

全局优化

点匹配算法研究

连玮◎著

QUANJU YOUHUA
DIAN PIPEI SUANFA YANJIU



四川大学出版社

00100110000

0010111000000

001011110000

100000101

全局优化

点匹配算法研究

QUANJU YOUHUA
DIAN PIPEI SUANFA YANJIU

连 玮◎著



四川大学出版社

责任编辑:蒋 琦
责任校对:王 锋
封面设计:墨创文化
责任印制:王 炜

图书在版编目(CIP)数据

全局优化点匹配算法研究 / 连玮著. —成都: 四川大学出版社, 2018. 9
ISBN 978-7-5690-2386-2

I. ①全… II. ①连… III. ①电子计算机一点集—算法理论—研究 IV. ①TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 216183 号

书名 全局优化点匹配算法研究

著 者	连 玮
出 版	四川大学出版社
地 址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发 行	四川大学出版社
书 号	ISBN 978-7-5690-2386-2
印 刷	成都金龙印务有限责任公司
成品尺寸	148 mm×210 mm
印 张	5.375
字 数	143 千字
版 次	2018 年 10 月第 1 版
印 次	2018 年 10 月第 1 次印刷
定 价	28.00 元



版权所有◆侵权必究

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。

电话:(028)85408408/(028)85401670/
(028)85408023 邮政编码:610065

◆本社图书如有印装质量问题,请
寄回出版社调换。

◆网址:<http://press.scu.edu.cn>

前 言

点匹配是指找到使两点集的相应特征对应在一起的空间变换和对应关系。点匹配是计算机视觉和模式识别领域的一个基本而重要的问题，可用于医学图像处理、立体视觉深度恢复、三维重建、目标跟踪、运动分析等应用问题中。最简单的点匹配问题只包含点的位置信息，而点匹配问题通常存在弹性形变、位置噪声、野点、遮挡、姿态差别等干扰。这使得点匹配问题变得相当具有挑战性。本书尝试从优化的角度解决这个问题。由于该问题的基本性，本书算法经过修改后可用于更复杂问题的求解或为这些问题提供算法思路。

在第 1 章，我们回顾了点匹配算法的研究现状。点匹配算法通常涉及两类变量：空间变换和点对应关系。基于是否对这两类变量建模，点匹配算法可分为如下三类：只建模点对应关系的方法，只建模空间变换的方法，同时建模空间变换和点对应关系的方法。这三类方法各有优缺点。本书算法主要属于第三类方法。由于第三类方法显式地对空间变换进行建模，所以它可以处理复杂弹性形变的情形。由于对点对应关系进行建模，所以本书算法的匹配精度通常比较高。

在第 2 章，我们简要地描述了鲁棒点匹配（Robust Point Matching, RPM）算法。RPM 算法是一种有着广泛影响力的算法。但该算法基于确定性退火的启发式优化策略，不具有全局最

优性,鲁棒性不够好,当问题变难时,有可能失败。同时由于采用了启发式的优化策略,该算法总是需要对空间变换参数进行正则,因此对空间变换不具有不变性(比如不具有旋转不变性)。此外,确定性退火技术倾向于配准两点集的重心。

为解决该问题,在第3章,我们给出了在只有一点集存在野点的情形下,基于分支定界法的针对RPM模型的一种全局优化算法。该算法具有如下优良性质:①分支定界法的分支空间的维数等于空间变换参数的个数。因此当空间变换的参数个数比较少时,该算法的收敛速度会很快。②求下界的问题等价于线性指派问题,可以高效地被求解。因此所得算法运行速度很快。③该算法的下界函数具有紧的性质,因此进一步保证了算法的快速收敛性。但该算法只适用于只有一点集存在野点的情形。为此,我们分别在第4、5章给出了两种处理两点集均有野点的方法。

在第4章,我们给出了基于树表示的具有相似变换不变性的形状匹配算法。该算法首先在模板点集上构造一棵树,然后将点匹配问题转化为在目标点集上定位这棵树的问题。采用分支定界法解决这个问题,因此该算法具有全局最优性,鲁棒性可以得到保证。由于只需要匹配树的边,这使得该算法能够处理只有部分重叠的两点集配准的问题。

