

GAOKAO SHUXUE 高分之路拾级而上
JINJIE TEXUN



高考数学

进阶特训

1

(函数、三角函数、三角恒等变换)

主编◎张传鹏

本册主编◎张传鹏 徐国君 吴锋刃

● 高一上学期同步培优 ● 高考复习专题突破 ● 40小时精准训练“最有价值”的数学题

高考数学进阶特训 1

函数、三角函数、三角恒等变换

主 编 张传鹏

本册主编 张传鹏 徐国君 吴锋刃

图书在版编目(CIP)数据

高考数学进阶特训. 1, 函数、三角函数、三角恒等
变换 / 张传鹏主编. —杭州: 浙江大学出版社,
2016. 8(2017. 3 重印)
ISBN 978-7-308-15810-7

I. ①高… II. ①张… III. ①中学数学课—高中—习
题集—升学参考资料 IV. ①G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 090005 号

高考数学进阶特训 1(函数、三角函数、三角恒等变换)

主编 张传鹏

策 划 陈海权(电子信箱: chess332@163. com)
责任编辑 夏晓冬
责任校对 金佩雯 陈 宇
封面设计 林智广告
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址: <http://www.zjupress.com>)
排 版 杭州星云光电图文制作有限公司
印 刷 嘉兴华源印刷厂
开 本 889mm×1194mm 1/16
印 张 6. 25
插 页 26
字 数 310 千
版 次 2016 年 8 月第 1 版 2017 年 3 月第 3 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-15810-7
定 价 19. 80 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行中心联系方式: 0571-88925591; <http://zjdxcbbs.tmall.com>

编写说明

课程标准前言中指出:数学在形成人类理性思维和促进个人智力发展的过程中发挥着独特的、不可替代的作用;在形成人们认识世界的态度和思想方法方面、在推动社会进步和发展的进程中起着重要的作用,而理性思维的形成又是以数学题目为载体的。通过对近年各地数学高考试卷研究来看,高考考查的知识面广,主要考查考生对高中数学各块知识的运算变形能力、信息整合能力、数学思维方法运用能力及创新思维能力等,因此教师在平时的教学备课中选题就显得尤为重要。为了使学生日常练习更加有效,更有针对性、科学性和高效性,我们认真编写了此书,旨在帮助广大学生在复习时起到事半功倍、触类旁通的效果。

本书大多数习题是近年在杭州外国语学校高中数学课堂实践的基础上发展与完善的,这些试题非常具有代表性。本书起点低,目标高,可以供不同层次的学生使用。书中不仅解答题有详细答案,同时许多填空题和选择题也给了解析或提示,可以供同学们自学使用。本书在解答过程中,对典型题目采取一题多解、一题多变,使学生不仅知其然,而且知其所以然。解题方法新颖、有效,解法大气,不追求小技巧,注重通性、通法,不刻意追求巧解、妙解。

本书力争成为一本非常有效的学生备考指南,可以供高一、高二学生在学习新课后进行同步加深,也可以供高三学生在高考一轮复习时使用,当然也可以作为教师备课的参考工具书。本书是编撰人员精心设计、用心编写而成的,但限于能力和水平,编写中难免有疏漏和不妥之处,恳请广大读者和数学同行批评指正,以便不断修正和完善,在此表示衷心的感谢!

我的联系方式是:zhangzcp508@sina.com。

张传鹏
2016年7月

目 录

特训 1	集合基本运算	(1)
特训 2	函数及其表示	(5)
特训 3	函数的单调性与最值	(9)
特训 4	函数的奇偶性	(13)
特训 5	指数、对数运算	(17)
特训 6	指数函数	(21)
特训 7	对数函数	(25)
特训 8	指、对函数综合	(29)
特训 9	幂函数与二次函数	(33)
特训 10	集合与函数综合(1)	(37)
特训 11	集合与函数综合(2)	(41)
特训 12	函数与方程	(45)
特训 13	函数模型及其应用	(49)
特训 14	函数综合	(53)
特训 15	任意角的三角函数	(57)
特训 16	同角三角函数基本关系	(61)
特训 17	诱导公式	(65)
特训 18	三角函数图象与性质	(69)
特训 19	函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与三角函数模型简单应用	(73)
特训 20	三角函数单元测试卷	(77)
特训 21	两角和与差的正弦、余弦和正切公式	(81)
特训 22	三角函数、三角恒等变换综合	(85)
特训 23	函数、三角综合(1)	(89)
特训 24	函数、三角综合(2)	(93)
参考答案		(97)



特训1 集合基本运算

[满分 100 分, 限时 100 分钟]

训练内容:

集合概念、集合性质, 集合间的关系、集合相等, 集合之间的交、并、补集运算.

