高等职业教育“十三五”规划教材

高等数学
——财经版

李本图　高玉静　杨燕飞　梁宏昌◎主　编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等职业教育“十三五”规划教材

高等数学—财经版

主　编　李本图　高玉静　杨燕飞　梁宏昌
副主编　夏德昌　王德华　施桂萍

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:财经版/李本图等主编. —北京:北京理工大学出版社, 2016.9
ISBN 978 - 7 - 5682 - 3091 - 9

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①李…　Ⅲ.①高等数学 - 高等职业教育 - 教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 213581 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市华骏印务包装有限公司
开　　本 / 787 毫米 ×1092 毫米　1/16
印　　张 / 12.5
字　　数 / 294 千字
版　　次 / 2016 年 9 月第 1 版　2016 年 9 月第 1 次印刷
定　　价 / 29.80 元

责任编辑 / 封　雪
文案编辑 / 张鑫星
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 马振武

前　　言

近年来,我国高等职业教育蓬勃发展,为国家建设培养了大量技能型专门人才,在推进社会主义现代化建设进程中具有不可替代的作用. 当前,高职高专教育成为社会关注的热点,面临大好的发展机遇. 同时,经济、科技和社会发展也对高职高专教育人才培养工作提出了更高的要求,但高职高专少学时的经济数学教材却出现了相对滞后的情形,并且目前教材中的部分内容和中学必修的数学课程有许多重复,所以我们以“掌握概念,强化应用,培养技能”为重点,以应用为目的,以“必需、够用”为度,以提高学生的综合能力为指导思想,以培养高等技术应用型专门人才为根本任务,以突出应用性与实践性为原则,以适应社会需要为目标的宗旨,结合多年来的教学经验,根据教育部制定的《高职高专教育经济数学基础课程教学的基本要求》编写了这本供高职高专经管类和工程造价等专业一年级学生使用的教材. 本教材需讲授102 ~ 116 学时,任课老师可根据本校本专业的实际情况和教学计划酌情选用.

本教材具有以下特点:

1. 根据学生的特点,适当选材,由浅入深,循序渐进,根据数学的认知规律和教学规律,把我们的教学特点和思想融合到教材中去,除传授给学生数学知识外,还传授一种新的、易懂的学习方法和数学思想,尽量使教材简明实用.

2. 在内容的安排上,打破传统数学教材的结构,将数学知识与其经济应用有机结合,淡化了一些较高难度的理论推导和证明过程,加强了法则和公式的经济应用. 中学学过的内容尽量不讲,重点的起纽带作用的知识少而精. 全书以实用性为主,充分体现了“数学为本,经济为用”的原则,在保持数学知识的连贯性的同时,打破传统上千篇一律的教材结构,有助于学生对数学基础知识的理解和数学思想方法的掌握,进而有利于培养学生的实际应用能力,便于学生自学.

3. 教材内容突出实用性和专业性. 它涵盖了高等职业学院财经类、管理类及相关专业必要的数学基础. 本课程力求使学生系统地获得微积分、线性代数、概率统计和常微分方程的基础知识、必要的基础理论和常用的运算方法. 通过学习,学生能够得到基本数学方法的训练和运用这些方法解决简单的财经、管理等实际问题的初步训练,为学生学习财经类、管理类各专业的后续课程和进一步扩大数学知识打好必要的数学基础.

4. 概念的引入、例题和习题力图采用与经济、管理类等专业有关的题目,注重数学在经济上的应用,体现经济数学的特点.

5. 本书每章有教学目标、本章精要,每节后配有习题,每章后有自测题,书后附有标准正态分布表、χ^2 分布表、全书习题的答案与解法提示.

本教材由李本图、高玉静、杨燕飞、梁宏昌担任主编,由夏德昌、王德华、施桂萍担任副主编.第一章由高玉静编写,第二章由施桂萍编写,第三章由李本图编写,第四章由杨燕飞编写,第五章由梁宏昌编写,第六章由王德华编写,第七章由夏德昌编写.

由于编者水平有限,时间仓促,不妥之处在所难免,衷心希望广大读者批评指正.

