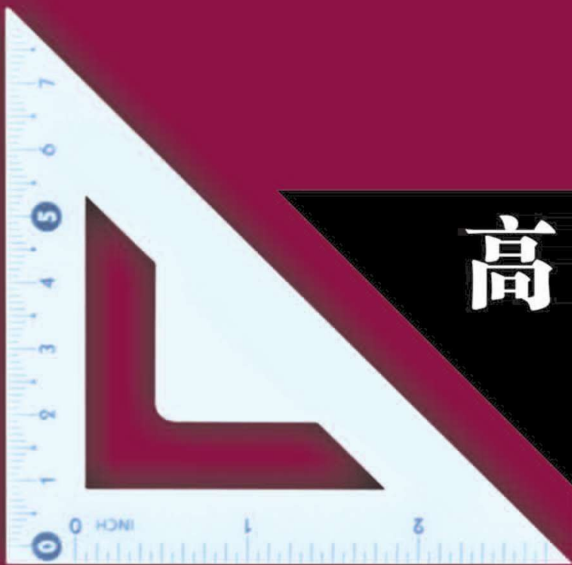
高职高专数学系列教材



# 高等数学辅导与练习

GAODENG SHUXUE FUDAO YU LIANXI

## 下

主 编 郭洪奇 简辉春 孟 渝

电子科技大学出版社

高职高专数学系列教材

# 高等数学辅导与练习

（下册）

总主编　李坤琼　郭洪奇
主　编　郭洪奇　简辉春　孟　渝
副主编　李坤琼　刘　双　方明华　赵　明
参　编　孙婷雅
主　审　李坤琼



UESTCP
电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导与练习. 下册 / 郭洪奇, 简辉春, 孟渝主编. —成都：电子科技大学出版社, 2017.6

ISBN 978-7-5647-4759-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①郭… ②简… ③孟… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 147178 号

## 内容提要

《高等数学辅导与练习》分上、下两册,本册是与高职高专教材《高等数学》(下册)配套的教辅材料.内容包括空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、线性代数基础、概率论简介.充分配合教材课堂教学,辅助学习高等数学各章节知识,也可兼作学生课外作业本.本书各章节由基本要求、知识点、内容提要、题型示例、课外作业、自我检测题、专升本检测题几部分组成,并附全书习题答案或解答.本书可供三年制高职高专教与学和专升本复习等使用.

**高职高专数学系列教材 · 高等数学辅导与练习(下册)**

GAODENG SHUXUE FUDAO YU LIANXI(XIACE)

**郭洪奇　简辉春　孟　渝　主　编**

**李坤琼　刘　双　方明华　赵　明　副主编**

策划编辑　吴艳玲
责任编辑　吴艳玲

出版发行　电子科技大学出版社
　　　　　成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦九楼　邮编　610051
主　　页　www.uestcp.com.cn
服务电话　028－83203399
邮购电话　028－83201495

印　　刷　重庆学林建达印务有限公司
成品尺寸　185mm × 260mm
印　　张　10
字　　数　250 千字
版　　次　2017 年 6 月第一版
印　　次　2017 年 6 月第一次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5647-4759-6
定　　价　22.80 元

# 前言

根据教育部制定的《高职高专教育专业人才培养目标及规格》和《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，针对高职教育既属高等教育层次，又属职业教育类型的特征，我们组织了富有高职高专教育、教学经验的专家及一线教师，在认真研究高职高专教育面临的新形势和新问题的基础上，尝试了因材施教的创新举措. 同时为满足高职院校专升本的高等数学考试复习要求，也参照了“2014 重庆普通专升本‘高等数学’考试大纲”的要求，编写了《高等数学辅导与练习》.

为了进一步增强高等数学课程“培养能力，重在应用”的功能，与教材配套的《高等数学辅导与练习》是以教材为主线，章、节名和先后顺序均与教材吻合. 各章节由基本要求、知识点、内容提要、题型示例、课外练习、自我检测题、专升本检测题组成. 其中，基本要求和知识点提出了本章重难点及各知识点要求掌握程度；内容提要概括了各节主要内容；题型示例补充了教材的典型题型，并详细分析解答；课外练习可作为学生课后作业；自我检测题可及时检测学生学习情况；专升本检测题适用于有意向专升本学生练习. 书中带 * 号为选学内容（或为专升本不要求内容），各校根据情况选择使用. 这既是一本教辅，又是一本练习册，极具可导、可练、可测性.