一、选择题(本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 则集合 $B = \{x - y | x \in A, y \in A\}$ 中元素的个数是 ()

A. 1 B. 3 C. 5 D. 9

2. 集合 $A = \left\{ x \left| y = \frac{12}{x+3}, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z} \right. \right\}$ 中元素个数是 ()

A. 4 个 B. 5 个 C. 11 个 D. 12 个

3. 已知集合 $A = \{3, 3+m, 3+5m\}$, 集合 $B = \{3, 3n, 3n^2\}$, 如果 $A = B$, 则 m, n 的值为 ()

A. $\begin{cases} m=9 \\ n=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=-\frac{27}{25} \\ n=-\frac{4}{5} \end{cases}$ B. $\begin{cases} m=9 \\ n=4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m=-\frac{27}{25} \\ n=-\frac{4}{5} \end{cases}$ D. $\begin{cases} m=0 \\ n=1 \end{cases}$

4. 已知集合 $M = \{1, 2, m^2 - 3m - 1\}$, 集合 $N = \{-1, 3\}$, $M \cap N = \{3\}$, 则 m 的值为 ()

A. 4, -1 B. -1

C. 1, -4 D. 4

5. 设集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 7\}$, 集合 $B = \{x | m+1 < x < 2m-1\}$ 且集合 $B \neq \emptyset$, 若 $A \cup B = A$, 则 ()

A. $-3 \leq m \leq 4$ B. $-3 < m < 4$

C. $2 < m < 4$ D. $2 < m \leq 4$

6. 已知集合 $A = \{(x, y) | y = 2x + 1\}$, 集合 $B = \{x | y = x - 1\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

A. $\{-2\}$ B. $\{(-2, -3)\}$

C. $\emptyset$ D. $\{-3\}$

7. 设集合 $A = \{x | |x - a| < 1, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{x | |x - b| > 2, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 a, b 必满足 ()

A. $|a - b| \geq 3$ B. $|a + b| \geq 3$

C. $|a - b| \leq 3$ D. $|a + b| \leq 3$

8. 设非空集合 $S = \{x | m \leq x \leq l\}$ 满足: 当 $x \in S$ 时, 有 $x^2 \in S$. 给出如下三个命题: ①若 $m = 1$, 则 $S = \{1\}$;

②若 $m = -\frac{1}{2}$, 则 $\frac{1}{4} \leq l \leq 1$; ③若 $l = \frac{1}{2}$, 则 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 0$. 其中正确命题的个数是 ()

A. 0 个 B. 1 个

C. 2 个 D. 3 个



二、填空题(本大题共 7 小题,每小题 4 分,共 28 分)

9. 已知集合 $A = \{0, 1, -1, 2, -2, 3\}$, 集合 $B = \{y | y = x^2 - 1, x \in A\}$, 则集合 $B =$ _____.
10. 已知集合 $A = \{x | |x + 2| < 3, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{x | (x - m)(x - 2) < 0, x \in \mathbf{R}\}$, 且 $A \cap B = (-1, n)$, 则 $m + n =$ _____.
11. 设 a, b, c 为非零实数, 则 $x = \frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} + \frac{c}{|c|} + \frac{|abc|}{abc}$ 的所有值组成的集合为 _____.
12. 已知集合 $A = \{0, 2, a^2\}$, 集合 $B = \{1, a\}$, 若 $A \cap B = \{1\}$, 则 $a =$ _____.
13. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$, 集合 $B = \{x | ax - 1 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 则 $a =$ _____.
14. 已知集合 M 满足 $\{1, 2\} \subsetneq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则满足条件的集合 M 有 _____ 个.
15. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 2mx + m^2 - 4 \leq 0\}$, 若 $A \subseteq \complement_{\mathbf{R}} B$, 则实数 m 的取值范围是 _____.