编者

目　录

第 1 章　函数、极限及应用 …… 1
1.1　函数 …… 1
1.2　常用的经济函数 …… 8
1.3　极限的概念 …… 12
1.4　无穷小量与无穷大量 …… 16
1.5　极限的运算 …… 19
1.6　函数的连续性 …… 23
1.7　极限的经济应用 …… 29
1.8　函数、极限及应用自测题 …… 32
第 2 章　一元函数微分学 …… 36
2.1　导数概念及四则运算 …… 37
2.2　求导法则 …… 41
2.3　函数的微分及应用 …… 44
2.4　微分中值定理 …… 46
2.5　洛必达法则 …… 48
2.6　函数的单调性与极值 …… 51
2.7　函数的最值、曲线的凹凸性与拐点 …… 55
2.8　导数与微分在经济学中的简单应用 …… 58
2.9　一元函数微分学自测题 …… 62
第 3 章　不定积分 …… 64
3.1　定积分的概念与性质 …… 64
3.2　直接积分法 …… 68
3.3　换元积分法 …… 71
3.4　分部积分法 …… 74
3.5　不定积分自测题 …… 78
第 4 章　定积分及其应用 …… 82
4.1　定积分的概念及性质 …… 82
4.2　微积分基本定理及定积分的计算 …… 87
4.3　定积分的几何应用 …… 90
4.4　定积分的经济应用 …… 95
4.5　定积分及其应用自测题 …… 97
第 5 章　微分方程 …… 101
5.1　微分方程的基本概念 …… 101

5.2 一阶微分方程 …… 103
5.3 微分方程在经济中的简单应用 …… 107
5.4 微分方程自测题 …… 109
第6章 矩阵与线性方程组 …… 110
6.1 矩阵的概念与运算 …… 110
6.2 矩阵的初等变换与矩阵的秩 …… 117
6.3 逆矩阵 …… 119
6.4 线性方程组的解法 …… 122
6.5 线性方程组解的判定 …… 126
6.6 线性规划数学模型举例 …… 128
6.7 矩阵与线性方程组自测题 …… 132
第7章 概论统计初步 …… 136
7.1 随机事件 …… 136
7.2 概率的统计定义与性质 …… 140
7.3 概率的常用公式 …… 145
7.4 事件的独立性与贝努利概型 …… 148
7.5 随机变量及其分布 …… 151
7.6 随机变量的期望和方差 …… 161
7.7 样本及分布 …… 166
7.8 参数估计 …… 169
7.9 概论统计初步自测题 …… 172
附录Ⅰ 标准正态分布数值表 …… 175
附录Ⅱ χ^2分布数值表 …… 177
附录Ⅲ 常用积分公式 …… 178
附录Ⅳ 中学数学常用公式 …… 187
参考文献 …… 193

第 1 章　函数、极限及应用

学习目标

理解函数的概念、特性，掌握基本初等函数的图像性质；理解分段函数、反函数、复合函数等概念；了解经济学中的常见函数；理解无穷小和无穷大的概念；掌握极限思想、极限概念、极限法则和求极限方法；理解函数的连续性概念、性质；利用极限解决现实中的具体问题——复利与贴现.

函数是高等数学中最重要的概念之一. 在数学、自然科学、经济学和管理科学的研究中，函数关系随处可见. 微积分学是以函数关系为研究对象的，极限是研究函数和解决各种问题的一种基本方法. 在本章中，我们将首先从函数概念入手，进而讨论函数的极限、连续性等基本概念，以及它们的一些性质和在经济中的应用.

1.1　函　　数

学习内容：函数.

目的要求：熟练掌握函数的定义、定义域、对应法则；了解分段函数、显函数、隐函数、反函数的概念；熟练掌握函数的单调性、有界性、奇偶性、周期性及五种基本初等函数的图像和性质；掌握复合函数的复合过程.

重点难点：函数定义域的求法、复合函数的复合过程.

在我们的周围，变化无处不在，可以用数学有效地描述生活中许多变化着的现象. 实际上，一个量的变化本身就意味着这个量是随着其他量的变化而变化的，而变量之间的依赖关系就是我们所说的函数关系. 在中学我们已经接触过“函数”，本节仅就其中的一部分做简要的叙述，并做必要的补充.

