ _____.

6. (2015·黄冈一模)如图 2.1-4, 已知四边形 $ABCD$. 若四边形 $ABCD$ 上的点在映射 $f: (x, y) \rightarrow (x+1, 2y)$ 作用下的象集为四边形 $A_1B_1C_1D_1$, 且四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积是 12, 则四边形 $ABCD$ 的面积是 ()

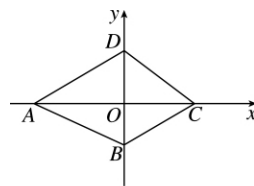


图 2.1-4

- A. 9 B. 6
C. $6\sqrt{3}$ D. 12

抽象函数

例 1 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 对于任意实数 x_1, x_2 , 都有 $f(x_1) + f(x_2) = 2f(\frac{x_1+x_2}{2})f(\frac{x_1-x_2}{2})$, $f(\pi) = -1$, 则 $f(0) =$ _____.

【解析】 令 $x_1 = x_2 = \pi$,

则 $f(\pi) + f(\pi) = 2f(\pi)f(0)$, $\therefore f(0) = 1$.

【答案】 1

例 2 已知偶函数 $f(x)$, 对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 恒有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + 2x_1x_2 + 1$, 则函数 $f(x)$ 的解析式为 _____.

【解析】 取 $x_1 = x_2 = 0$, 所以 $f(0) = 2f(0) + 1$.

所以 $f(0) = -1$.

因为 $f[x + (-x)] = f(x) + f(-x) + 2x \cdot (-x) + 1$, 又 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x) = x^2 - 1$.

【答案】 $f(x) = x^2 - 1$

【讲评】 抽象函数问题的处理一般有两种途径:

(1) 看其性质符合哪类具体函数形式, 用具体函数代替抽象函数解决问题.

(2) 利用特殊值代入寻求规律和解法.

**温馨
提示**

检验能力的提高·见证水平的攀升
完成题组层级快练(四)

第2课时 函数的定义域与值域

回归教材

1. 函数的定义域

(1) 求定义域的步骤:

- ① 写出使函数式有意义的不等式(组);
- ② 解不等式(组);
- ③ 写出函数定义域.(注意用区间或集合的形式写出)

(2) 基本初等函数的定义域:

- ① 整式函数的定义域为 $\mathbf{R}$.
 - ② 分式函数中分母 _____.
 - ③ 偶次根式函数被开方式 _____.
 - ④ 一次函数、二次函数的定义域均为 _____.
 - ⑤ 函数 $f(x) = x^0$ 的定义域为 _____.
 - ⑥ 指数函数的定义域为 _____.
- 对数函数的定义域为 _____.

2. 函数的值域

基本初等函数的值域:

- (1) $y = kx + b (k \neq 0)$ 的值域是 _____.
- (2) $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的值域是: 当 $a > 0$ 时, 值域为 _____; 当 $a < 0$ 时, 值域为 _____.
- (3) $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的值域是 _____.

(4) $y = a^x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的值域是 _____.

(5) $y = \log_a x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的值域是 _____.

夯实双基

1. (2014·江西理) 函数 $f(x) = \ln(x^2 - x)$ 的定义域为

- ()
- A. $(0, 1)$ B. $[0, 1]$
C. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

2. (课本习题改编) 下表表示 y 是 x 的函数, 则函数的值域是 ()

x	$0 < x < 5$	$5 \leq x < 10$	$10 \leq x < 15$	$15 \leq x \leq 20$
y	2	3	4	5

- A. $[2, 5]$ B. $\mathbf{N}$
C. $(0, 20]$ D. $\{2, 3, 4, 5\}$

3. 若函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 2]$, 则函数 $g(x) = \frac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域是 ()

- A. $[0, 1]$ B. $[0, 1)$
C. $[0, 1) \cup (1, 4]$ D. $(0, 1)$

4. 函数 $y = \log_{0.3}(x^2 + 4x + 5)$ 的值域为 _____.