《高等数学辅导与练习》（上册）、（下册）与《高等数学》（上册）、（下册）配套. 上册内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程. 下册内容包括：空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、线性代数基础、概率论简介.

《高等数学辅导与练习》（上册）第 2,3,4,5,6 章由李坤琼编写，第 1,7,8 章由刘双编写，第 1 章第 1.2 节由方明华、赵明

编写；《高等数学辅导与练习》（下册）第 9，10，11 章由郭洪奇编写；第 12 章由简辉春编写；第 13 章由孟渝编写.

编写组成员

上　册：主　编　李坤琼　刘　双　方明华

副主编　郭洪奇　简辉春　孟　渝　赵　明

参　编　孙婷雅

下　册：主　编　郭洪奇　简辉春　孟　渝

副主编　李坤琼　刘　双　方明华　赵　明

参　编　孙婷雅

《高等数学辅导与练习》在编写过程中得到了重庆市数学学会高职高专委员会的指导，得到了重庆市国家师范高职院校以及一些举办了高职高专教育的各级、各类学校领导和教师的大力支持和帮助，在此表示诚挚的感谢.

由于《高等数学辅导与练习》具有创新的模式，编写它是一种尝试，且编者水平有限，时间仓促，难免有缺点和错误，恳请读者批评指正.

《高等数学》编写组

2017 年 2 月

# 目　录


第 9 章　空间解析几何 1

§9.1　空间直角坐标系 …… 1

§9.2　空间的向量 …… 3

§9.3　空间的平面 …… 6

§9.4　空间的直线 …… 8

* §9.5　空间曲线与曲面 …… 11

自我检测题 9 …… 14

专升本检测题 9 …… 15

第 10 章　多元函数微积分 18

§10.1　二元函数及极限 …… 18

§10.2　偏导数与全微分 …… 22

§10.3　二元函数的极值 …… 25

§10.4　二重积分 …… 29

自我检测题 10 …… 33

专升本检测题 10 …… 35

第 11 章　无穷级数 38

§11.1　无穷级数的概念和性质 …… 38

§11.2　常数项级数 …… 41

§11.3　幂级数及其收敛性 …… 46

* §11.4　傅立叶级数 …… 49

自我检测题 11 …… 53

专升本检测题 11 …… 56

第 12 章 线性代数基础 60

§12.1 行列式 …… 60
§12.2 矩阵 …… 65
§12.3 矩阵初等变换与秩 …… 69
§12.4 线性方程组 …… 75
自我检测题 12 …… 79
专升本检测题 12 …… 83

第 13 章 概率论初步 86

§13.1 随机事件及概率 …… 86
§13.2 条件概率与独立性 …… 90
*§13.3 全概率及贝叶斯公式 …… 94
§13.4 随机变量及分布 …… 98
§13.5 随机变量的数字特征 …… 104
自我检测题 13 …… 108
专升本检测题 13 …… 110
参考答案 …… 114

附录 145

附录 1 数学建模简介 …… 145
附录 2 2014 年重庆市普通高校“专升本”统一选拔考试“高等数学”大纲 …… 149

参考文献 …… 154

# 第 9 章　空间解析几何

**【知识点】**

1. 向量的运算,向量平行垂直的条件.
2. 平面方程.
3. 空间直线方程.
4. 平面、直线间的平行垂直关系.

**【基本要求】**

1. 理解向量的概念,掌握向量的坐标表示法,会求单位向量、方向余弦.
2. 掌握向量的线性运算、向量的数量积、向量积的计算方法.
3. 熟练掌握二向量平行、垂直的条件.
4. 会求平面的点法式方程、一般式方程、截距式方程,会判定两平面的垂直、平行.
5. 了解直线的一般式方程,会求直线的对称式(点向式)方程、参数式方程,会判定两直线平行、垂直.
6. 会判定直线与平面的位置关系(垂直、平行、直线在平面上).