1. 函数概念

1) 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 若对于每一个数 $x \in D$，按照某一确定的对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y = f(x),\quad x \in D.$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**；数集 D 称为该函数的**定义域**，是 x 的取值范围.

自变量取定义域内某一值时，因变量的对应值叫作函数值. 对于给定的函数 $y = f(x)$，当

函数的定义域 D 确定后,按照对应法则 f,因变量的变化范围也随之确定. 函数值的集合叫作函数的**值域**. 所以**定义域和对应法则就是确定一个函数的两个要素**. 两个函数只有在它们的定义域和对应法则都相同时才是相同的.

函数的三种表示方法:解析法、列表法、图像法.

例 1　求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x^2-9}$;　　(2) $y=\ln(x^2-4)$.

解　(1)该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ x^2-9\neq 0\end{cases}$$

的 x 的全体,解不等式组得 $x\geqslant 2$ 且 $x\neq \pm 3$,故原函数的定义域为 $[2,3)\cup(3,+\infty)$.

(2)由对数的真数大于零可知,自变量 x 应满足 $x^2-4>0$,解得 $x>2$ 或 $x<-2$,故原函数的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

2)分段函数

对于自变量的不同取值范围,对应法则也不同的函数,称为**分段函数**.

注意:

(1)分段函数是一个函数,而不是几个函数;

(2)分段函数的定义域是各段定义域的并集.

例如,$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 5,\\ 0, & x=0,\\ -1, & -5<x<0\end{cases}$ 等都是分段函数.

例 2　A、B 两地间的汽车运输,旅客携带行李按下列标准支付运费:不超过 10 千克的不收行李费;超过 10 千克而不超过 25 千克的,每千克收运费 0.5 元;超过 25 千克而不超过 100 千克的,每千克收运费 0.8 元. 试列出运输行李的运费与行李质量之间的函数关系式,写出定义域,并求出所带行李分别为 16 千克和 65 千克的甲、乙两旅客各应支付的运费.

解　设行李质量为 x 千克,其运费为 y 元. 根据题意有

当 $0\leqslant x\leqslant 10$ 时,$y=0$;

当 $10<x\leqslant 25$ 时,$y=(x-10)\times 0.5=0.5x-5$;

当 $25<x\leqslant 100$ 时,$y=(25-10)\times 0.5+(x-25)\times 0.8=0.8x-12.5$.

故所求函数为

$$y=f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 10,\\ 0.5x-5, & 10<x\leqslant 25,\\ 0.8x-12.5, & 25<x\leqslant 100,\end{cases}$$

其定义域为 $[0,100]$.

又

$$f(16)=0.5\times 16-5=3,$$

$$f(65)=0.8\times 65-12.5=39.5.$$

即甲和乙两旅客应分别支付运费 3 元和 39.5 元.

3)显函数和隐函数

若函数中的因变量 y 用自变量 x 的表达式直接表示出来,这样的函数称为**显函数**.

有些函数的表达方式却不是这样,如方程 $x+y^3-1=0$ 表示一个函数,当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,y 都有唯一确定的值与之对应.

一般地,若两个变量 x,y 的函数关系用方程 $F(x,y)=0$ 的形式来表示,即 x,y 的函数关系隐藏在方程里,这样的函数叫作**隐函数**.

有的隐函数,可以从方程 $F(x,y)=0$ 中解出 y 来化为显函数,但有的隐函数化为显函数比较困难,甚至是不可能的. 例如,由方程 $xy-e^{x+y}=0$ 确定的隐函数就不能化为显函数.

2. 函数的几种特性

1)单调性

设有函数 $y=f(x)$,$x\in(a,b)$,若对任意两点 $x_1,x_2\in(a,b)$,当 $x_1<x_2$ 时,总有:

(1)$f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在(a,b)上是**单调增加**的,区间(a,b)称为**单调增加区间**;

(2)$f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在(a,b)上是**单调减少**的,区间(a,b)称为**单调减少区间**.

单调增加的函数和单调减少的函数统称为**单调函数**,单调增加区间和单调减少区间统称为**单调区间**.

2)有界性

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,如果存在 $M>0$,使得对任意 $x\in D$,均有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称函数 $f(x)$在 D 内是有界的;如果这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$在 D 内是无界的.