5. 函数 $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ 的值域为 _____.

题型一 函数的定义域

例 1 (1) 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{\log_{0.5}(x-1)}}$ 的定义域为 _____.

(2) 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{\log_a(x-1)}}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的定义域为 _____.

(3) 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x+2x^2}}{\lg(|x|-x)}$ 的定义域为_____.

[听课记录]

探究 1 (1) 给定函数的解析式, 求函数的定义域的依据是基本代数式的意义, 如分式的分母不等于零, 偶次根式的被开方数为非负数, 零指数幂的底数不为零, 对数的真数大于零且底数为不等于 1 的正数以及三角函数的定义等.

(2) 求函数的定义域往往归结为解不等式组的问题. 在解不等式组时要细心, 取交集时可借助数轴, 并且要注意端点值或边界值.



思考题 1 求函数 $y = \sqrt{25-x^2} + \lg \cos x$ 的定义域.

例 2 (1) 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求 $f(2x-1)$ 的定义域.

(2) 若函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求 $f(x)$ 的定义域.

[听课记录]

探究 2 (1) 若已知 $y=f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$, 则 $y=f[g(x)]$ 的定义域由 $a \leq g(x) \leq b$ 解出.

(2) 若已知 $y=f[g(x)]$ 的定义域为 $[a, b]$, 则 $y=f(x)$ 的定义域即为 $g(x)$ 的值域.



思考题 2 (1) (2013·大纲全国理) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 0)$, 则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为_____.

(2) 若函数 $f(2^x)$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 求 $f(\log_2 x)$ 的定义域.

题型二 函数的值域

例 3 求下列函数的值域:

(1) $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$;

(2) $y = \sqrt{-2x^2+x+3}$;

(3) $y = x + \frac{1}{x} + 1$;

(4) $y = x - \sqrt{1-2x}$;

(5) $y = x + \sqrt{4-x^2}$;

(6) $y = |x+1| + |x-2|$.

[听课记录]

探究 3 求函数值域的一般方法有:

①分离常数法; ②反解法; ③配方法; ④不等式法; ⑤单调性法; ⑥换元法; ⑦数形结合法; ⑧导数法.



思考题 3 (1) 下列函数中, 值域为 $(0, +\infty)$ 的是 ()

A. $y = x^2 - x + 1$

B. $y = x + \frac{1}{x} (x > 0)$

C. $y = e^{\sin x}$

D. $y = (x+1)^{-\frac{1}{x}}$

(2) 函数 $y = \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$ 的值域为_____.



[本课总结]

求函数的值域与最值没有通性通法, 只能根据函数解析式的结构特征来选择对应的方法求解, 因此, 对函数解析式结构特征的分析是十分重要的. 常见函数解析式的结构模型与对应求解方法可归纳为:

1. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 及二次型函数 $y = a[f(x)]^2 + b[f(x)] + c (a \neq 0)$ 可用换元法.

2. 形如 $y = \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ (其中 a_1, a_2 不全为 0 且 $a_2x^2+b_2x+c_2 \neq 0$) 的函数可用判别式法.

3. 形如 $y = ax + b \pm \sqrt{cx+d} (a, b, c, d$ 为常数, $ac \neq 0)$ 的函数, 可用换元法或配方法.

4. 形如 $y = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0)$ 或 $y = \frac{2^x-1}{2^x+1}$ 或 $y = \frac{\sin x-1}{\sin x+2}$ 的函数, 可用反函数法或分离常数法.

5. 形如 $y = x + \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 的函数可用图像法或均值不等式法.

6. 对于分段函数或含有绝对值符号的函数 (如 $y = |x-1| + |x+4|$) 可用分段求值域 (最值) 或数形结合法.

7. 定义在闭区间上的连续函数可用导数法求函数的最值, 其解题程序为第一步求导, 第二步求出极值及端点函数值, 第三步求最大、最小值.