三、解答题(本大题共 5 小题,共 48 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (本题 8 分) (1) 已知集合 $A = \{a - 2, 2a^2 + 5a, 10\}$, 并且 $-3 \in A$, 求 a 的值;
- (2) 已知集合 $A = \left\{ a \mid \frac{x+a}{x^2-2} = 1 \text{ 有唯一实数解} \right\}$, 试用列举法表示集合 A .

17. (本题 10 分) 设集合 $A = \{x | x^2 + 6x = 0\}$, 集合 $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 a 的取值范围.



18. (本题 10 分) (1) 设集合 $U = \{1, 2, 3\}$, M, N 是 U 的子集, 若 $M \cap N = \{1, 3\}$, 则称 (M, N) 为一个“理想配集”, 求符合此条件的“理想配集”的个数 [规定 (M, N) 与 (N, M) 不同];
- (2) 设非空集合 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq a\}$, 集合 $B = \{y \mid y = 2x + 3, x \in A\}$, 集合 $C = \{y \mid y = x^2, x \in A\}$, 求使得 $C \subseteq B$ 时 a 的取值范围.

19. (本题 10 分) 设全集是实数集 $\mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid 2x^2 - 7x + 3 \leq 0\}$, 集合 $B = \{x \mid x^2 + a < 0\}$,
- (1) 当 $a = -4$ 时, 求 $A \cap B$ 和 $A \cup B$;
- (2) 若 $(\complement_U A) \cap B = B$, 求实数 a 的取值范围.



20. (本题 10 分) (1) 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 > 0\}$, 集合 $B = \{x \mid x^2 + ax + b \leq 0\}$, 且 $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = \{x \mid 3 < x \leq 4\}$, 求 a, b 的值.
- (2) 设集合 $A = \{(x, y) \mid y^2 - x - 1 = 0\}$, 集合 $B = \{(x, y) \mid 4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0\}$, 集合 $C = \{(x, y) \mid y = kx + b\}$, 是否存在 $k, b \in \mathbf{N}$, 使得 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$? 若存在, 请求出 k, b 的值; 若不存在, 请说明理由.



特训2 函数及其表示

[满分 100 分, 限时 100 分钟]

训练内容:

函数定义、函数的三要素, 函数的各种表示方法, 求函数的解析式、定义域和值域.

一、选择题(本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 下列式子中不能表示函数 $y=f(x)$ 的是 ()

A. $x=y^2+1$

B. $y=2x^2+1$

C. $x-2y=6$

D. $x=\sqrt{y}$

2. 函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$ 的定义域是 ()

A. $\{x|x\geq 0\}$

B. $\{x|x\geq 1\}$

C. $\{x|x\geq 1\}\cup\{0\}$

D. $\{x|0\leq x\leq 1\}$

3. 函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $x=a$ 的交点个数是 ()

A. 至少有一个

B. 至多有一个

C. 必有一个

D. 有一个或两个

4. 函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\leq -1, \\ x^2, & -1<x<2, \\ 2x, & x\geq 2, \end{cases}$ 若 $f(x)=3$, 则 x 的值是 ()

A. 1

B. $\pm\sqrt{3}$

C. $\frac{3}{2}, 1$

D. $\sqrt{3}$

5. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x-8}$ 的定义域为 A , 函数 $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-|x-a|}}$ 的定义域为 B , 若 $A\cap B=\emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-2, 4)$

B. $[-1, 3]$

C. $[-2, 4]$

D. $(-1, 3)$

6. 若函数 $f(x)=x^2-3x-4$ 的定义域是 $[0, m]$, 值域为 $[-\frac{25}{4}, -4]$, 则 m 的取值范围是 ()

A. $(0, 4)$

B. $[\frac{3}{2}, 4]$

C. $[\frac{3}{2}, 3]$

D. $(\frac{3}{2}, +\infty)$

7. 若一系列函数的解析式相同、值域相同, 但定义域不同, 则称这些函数为“孪生函数”, 那么函数解析式为 $y=2x^2-1$, 值域为 $\{3, 7\}$ 的“孪生函数”共有 ()

A. 7 个

B. 8 个

C. 9 个

D. 10 个



8. 设 $[x]$ 表示数 x 的整数部分 (即小于等于 x 的最大整数), 例如: $[3.15]=3, [0.7]=0, [-1.25]=-2$,

那么函数 $y = \left[\frac{x+1}{2} \right] - \left[\frac{x}{2} \right], (x \in \mathbf{R})$ 的值域为 ()

- A. $\{0, 1\}$ B. $[0, 1]$
C. $\{0, 1, 2\}$ D. $[0, 2]$

二、填空题 (本大题共 7 小题, 每小题 4 分, 共 28 分)

9. 已知 $f(x) = x^2 + 1$, 则 $f(f(-1)) =$ _____.