例如 $y=\sin x$ 是有界函数,其中对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,均有 $|\sin x|\leqslant 1$;而 $y=x^2$ 是无界函数,因 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上仅有下界.

3)奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域关于原点对称,如果对于定义域内的 x 都有:

(1)$f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$为奇函数;

(2)$f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$为偶函数.

奇函数的图像关于原点对称;偶函数的图像关于 y 轴对称. 如果函数 $f(x)$既不是奇函数也不是偶函数,则称为非奇非偶函数.

例如,$y=\sin x$,$y=x^3$,$x\in(-\infty,+\infty)$是奇函数;$y=\cos x$,$y=x^2$,$x\in(-\infty,+\infty)$是偶函数.

4)周期性

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,如果存在常数 $T\neq 0$,对任意 $x\in D$,$f(x+T)=f(x)$恒成立,则称函数 $y=f(x)$为周期函数;使上式成立的最小正数 T 称为函数 $y=f(x)$的最小正周期,简称周期. 例如,$y=\sin x$,$y=\cos x$ 的周期 $T=2\pi$;$y=\tan x$,$y=\cot x$ 的周期 $T=\pi$;正弦曲线函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

3. 初等函数

1)反函数

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,$y\in Z$. 若对于任意一个 $y\in Z$,D 中都有唯一的一个 x,使得 $f(x)=y$

成立，这时 x 是以 Z 为定义域的 y 的函数，称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in Z$.

在函数 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 是自变量，x 表示函数. 但按照习惯，我们需对调函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x,y，把它改写成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z$.

今后凡不特别说明，函数 $y=f(x)$ 的反函数都是这种改写过的 $y=f^{-1}(y)$，$x\in Z$ 形式.

函数 $y=f^{-1}(x)$，$x\in D$ 与 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z$ 互为反函数，它们的定义域与值域互换.

在同一直角坐标系下，$y=f^{-1}(x)$，$x\in D$ 与 $xy'=y(1+\ln y-\ln x)$ 互为反函数的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 3　函数 $y=3x-2$ 与函数 $y=\dfrac{x+2}{3}$ 互为反函数，如图 1－1 所示；函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数，如图 1－2 所示. 它们的图形都是关于直线 $y=x$ 对称的.

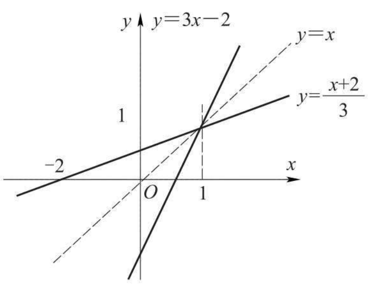


图 1－1

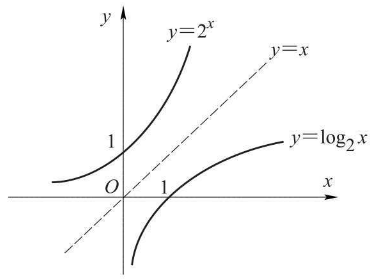


图 1－2

定理 1（反函数存在定理）　单调函数必有反函数，且单调增加（减少）的函数的反函数也是单调增加（减少）的. 求函数 $y=f(x)$ 的反函数可以按以下步骤进行：

（1）从方程 $y=f(x)$ 中解出唯一的 x，并写成 $x=f^{-1}(y)$；

（2）将 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x,y 对调，得到函数 $y=f^{-1}(x)$，这就是所求的函数的反函数.

2）复合函数

在经济管理活动和工程技术中，许多函数关系比较复杂. 例如，企业的产品利润 L 是产量 Q 的函数，如果产量 Q 与生产过程中各种要素投入量的总和 u 有关，可以通过生产函数 $Q=f(u)$ 表示出来，即 L 是 Q 的函数，而 Q 又是 u 的函数，也可以说，L 通过 Q 是 u 的函数，这种函数就是复合函数. 一般地，有以下定义：

假设有两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，与 x 对应的 u 值能使 $y=f(u)$ 有定义，将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$，得到函数 $y=f[\varphi(x)]$. 这个新函数 $y=f[\varphi(x)]$ 就是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 经过复合而成的**复合函数**，称 u 为中间变量.