对于第4章的方法,当部分重叠的两点集的重叠部分比较少时,仍然有可能失败。为此,在第5章,我们给出了两点集都存在野点的情况下,基于分支定界法的针对RPM模型的一种显式的全局优化算法。该算法可以看作是第3章算法的推广。但该算法的分支空间的维数大于空间变换参数的个数,并且下界函数同原函数的接近程度也不够好。

上述3种算法的共同缺点是都基于分支定界法,因此,在最差情况下具有指数次时间复杂度。当问题规模显著变大时,运行时间仍然会比较长。为此,在第6章,我们给出了基于同伦技术

的适用于两点集都有野点的点集配准算法。该算法具有多项式时间复杂度，运行效率很高，并且在实际测试中，鲁棒性明显好于RPM算法。

第6章的算法属于启发式算法，不能保证具有全局最优性，并且不具有旋转不变性。为此，在第7章，我们给出了一种基于动态规划的适用于一点集存在野点的具有旋转不变的匹配算法。该算法具有多项式时间复杂度。实验表明，该算法的运行效率较高。

由于作者水平有限，本书不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

著 者

2018年3月

目 录

第 1 章 引 言	(1)
1.1 只考虑点对应关系的方法	(2)
1.2 只考虑空间变换的方法	(5)
1.3 同时考虑空间变换和点对应关系的算法	(6)
第 2 章 鲁棒点匹配算法	(12)
2.1 问题的描述	(14)
2.2 二值的点对应关系的缺点	(15)
2.3 软指派	(15)
2.4 确定性退火	(16)
2.5 一种模糊的线性指派——最小二乘能量函数	(17)
2.6 点对应关系的求解	(18)
2.7 空间变换的求解	(19)
2.8 退火方案	(19)
2.9 算法描述	(20)
2.10 同 ICP 算法的关系	(20)
2.11 薄板样条和 TPS-RPM 算法	(21)
2.12 小结	(24)
第 3 章 一点集存在野点的全局优化点匹配算法	(25)
3.1 相关工作	(27)
3.2 能量函数	(28)

3.3	优化	(31)
3.4	实验	(42)
3.5	小结	(59)
第 4 章	基于树表示的相似不变形状匹配算法	(60)
4.1	目标函数的形式	(62)
4.2	优化	(65)
4.3	实验	(71)
4.4	小结	(80)
第 5 章	两点集均存在野点的全局优化点匹配算法	(81)
5.1	一种新的目标函数	(82)
5.2	优化	(92)
5.3	实验	(102)
5.4	小结	(112)
第 6 章	基于低秩同伦技术的点匹配算法	(114)
6.1	RPM 的目标函数	(115)
6.2	只含变量 P 的目标函数	(117)
6.3	基于低秩同伦技术的优化	(119)
6.4	实验结果	(122)
6.5	小结	(126)
第 7 章	适用于杂波场景的旋转不变弹性点匹配算法	(127)
7.1	引言	(127)
7.2	动态规划	(129)
7.3	形状表示方案一：基于最小支撑树诱导三角化的形状表示	(130)
7.4	形状表示方案二：基于星形图的形状表示	(136)
7.5	实验结果	(140)
7.6	小结	(150)
参考文献		(151)

第1章 引言

图像配准是指将不同的图像数据变换到同一坐标系的过程，是对来自不同源的数据进行比较、融合的前期处理过程之一。图像配准是计算机视觉、模式识别、医学图像处理和遥感等领域的一个基础而重要的问题。图像配准的方法可分为基于特征和基于灰度的方法^[10,84,100]。基于特征的方法相比基于灰度的方法有如下优点：① 计算量小。相比图像像素，特征的数量更少，因此基于特征的方法通常速度更快。② 受干扰的影响小。相比图像像素，特征去除了很多同配准不相关的信息，因此受干扰（比如光照、阴影）的影响更小。在图像配准领域中，最常见的特征是点特征，表示为特征的位置。点特征经常是其他更复杂表示（比如曲线、曲面）的基础。在这种意义下，点特征可以看作是所有特征中最基本的特征。然而，使用点特征的配准问题本身是困难的。