10. 函数 $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x-1}$ 的定义域为 _____.

11. 函数 $f(x)$ 的图象如右图所示, 则 $f(x)$ 的值域为 _____.

12. 已知 $f(2x+1) = x^2 - 2x$, 则 $f(x) =$ _____.

13. 已知 $f(x) = \frac{mx}{4x-3} \left(x \neq \frac{3}{4} \right)$ 在定义域内恰有 $f(f(x)) = x$, 则实数 $m =$ _____.

14. 已知函数 $y = ax^2 - ax - 4 (x \in \mathbf{R})$, 若 $y < 0$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 _____.

15. 若函数 $y = \frac{mx-1}{mx^2+4mx+3}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则实数 m 的取值范围是 _____.

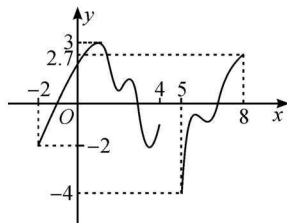
三、解答题 (本大题共 5 小题, 共 48 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (本题 9 分) 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \sqrt{x+8} + \sqrt{3-x};$$

$$(2) y = \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2}}{x-1};$$

$$(3) y = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{|x| - x}}}.$$



第 11 题图



17. (本题 9 分) 求下列函数的值域.

$$(1) y = \sqrt{5+4x-x^2};$$

$$(2) y = 2x + \sqrt{x-1}.$$

18. (本题 10 分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} cx+1, & 0 < x < c, \\ 3x^{4c} + x^{2c}, & c \leq x < 1 \end{cases}$ 满足 $f(c^2) = \frac{9}{8}$.

(1) 求常数 c 的值;

(2) 解不等式 $f(x) < 2$.



19. (本题 10 分) 已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为 a , 且不等式 $f(x) > -2x$ 的解集为 $(1, 3)$.

- (1) 若方程 $f(x) + 6a = 0$ 有两个相等的根, 求 $f(x)$ 的解析式;
(2) 若 $f(x)$ 的最大值为正数, 求 a 的取值范围.

20. (本题 10 分) 定义: 若函数 $f(x)$ 对于其定义域内的某一数 x_0 , 有 $f(x_0) = x_0$, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个不动点. 已知函数 $f(x) = ax^2 + (b+1)x + b - 1 (a \neq 0)$.

- (1) 当 $a = 1, b = -2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的不动点;
(2) 若对任意的实数 b , 函数 $f(x)$ 恒有两个不动点, 求 a 的取值范围;
(3) 在(2)的条件下, 若 $y = f(x)$ 的图象上两个点 A, B 的横坐标是函数 $f(x)$ 的不动点, 且 A, B 的中点 C 在函数 $g(x) = -x + \frac{a}{5a^2 - 4a + 1}$ 的图象上, 求 b 的最小值.

[参考公式: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 连线的中点坐标为 $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$]



特训3 函数的单调性与最值

[满分 100 分, 限时 100 分钟]

训练内容:

函数单调性的定义、求函数单调区间、利用函数单调性求函数的最值、解不等式及其他一些应用.

一、选择题(本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 下列函数在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数的是 ()

- A. $y=1-x^2$ B. $y=1+\frac{1}{x}$
C. $y=3x+1$ D. $y=(x+1)^2$

2. 函数 $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x \geq 1 \\ 5-x, & x < 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的递减区间是 ()

- A. $[1, +\infty)$ B. $(-\infty, 2)$
C. $(0, +\infty)$ D. $(-\infty, 1]$

3. 函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$ 的最小值是 ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$
C. 2 D. 0

4. 设函数 $f(x)=(2a-1)x+b$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则 ()

- A. $a \geq \frac{1}{2}$ B. $a \leq \frac{1}{2}$
C. $a > \frac{1}{2}$ D. $a < \frac{1}{2}$

5. 若函数 $y=ax^2+b$ 在区间 $[-3, -1]$ 上是增函数, 那么该函数在区间 $[1, 3]$ 上是 ()