例如，由 $y=f(u)=e^u$，$u=\varphi(x)=\cos x$ 可以复合成复合函数 $y=e^{\cos x}$.

复合函数不仅可用两个函数复合而成，也可以由多个函数相继进行复合而成. 如由 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=\sin x$ 可以复合成复合函数 $y=\sqrt{\ln \sin x}$；由 $y=f(u)=e^u$，$u=\varphi(x)=\cos x$ 可以复合成复合函数 $y=f[\varphi(x)]=e^{\cos x}$.

注意：不是任何两个函数都能复合成复合函数. 由定义易知，只有当 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空时，这两个函数才能复合成复合函数. 例如函数 $y=\ln u$ 和 $u=-x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为 $u=-x^2$ 的值域为 $(-\infty,0]$，而 $y=\ln u$ 的定义域为

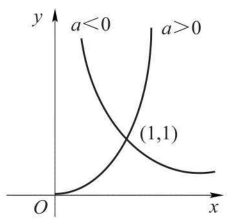
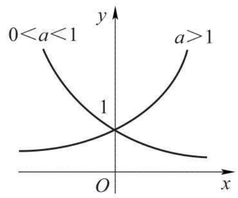
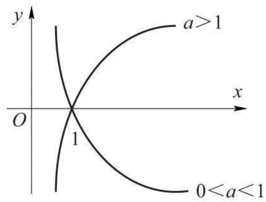
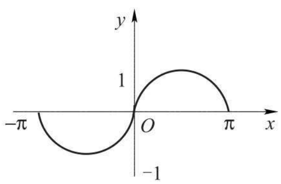
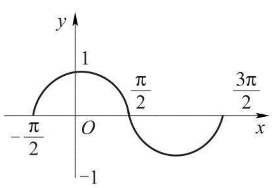
$(0,+\infty)$，显然$(-\infty,0]\cap(0,+\infty)=\varnothing$，$y=\ln(-x^2)$无意义.

3）基本初等函数

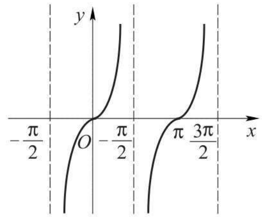
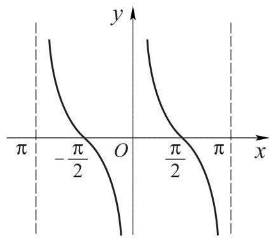
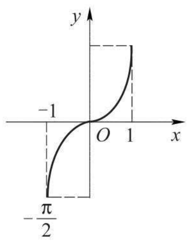
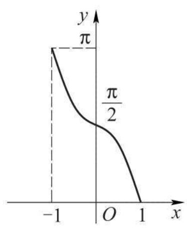
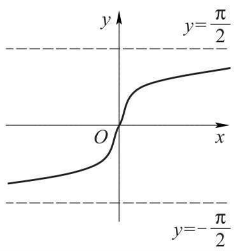
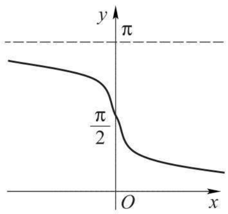
常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**.

为适应本教材的需要，现将幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这五类基本初等函数的表达式、定义域、性质以及图像归纳成表 1－1，供学习使用.

表 1－1　基本初等函数及其图像、性质

<table>
<tr><th>序号</th><th colspan="2">函　　数</th><th>图　　像</th><th>性　　质</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">幂函数
$y=x^a$，$a\in\mathbf{R}$</td><td>
</td><td>在第一象限，$a>0$ 时函数单调增加；$a<0$时函数单调减少，都过点$(1,1)$</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">指数函数
$y=a^x$
$(a>0$ 且 $a\neq1)$</td><td>
</td><td>$a>1$ 时函数单调增加；$0<a<1$ 时函数单调减少.
共性：过点$(0,1)$，以 x 轴为水平渐近线</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">对数函数
$y=\log_a x$
$(a>0$ 且 $a\neq1)$</td><td>
</td><td>$a>1$ 时函数单调增加；$0<a<1$ 时函数单调减少.
共性：过点$(1,0)$，以 y 轴为铅垂渐近线</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">三角函数</td><td>正弦函数
$y=\sin x$</td><td>
</td><td>奇函数，周期 $T=2\pi$，有界 $|\sin x|\leqslant1$</td></tr>
<tr><td>余弦函数
$y=\cos x$</td><td>
</td><td>偶函数，周期 $T=2\pi$，有界 $|\cos x|\leqslant1$</td></tr>
</table>