一个常见的因素是图像获取和特征提取过程中产生的噪声。噪声的存在导致得到的特征点有可能无法准确被匹配。另外一个因素是野点的存在。一些点特征可能存在于一点集，但在另一点集中却没有对应点，因此在匹配过程中，需要将这些点排除在外。同时，几何变换需要考虑高维的弹性形变来符合点集配准涉及的形变。弹性形变配准的需求出现在很多应用领域中。比如，光学字符识别领域中的手写体识别；在动画设计中，于关键帧之

间生成光滑插值的中间帧；在运动跟踪中，跟踪人体的动作；在医学图像处理领域中，需要配准核磁图像和透视图像；在心脏图像分析中，恢复心脏的动态运动过程；在制作人脑解剖图时，需要配准人脑的 MRF 图像。上述这些任务都涉及找到在紧密相关但不同的物体或形状之间的最优空间变换。综上所述，一个具有一般性的点特征匹配算法需要解决所有这些问题。它应该能够恢复两点集之间的对应关系，去除野点，决定一个好的弹性空间变换，使得该空间变换能够很好地将一点集映射到另一点集。因此，点特征匹配是一个极具挑战性的问题。为此，国内外学者提出了很多点特征匹配算法^[68,86]。这些算法按照是否显式地求解空间变换和点对应关系可分为以下三类。

1.1 只考虑点对应关系的方法

这类方法通常将点匹配问题归结为图匹配问题或马尔可夫随机场（Markov Random Field, MRF）问题而解决。

1.1.1 图匹配算法

图匹配问题可描述成给定两个图及图上顶点、边以及高阶元素（比如边构成的三角形）的相似性，找到这两个图的顶点之间的最佳对应关系。现有的图匹配算法可分为只保持图上边的相似性的二阶图匹配算法和可以保持图上高阶元素相似性的高阶图匹配算法。

（1）二阶图匹配算法。一种经典的算法是渐进指派算法^[37]，该算法通过确定性退火技术来优化一个反映图上边匹配代价的二次目标函数。基于谱分解的图匹配算法^[53]构造一个邻接矩阵，其对角元素反映了对应特征之间的相似程度，非对角元素反映了两对应关系之间的兼容程度，然后求该邻接矩阵的最大特征向

量,其元素绝对值大小反映了某一对应关系的正确程度。该算法的一个缺点是没有考虑点对应关系的一一对应的约束。对此,Cour等提出均衡图匹配算法^[22],通过将一一对应的约束等价转化为一个子空间,该算法将图匹配问题转化为一个低维空间中的谱分解问题。但该算法要求一点集的每一点在另一点集都有对应点,这限制了算法的应用范围。基于谱分解算法^[53]的另一个缺点是需要构造反映任意两点对应关系之间邻接程度的邻接矩阵。但该矩阵的尺寸非常大,是点集元素个数的4次方倍。为解决该问题,Kang等指出邻接矩阵有很大的冗余性,由此构造相应的基矩阵和索引矩阵来近似该矩阵,得到的算法同时具有占用存储空间小和速度快的优点^[51]。邻接矩阵是一个很大的矩阵,实际优化起来比较麻烦。Zhou等考虑了邻接矩阵是否可以分解成低维矩阵的问题,对于无向图和有向图,分别给出了相应的邻接矩阵分解成关于点边之间关联矩阵、点之间邻接矩阵和边之间邻接矩阵的公式^[98-99]。Torki等将点对应关系的求解问题建模成一个空间嵌入问题^[89]。这可以通过构造一个图而实现。图的顶点对应两点集的所有点。图的边及其权重的构造方法如下:两点集之间的任意两点的边的权重取决于这两点的相似程度。每一点集内部的任意两点的边的权重取决于这两点的距离。之后将该图嵌入一个欧几里得空间中,使得权重大的边的两点在位置上靠近。这可以通过对相应的Laplacian图矩阵进行谱分解实现。该算法可以直接推广到多个点集同时配准的问题。但该算法的一个缺点是空间嵌入有可能引起变形,这在两点集存在野点等干扰时尤其严重。整数投影固定点算法^[54]为优化一个二次目标函数,采用了梯度下降结合投影到离散的约束集的方法。重加权随机游走算法^[19]管理经过重加权的跳跃来强化匹配约束。