## §9.1　空间直角坐标系

### 一、内容提要

1. 右手螺旋法则;3 个坐标轴.
2. $xOy, yOz, xOz$ 坐标面;8 个卦限.
3. 空间任意两点间的距离公式:$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.
4. 点 $M(x,y,z)$ 到坐标原点的距离:$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

### 二、题型示例

**例 1**　若点 $P$ 坐标为$(\sin\theta,\cos\theta,1)$,它关于原点的对称点在六卦限,试判定 $\theta$ 的象限.

**解**　因为 $P(\sin\theta,\cos\theta,1)$关于原点的对称点在六卦限,所以 $P(\sin\theta,\cos\theta,1)$应为四卦限

的点，因此 $\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$，则 $\theta$ 应为二象限的角.

**例 2** 设点 $P$ 在 $x$ 轴上，它到点 $P_1(0,\sqrt{2},3)$ 的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$ 的距离的两倍，求 $P$ 点的坐标.

**解** 由于点 $P$ 在 $x$ 轴上，因此它的坐标可设为 $(x,0,0)$，据两点间的距离公式有

$$|PP_1|=\sqrt{(x-0)^2+(0-\sqrt{2})^2+(0-3)^2}=\sqrt{x^2+11}$$

$$|PP_2|=\sqrt{(x-0)^2+(0-1)^2+(0+1)^2}=\sqrt{x^2+2}$$

据题意 $|PP_1|=2|PP_2|$，故 $\sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2}$

从而得 $x=\pm1$，所以点 $P$ 的坐标为 $(1,0,0)$ 与 $(-1,0,0)$.

## 三、课外练习

1. 分别作图示意点 $P(2,3,2)$ 与坐标原点及各坐标轴、坐标面间的距离.

2. 设点 $P$ 坐标为 $(1,-2,1)$，点 $P$ 关于原点的对称点为 $P_1$，关于 $y$ 轴的对称点为 $P_2$，求 $|P_1P_2|$.

3. 设点 $P(\sin\theta,\cos\theta,2)$ 到点 $(1,1,2)$ 的距离等于它到坐标原点的距离，求 $\theta$.

4. 已知点 $(0,0,0)$，$(2,0,0)$，$(0,-4,0)$，$(0,0,4)$ 在同一个球面上，试求该球的半径.

# §9.2 空间的向量

## 一、内容提要

1. 向量,向量相等,单位向量,零向量,向量平行、共线.

2. 线性运算:加减法、数乘.

3. 利用坐标做向量的运算:设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$,$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$.

4. 向量的模:$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

5. 方向角:非零向量与三个坐标轴的正向的夹角 $\alpha,\beta,\gamma$.

6. 方向余弦:$\cos\alpha=\dfrac{x}{|\boldsymbol{r}|},\cos\beta=\dfrac{y}{|\boldsymbol{r}|},\cos\gamma=\dfrac{z}{|\boldsymbol{r}|}$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

7. 向量的数量积:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\quad \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

8. 向量的向量积:$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

大小:$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,方向:$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 符合右手规则

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

## 二、题型示例

**例 1** 设 $\boldsymbol{a}=\{1,1,1\}$,$\boldsymbol{b}=\{0,1,1\}$,$\boldsymbol{c}=\{0,0,1\}$,证明:$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=0$ 的充要条件是 $x=y=z=0$.

**证明** 必要性是显然的,下面证明充分性.

因为 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\{x,x+y,x+y+z\}=0$

则 $\begin{cases}x=0\\x+y=0\\x+y+z=0\end{cases}$ 解得 $x=y=z=0$ 证毕.

**例 2** 用向量证明菱形的对角线互相垂直.

**证明** 设菱形的四个顶点依次为 $A$、$B$、$C$、$D$,则

菱形四边相等:$AB=AD=BC=DC$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=0$

因此 $BD\perp AC$.