续表

序号	函数		图像	性质
4	三角函数	正切函数 $y=\tan x$		奇函数,周期 $T=\pi$,无界
		余切函数 $y=\cot x$		奇函数,周期 $T=\pi$,无界
5	反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$		$x\in[-1,1]$,$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,奇函数,单调增加,有界
		反余弦函数 $y=\arccos x$		$x\in[-1,1]$,$y\in[0,\pi]$,单调减少,有界
		反正切函数 $y=\arctan x$		$x\in(-\infty,+\infty)$,$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,奇函数,单调增加,有界,$y=\pm\frac{\pi}{2}$为两条水平渐近线
		反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$		$x\in(-\infty,+\infty)$,$y\in(0,\pi)$,单调减少,有界,$y=0$,$y=\pi$为两条水平渐近线

4)初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所构成的,并能用一个式子表示的函数,统称为初等函数.

初等函数的本质就是一个函数.为了研究需要,今后经常要将一个给定的初等函数看成由若干个简单函数经过四则运算或复合而成的形式.简单函数是指基本初等函数或由基本初等函数经过有限次四则运算而成的函数.

例4　下列函数是由哪几个简单函数复合而成的?

(1) $y=\ln\cos x$;　(2) $y=\cos\sqrt{x^3+1}$;　(3) $y=e^{\sin 3x}$.

解　(1)令 $u=\cos x$,则 $y=\ln u$.

于是 $y=\ln\cos x$ 是由 $y=\ln u$,$u=\cos x$ 复合而成的.

(2)令 $v=x^3+1$,$u=\sqrt{v}$,则 $y=\cos u$.

所以 $y=\cos\sqrt{x^3+1}$ 是由 $y=\cos u$,$u=\sqrt{v}$,$v=x^3+1$ 复合而成的.

(3)令 $v=3x$,$u=\sin v$,则 $y=e^u$.

所以 $y=e^{\sin 3x}$ 是由 $y=e^u$,$u=\sin v$,$v=3x$ 复合而成的.

本课程研究的函数主要是初等函数.凡不是初等函数的函数皆称为非初等函数.

习题1.1

1.填空题:

(1)函数 $y=\sqrt{2x+1}$ 的定义域是________,$y=\ln(x^2-9)$ 的定义域是________.

(2)设 $y=f(x)$,$x\in[1,3)$,则 $y=f(2x-1)$ 的定义域为__________.

(3)设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ 1-x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(-2)=$______,$f[f(-2)]=$________.

(4)函数 $y=1-x^2$,$x<0$ 的反函数为__________.

(5)函数 $y=\ln(\arcsin e^x)$ 是由__________、__________、__________复合而成的.

2.求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{2x-1}+\ln(1-x)$;　(2) $y=\dfrac{1}{4-x^2}$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$;　(4) $y=\ln(x+1)+\arccos(x-1)$.

3.下列函数是由哪几个简单函数复合而成的?

(1) $y=\sin(x^3+1)$;　(2) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$;

(3) $y=\sin\sqrt{x+1}$;　(4) $y=\cos^2(1+2x)$;

(5) $y=\ln\ln\sin x$;　(6) $y=\sqrt{\ln(x+1)}$.

4.求下列函数的反函数:

(1) $y=3x-2$;　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$;

(3) $y=\sqrt[3]{2x-1}$;　(4) $y=1-x^2\quad(x<0)$.

5. 应用题：

一台机器的价值是50万元，如果每年的折旧率为4.5%（即每年减少它的价值的4.5%），经过 n 年后机器的价值是 Q 万元，试写出 Q 与 n 的函数关系式.

1.2　常用的经济函数

学习内容：经济学中常见的几类函数.

目的要求：理解经济学中需求函数、供给函数、成本函数、收益函数以及利润函数；掌握经济学中各种函数的计算.