(2) 高阶图匹配算法。上述二阶图匹配算法只考虑了顶点和边之间的匹配问题。因此对于明显的弹性形变,比如尺度缩放、

剪切的鲁棒性很差。事实上，一些高阶元素，比如三角形，对于形变具有更好的抗干扰性，并且可以用于引入更多的信息，比如图像片上的像素信息。基于这些优点，近年来，一些作者开始考虑高阶图匹配问题。Duchenne 等用一个张量度量高阶元素之间的相似性，由此构造出关于点对应关系的目标函数，接着针对张量的幂迭代技术被用于对目标函数进行优化^[25]。根据采用张量的图匹配目标函数和多线性函数之间的相似性，Ngoc 等给出了采用多线性函数进行优化的图匹配算法^[74]。试验表明，该算法比现有的高阶图匹配算法鲁棒性更好。高阶图匹配算法由于需要保存高阶张量信息，因此对内存的要求很高，只适用于小规模计算问题。

1.1.2 基于 MRF 的算法

基于 MRF 的算法将模板点集中的点看成是 MRF 的顶点，优化目标是保持顶点之间边的关系，其目标函数通常包含特征匹配代价项和约束对应关系的正则项。由于 l_1 范数形式可归结为一个线性规划问题，因此现有很多算法都采用了 l_1 范数形式的正则项。在文献 [45] 中，正则项被用于保持模板形状局部边的长度和方向。但该算法只具有平移不变性。通过显式建模尺度缩放和旋转变换，该算法在文献 [48] 中被推广成具有相似不变性。但该算法中的尺度和旋转都需要量化，并且得到的点对应关系无法保证是离散的，需要进一步采用信任区域法使其离散化。对此，Jiang 等提出基于增广线性树的方法^[46]，优化归结为拉格朗日松弛和一系列的动态规划。基于平面上的一点被不共线的三点的表示具有仿射不变性的性质，Li 等提出一种仿射不变的正则项^[57]。但当特征不明显时，该方法更倾向于匹配小的形状结构。上述算法有如下共同缺点：①算法的成功过分依赖于特征之间的区别程度。当特征不明显时，算法有可能失效。②算法通常要求模板点

集中的每一点在目标点集中有对应点。当模板点集存在野点时, 算法也可能失效。③虽然正则项可能具有旋转不变或仿射不变等性质, 但特征匹配代价项不容易实现这些性质。通常的做法: 计算两特征在不同相对旋转角度下的差别, 取最小值作为它们之间的旋转不变差别。但这样做会显著降低特征的区别能力。针对特征在实现旋转不变后区别力显著下降的问题, 我们提出基于扇形和星形的图模型^[59, 63], 其中特征的正向横轴方向被设置成同扇形或星形长边的方向一致, 一点集到另一点集的匹配通过动态规划而实现。该算法很好地保持了特征的区别能力。

1.2 只考虑空间变换的方法

在这类算法中, 点集通常被认为是对某个未知概率分布采样的结果, 因此点集的配准问题可归结为相应概率分布配准的问题。为免去求解点对应关系, Glaunes 等将点集配准问题转化为两个加权 Dirac 测度之和的配准问题^[35]。但 Dirac 测度在数值上不容易计算。为此, Jian 等采用混合高斯表示点集, 点集配准问题被转化成混合高斯之间的配准问题, 它们之间的 l_2 范数距离被作为目标函数^[42]。Tsin 等的核互相关算法^[90]可看成是该算法在空间变换被限制成刚体变换的特殊情形。通过采用对数—指数函数, Jiang 的算法在文献 [9] 中被进一步修正。在该模型下, 迭代最近点算法^[8]可以看成是一个特例。为引入更加丰富的信息, Wassermann 等将混合高斯模型推广到采用核函数进行混合的张量场模型^[93]。由于混合高斯中的高斯函数是指数衰减的, 因此, 当点集比较稀疏时, 对点集所属概率密度函数的建模不够准确, 导致算法的鲁棒性变差。为此, Gerogiannis 等提出将学生 t -分布函数用于构造混合函数^[34], 它具有重尾分布, 因此当建模稀疏点集的概率密度函数时, 效果更好。直接匹配两概率密度函数