- A. 减函数 B. 增函数
C. 部分递增部分递减 D. 不存在单调性

6. 已知函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且 $f(m^2) > f(-m)$, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(0, +\infty)$
C. $(-1, 0)$ D. $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

7. 已知函数 $f(x)$ 的递增区间是 $(-2, 3)$, 则函数 $f(x+5)$ 的递增区间是 ()

- A. $(3, 8)$ B. $(-7, -2)$
C. $(-2, 3)$ D. $(0, 5)$

8. 已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则满足 $f\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) < f(1)$ 的实数 x 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 1)$ B. $(0, 1)$
C. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ D. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

二、填空题(本大题共 7 小题, 每小题 4 分, 共 28 分)

9. 如果函数 $y=x^2+ax+2$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上是减函数, 那么实数 a 的取值范围是_____.

10. 函数 $y=\sqrt{x^2+2x-3}$ 的减区间是_____.



11. 已知函数 $f(x+1)=x^2-2x+1$ 的定义域是 $[-2,0]$, 则 $f(x)$ 的单调递减区间是_____.

12. 已知函数 $f(x)$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的减函数, 那么 $f(a^2-a+1)$ 与 $f\left(\frac{3}{4}\right)$ 之间的大小关系是_____.

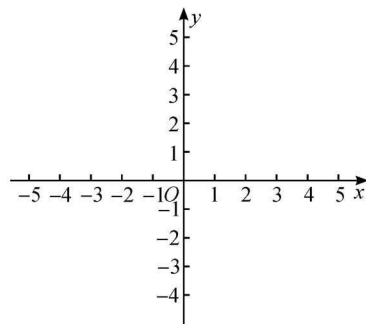
13. 若 $y=ax, y=\frac{-b}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上都是减函数, 则函数 $y=ax^2+bx$ 在 $(0, +\infty)$ 上是_____ (填“增”或“减”) 函数.

14. 若函数 $f(x)=a|x-b|+2$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上为增函数, 则实数 a, b 的取值范围分别是_____.

15. 若 $f(x)=\frac{ax+1}{x+2}$ 在区间 $(-2, +\infty)$ 上是增函数, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题 (本大题共 5 小题, 共 48 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (本题 8 分) 画出函数 $f(x)=x^2-2|x|-1$ 的图象, 并写出该函数的单调区间与值域.



17. (本题 10 分) 已知函数 $f(x)=x^2+2ax+2, x \in [-5, 5]$.

(1) 当 $a=-1$ 时, 求函数的最大值和最小值;

(2) 求实数 a 的取值范围, 使 $y=f(x)$ 在区间 $[-5, 5]$ 上是单调函数.



18. (本题 10 分) 探究函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}, x \in (0, +\infty)$ 的图象时, 列表如下:

x	...	0.5	1	1.5	1.7	1.9	2	2.1	2.2	2.3	3	4	5	7	...
y	...	8.5	5	4.17	4.05	4.005	4	4.005	4.02	4.04	4.3	5	5.8	7.57	...

观察表中 y 的值随 x 的值的变化的情况, 完成以下问题:

(1) 求函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}, x \in (0, +\infty)$ 的单调区间;

(2) 若对任意的 $x \in [1, 3], f(x) \geq m+1$ 恒成立, 试求实数 m 的取值范围.

19. (本题 10 分) 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 且满足 $f(xy) = f(x) + f(y), f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$,

如果对于 $0 < x < y$, 都有 $f(x) > f(y)$.

(1) 求 $f(1)$ 的值;

(2) 解不等式: $f(-x) + f(3-x) \geq -2$.



20. (本题 10 分) 已知函数 $f(x-2) = ax^2 - (a-3)x + (a-2)$ ($a \in \mathbf{Z}^-$) 的图象过点 $(m, 0)$ ($m \in \mathbf{R}$), 设 $g(x) = f(f(x))$, $F(x) = p \cdot g(x) + q \cdot f(x)$ ($p, q \in \mathbf{R}$) (其中 $\mathbf{Z}^-$ 表示负整数).

(1) 求 a 的值;

(2) 求函数 $F(x)$ 的解析式;

(3) 是否存在实数 p ($p > 0$) 和 q , 使 $F(x)$ 在区间 $(-\infty, f(2)]$ 上是增函数且在 $(f(2), 0)$ 上是减函数? 请证明你的结论.