重点难点：经济学中各种函数的计算.

1. 需求函数与供给函数

1）需求函数

在经济学中，**需求**是指在一定价格条件下，消费者愿意并且有支付能力购买的商品数量. 消费者对某种商品的需求是由多种因素决定的，其中商品的价格是影响需求的一个主要因素. 假设其他条件不变（如消费者的收入、偏好以及其他替代商品的价格等），把商品的需求量 Q 仅看成是其价格 p 的函数，这个函数就称为**需求函数**. 记作

$$Q = f(p), \quad p \geqslant 0.$$

从需求的特征来看，**需求函数一般是减函数**：商品的价格低，则需求量大；商品的价格高，则需求量小. 需求函数的图像称为需求曲线，需求曲线是单调下降的.

常用的需求函数有如下几种：

（1）线性函数

$$Q = a - bp \quad (a, b > 0).$$

（2）二次函数（抛物线型）

$$Q = a - bp - cp^2 \quad (a > 0, b \geqslant 0, c > 0).$$

（3）指数函数

$$Q = A\mathrm{e}^{-bp} \quad (A > 0, b > 0).$$

（4）幂函数

$$Q = Ap^{-\alpha} \quad (A > 0, \alpha > 0).$$

对具体问题，可根据实际情况确定需求函数的类型及其中的参数.

在经济学中，需求函数常以反函数的形式 $p = f^{-1}(Q)$ 给出，需求函数的反函数也称为需求函数，有时也称为价格函数.

例1　市场上售出的某种衬衫的件数 Q 是价格 p 的线性函数. 当价格 p 为50元1件时可售出1 500件；当价格 p 为60元1件时，可售出1 200件. 试确定需求函数和价格函数.

解　设需求线性函数为 $Q=a-bp \quad (a,b>0)$.

根据题意,有

$$\begin{cases}1\,500=a-50b,\\ 1\,200=a-60b,\end{cases}\quad \text{解之得 } a=3\,000,b=30.$$

于是所求需求函数为

$$Q=3\,000-30p,$$

从而得其价格函数为

$$p=100-\frac{Q}{30}.$$

2)供给函数

在经济学中,**供给**是指在一定价格条件下,商品生产者或企业愿意并能够出售的商品数量.供给也是由多种因素决定的,其中,最主要的也是商品的自身价格.因此,在分析时,通常假定其他条件(如生产中的投入成本、技术状况、卖者对其他商品及未来价格的预测等)保持不变,把供给量 Q 仅看作价格 p 的函数,这个函数称为供给函数.记作

$$Q=g(p),\quad p>0.$$

从供给的特征来看:商品的价格低,生产者不愿生产(或者企业不愿供给商品),供给就少;商品的价格高,生产者愿意生产(或者企业愿意供给商品),则供给多.因此,**供给函数一般为单调递增函数**.供给函数的反函数 $p=g^{-1}(Q)$ 也称为供给函数.供给函数的图像称为供给曲线,供给曲线是单调上升的.

常用的供给函数有如下几种类型:

(1)线性函数

$$Q=-c+dp \quad (c>0,d>0).$$

(2)二次函数

$$Q=-a+bp+cp^2 \quad (a>0,b\geqslant 0,c>0).$$

(3)指数函数

$$Q=A\mathrm{e}^{kp}-B \quad (A>0,B>A,k>0).$$

供给函数的形式有很多,它与市场组织、市场状况及成本函数有密切关系.

当市场上的**需求量与供给量相等**时,需求关系与供给关系之间达到某种均衡,这时的商品价格和需求量(或供给量)分别称为**均衡价格和均衡数量**.假设需求曲线 $Q_{\mathrm{d}}=f(p)$ 和供给曲线 $Q_{\mathrm{s}}=g(p)$ 的交点为 $(\bar{p},\bar{Q})$,则 $\bar{p},\bar{Q}$ 分别是均衡价格和均衡数量.点 $(\bar{p},\bar{Q})$ 称为**均衡点**.