比较困难。为此, Ho 等提出匹配两概率密度函数的矩^[40], 由此得到一个多项式方程组, 可通过代数几何的方法求解该方程组, 从而恢复空间变换。但由于矩的使用, 该算法对遮挡和杂波敏感。Deng 等将薛定谔距离变换用于表示点集, 两点集之间的配准问题被转化为单位希尔伯特球上两点的最短路径问题^[24]。针对只存在刚性变换的两点集的配准问题, Makadia 等给出了一种基于球面调和分析的算法^[69]。由于两点集之间可能存在平移, 该算法首先计算每一点的法线方向, 进而把每一点转化到以该法线方向为方向的单位球面上的一点, 由此消除了两点集之间的平移差别。转化后两球面上的点集之间的旋转关系可通过球面傅立叶变换和 $SO(3)$ 傅立叶变换而解出。 $SO(3)$ 傅立叶变换的计算量比较大。为此, Kazhdan 提出将其中一个形状进行旋转不变处理, 继而配准另一形状的算法^[52]。这时, $SO(3)$ 傅立叶变换降级为球面傅立叶变换, 计算量下降了一个数量级。上述算法的共同优点是无需建模点对应关系, 所以计算量低, 适用于大规模点集配准问题。但由于点对应关系没有满足一一对应的约束, 所以这类算法对杂波、野点的抗干扰性通常比较差。

1.3 同时考虑空间变换和点对应关系的算法

迭代最近点 (Iterative Closest Point, ICP) 算法^[8,96]是一种被广泛使用的算法。该算法在每一步根据最近邻关系确定点对应关系, 再根据点对应关系更新空间变换。该算法具有实现简单、速度快、适合大规模问题、可以并行计算的优点。但由于该算法在优化过程中点对应关系始终是离散的, 因此极易陷入局部极小。ICP 有很多改进算法, 著名的包括 EM-ICP^[79] 和 LM-ICP (Levenberg Marquardt-ICP)^[33] 算法。LM-ICP 算法将两点集的配准问题转化成一点集同另一点集的距离场之间的拟合问题。

这里一点集的距离场定义为空间一点到该点集最近点的距离构成的标量场。接着, Levenberg-Marquardt 技术被用于优化所得问题, 由此解出空间变换。该算法速度很快, 类似于 ICP 算法, 但由于需要先做距离变换, 因此只适用于低维空间的配准问题。Myronenko 等提出一致点漂移算法^[73], 该算法用混合高斯对其中的一个点集建模, 每点作为混合高斯模型中的每个高斯项的中心点, 这样两点集之间的匹配问题被转化为该混合高斯同另一点集的拟合问题。点对应关系和空间变换通过期望-最大化算法交替地解出。Tao 等将一致点漂移算法用于图像匹配问题^[87], 其中混合高斯的权重通过特征匹配代价而决定。协方差驱动算法^[83]用空间变换的协方差来帮助确定对应关系。但由于协方差矩阵的元素个数是空间变换参数个数的平方倍, 所以该算法只适用于空间变换参数比较少的情形。基于 L2E 鲁棒估计算子, Ma 等给出了一种更加鲁棒的确定空间变换的方法^[66]。

鲁棒点匹配 (Robust Point Matching, RPM) 算法^[21]是一种影响力比较大的算法。该算法将点匹配问题建模成一个混合的线性指派——最小二乘问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{P}, \boldsymbol{\theta}} E(\mathbf{P}, \boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i,j} p_{ij} \| \mathbf{y}_j - T(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}) \|_2^2 + g(\boldsymbol{\theta}) + h(\mathbf{P}) \\ \text{s. t. } \sum_i p_{ij} &\leq 1, \sum_j p_{ij} \leq 1, p_{ij} \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (1.1)$$

式中, $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_j$ 分别是两点集中点的坐标; $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ 为点对应关系矩阵, 其元素 p_{ij} 取 1 或 0, 分别表示相应的点 $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_j$ 是否对应; $T(\cdot; \boldsymbol{\theta})$ 表示参数为 $\boldsymbol{\theta}$ 的空间变换; 函数 g , h 分别是对 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\mathbf{P}$ 的正则。为优化该问题, 在文献 [21] 中, 对应关系被松弛成可以取连续值并且满足一一对应的约束 (即软指派), 确定性退火技术被用于控制点对应关系的模糊程度, 由此逐渐地恢复点对应关系和空间变换。但确定性退火技术存在如下缺点: ①因为它是启发式的, 所以算法需要对空间变换正则以避免不好