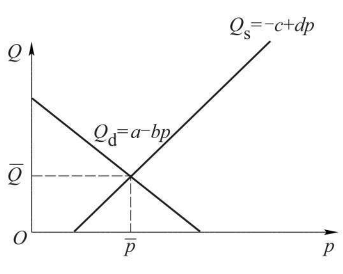


图 1－3

例如,若取需求函数为 $Q_{\mathrm{d}}=f(p)=a-bp$,供给函数为 $Q_{\mathrm{s}}=g(p)=-c+dp$,则均衡价格 $\bar{p}$ 应使供给和需求相等,$Q_{\mathrm{d}}=Q_{\mathrm{s}}$,即

$$a-b\bar{p}=-c+d\bar{p},$$

故均衡价格 $\bar{p}=\dfrac{a+c}{b+d}$,均衡数量 $\bar{Q}=a-b\bar{p}=\dfrac{ad-bc}{b+d}$,如图 1－3 所示.

例 2 设某商品的需求函数为 $Q_d = f(p) = 53 - 2p^2$，供给函数为 $Q_s = g(p) = p - 2$. 试确定该商品的均衡价格、均衡数量.

解 由供需均衡条件 $Q_d = Q_s$ 可得

$$53 - 2p^2 = p - 2.$$

解得 $p_1 = -5.5$（价格一般不取负值，故舍去），$p_2 = 5$.

所以该商品的均衡价格 $\overline{p} = 5$，由此得均衡数量 $\overline{Q} = 3$.

该商品的均衡点是(5,3)，如图 1－4 所示. 当价格低于 5 时需求大于供给；当价格高于 5 时，供给大于需求.

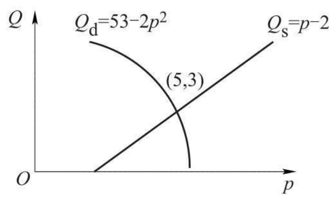


图 1－4

2. 收益函数

总收益是指生产者出售一定数量的产品所得到的全部收入. 收益与产品的价格及销售数量有关. 当产品的单位售价为 p，销售量为 Q 时，总收益函数为

$$R = p \cdot Q.$$

为处理方便，常常假定产销平衡，其含义是供应量、需求量、销售量是统一的. 这时，若已知该商品的需求函数为 $Q = f(p)$，则易知 $p = f^{-1}(Q)$，从而总收益函数可以表示为

$$R = R(Q) = Q \cdot P = Qf^{-1}(Q).$$

例 3 某药厂生产某种药品，年产量为 Q 万瓶，每瓶售价 2 元. 该厂每年的自销量稳定在 50 万瓶，如果委托代销，销售量可上升 20%，但销售量达 60 万瓶时呈饱和状态. 如果代销费为代销部分药价的 40%，试将总收益 R（万元）表示为年产量 Q（万瓶）的函数.

解 (1) 当 $0 \leqslant Q \leqslant 50$ 时，生产的药品可全部自销售出，此时

$$R = R(Q) = 2Q.$$

(2) 当 $50 < Q \leqslant 60$ 时，通过委托代销，可全部售出，扣除代销费 $2 \times 40\%(Q - 50)$，此时

$$R = R(Q) = 2Q - 2 \times 40\%(Q - 50) = 1.2Q + 40.$$

(3) 当 $Q > 60$ 时，即使委托代销，也只能售出 60 万瓶，此时

$$R = R(Q) = 1.2 \times 60 + 40 = 112.$$

综合(1)、(2)、(3)得到总收益 R 与年产量 Q 的函数关系式为

$$R = R(Q) = \begin{cases} 2Q, & 0 \leqslant Q \leqslant 50, \\ 1.2Q + 40, & 50 < Q \leqslant 60, \\ 112, & Q > 60. \end{cases}$$

平均收益是指销售一定量的商品时，每单位商品所得的平均收入，即每单位商品的售价. 平均收益函数记作 AR，即

$$AR = \frac{\text{总收益}}{\text{销量}} = \frac{R(Q)}{Q} = f^{-1}(Q) = p.$$

3. 成本函数

讲到收益，不能不提成本，它们往往是密切联系的. **总成本**是指生产一定数量的产品所耗费的经济资源或费用的总和. 根据成本与产量的关系，一般总成本可分为固定成本与可变成本两部分. 固定成本是指与产量无关的成本，如设备维修费、场地租赁费等，用 C_0 表示. 可变成本随产