的匹配结果, 因此该算法无法做到旋转不变; ②它倾向于配准两点集的重心。针对确定性退火的缺点, Pfeuffer 等提出基于分支定界法的两种优化 RPM 问题的算法^[78]。第一种算法对点对应关系进行分支, 但由于点对应关系的变量个数是两点集中元素个数的乘积, 数量巨大, 所以该算法速度很慢, 只适用于小规模计算问题。第二种算法对空间变换进行分支, 但由于目标函数缺乏良好的优化性质 (比如凹性或凸性), 所以算法的收敛速度较慢。对此, 我们在空间变换关于参数是线性的前提下, 提出采用超立方体分支定界法优化 RPM 问题的算法^[60]。该算法的分支空间维数等于空间变换参数个数。当空间变换参数个数较少时 (比如二维相似变换或二维/三维仿射变换), 该算法的收敛速度比较快。同时由于分支定界法的采用, 该算法具有全局最优性, 对干扰的鲁棒性很强, 不需要对空间变换进行正则, 因此对相应的空间变换具有不变性, 可用于比如旋转不变的两点集的匹配问题。但该算法的求下界问题是一个一般的线性规划问题, 没有高效算法, 因此整个算法的运行速度仍然比较慢。对此, 我们提出一种新的求下界方案, 使得下界问题可以归结为线性指派问题, 高效的组合优化算法如 Jonker-Volgenant 算法可用于对该问题快速求解, 由此获得 500 倍的速度提升^[62]。进一步, 我们发现对分支定界法的分支环节进行修改, 不是只对一个超立方体进行分支, 而是对多个超立方体进行分支, 可以增大或缩小包含全局最优解的超立方体的可能性, 由此进一步获得 10 倍的速度提升^[62]。针对该算法只适用于一点集不存在野点的情形, 我们提出采用单纯形分支定界法优化 RPM 问题的算法^[61], 可用于两点集同时存在野点的情形。但该算法的分支空间维数略高于空间变换参数的个数, 因此收敛速度不如算法^[60]。为了保证目标函数在一个包含可行域的更大的简单形状 (比如单纯形的并集) 上是凹的, 该算法需要对空间变换进行正则, 无法做到对相应的空间变换具有

不变性，由此无法用于比如旋转不变的两点集的匹配问题。针对采用分支定界法的算法^[60-61]具有非多项式复杂度、计算量大的缺点，我们在文献 [58] 中提出采用同伦技术优化 RPM 问题的算法。该算法的鲁棒性虽然不如文献 [60-61] 的算法，但比其他启发式算法的鲁棒性更高，并且运行速度快。

同匹配问题相关的一类问题是鲁棒参数估计问题，具体的例子包括直线/圆检测、误匹配去除、立体摄像机中的基础矩阵估计、三维重建中的三角化等问题。该类问题中，野点的存在导致传统的参数估计算法（比如最小二乘法）失效。求解该问题的经典方法是 Hough 变换方法。但 Hough 变换方法的精度和鲁棒性依赖于累计器的量化程度。近年来，一致集合最大化（Consensus Set Maximization, CSM）作为一种准则被广泛使用。它的目标是找一个参数，使得在该参数下，误差小于阈值的数据个数达到最大。近似优化 CSM 准则的经典算法是随机抽样一致性（Random Sample Consensus, RANSAC）算法。它通过随机采样的办法找到一个参数，使得在该参数下，误差小于阈值的数据尽可能地多。但 RANSAC 基于随机理论，不具有确定性，对于同样的数据，多次求解可能得到不同的结果。因此后续很多学者研究针对 CSM 准则的全局优化算法。Olsson 等给出了基于线性规划对偶理论的算法^[75]。Sim 等给出了采用 l_∞ 范数的算法^[82]。Chin 等提出采用 A^* 理论进行树搜索的算法^[18]，进而又提出基于混合整数线性规划的算法^[17]。但这些算法通常包含误差小于某一阈值的约束，比如 $|\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}_i| \leq \epsilon$ 。复杂约束的存在会导致优化问题变难，从而降低算法的运行效率。

RPM 模型 (1.1) 具有如下优点：

(1) 该模型中的空间变换具有显式形式，因此很容易对存在显著形变的情形进行建模。相比之下，二阶图匹配算法通过边之间的相似性隐式地建模空间变换，因此对显著形变的鲁棒性很