**例3** 已知力 $\boldsymbol{F}_1=\{1,1,-4\}$,$\boldsymbol{F}_2=\{1,-2,2\}$,$\boldsymbol{F}_3=\{1,4,5\}$作用一质点上,质点由点 $A(1,-1,2)$沿直线移动到点 $B(2,1,2)$. 求:

(1)合力的大小;

(2)力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的夹角;

(3)合力所做的功.

**解** (1)设合力为 $\boldsymbol{F}$

$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\{3,3,3\}$, $|\boldsymbol{F}|=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=3\sqrt{3}$.

(2)设 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$ 的夹角为 $\theta$,则

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_2}{|\boldsymbol{F}_1||\boldsymbol{F}_2|}=\frac{1\times1+1\times(-2)+(-4)\times2}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以 $\theta=\frac{3}{4}\pi$.

(3)设合力所做的功为 $W$,则

$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=\{3,3,3\}\cdot\{2-1,1-(-1),2-2\}=3\times1+3\times2+3\times0=9$.

**例4** 设 $A(0,0,0)$,$B(2,-1,3)$,$C(1,1,3)$是空间中的三点,在过 $AB$ 的直线上求一点 $D$,使得 $CD\perp AB$.

**解** 设点 $D$ 的坐标为$(x,y,z)$,因为 $D$ 在过 $AB$ 的直线上,所以向量$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{AB}$共线,于是$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}$,而$\overrightarrow{AD}=\{x,y,z\}$ ,$\overrightarrow{AB}=\{2,-1,3\}$,

所以 $x=2k,y=-k,z=3k$,又因为 $CD\perp AB$,所以

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=\{x-1,y-1,z-3\}\{2,-1,3\}=2x-y+3z-10=14k-10=0$,

解得 $k=\frac{5}{7}$,故 $x=\frac{10}{7}$,$y=-\frac{5}{7}$,$z=\frac{15}{7}$,

所以,点 $D$ 坐标为$\left(\frac{10}{7},-\frac{5}{7},\frac{15}{7}\right)$.

## 三、课外练习

1. 设向量 $\boldsymbol{a}=\{1,2,4\}$,$\boldsymbol{b}=\{3,1,-2\}$,求$(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

2. 设向量 $\boldsymbol{a}=\{1,1,2\}$，$\boldsymbol{b}=\{-1,2,-2\}$，$\boldsymbol{c}=\{5,-4,10\}$，试将 $\boldsymbol{c}$ 用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 线性表示.

3. 求与向量 $\boldsymbol{a}=\{1,0,-1\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,1,0\}$ 同时垂直的单位向量.

4. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

5. 设 $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标为 $A(a,1,-1)$，$B(1,-1,-2)$，$C(0,2,-1)$，求 $a$ 取何值时，$\triangle ABC$ 为直角三角形？

6. 设 $AD$ 是等腰 $\triangle ABC$ 底边 $BC$ 上的中线，用向量证明 $AD$ 平分顶角 $A$.

7. 设 $x_i, y_i$ $(i=1,2,3)$ 均是大于零的实数，利用向量证明：
$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\geqslant(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2$.

## §9.3 空间的平面

### 一、内容提要

1. 点法式方程:$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

法向量:$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$,过点$(x_0,y_0,z_0)$.

2. 一般式方程:$Ax+By+Cz+D=0$.

3. 截距式方程:$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

4. 两平面的夹角:$\boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$,$\boldsymbol{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$,

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

5. 平面垂直的条件:$\Pi_1\perp\Pi_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

6. 平面平行的条件:$\Pi_1/\!/\Pi_2\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

7. 点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

### 二、题型示例

**例 1** 求到点 $A(1,0,2)$的距离是到点 $B(-2,0,1)$的距离的二倍的点 $P$ 的轨迹.

**解** 设动点坐标为 $P(x,y,z)$,据两点间的距离公式得

$|PA|=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z-2)^2}$

$|PB|=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2+(z-1)^2}$

据题意$|PA|=2|PB|$,整理即得点 $P$ 的轨迹方程为

$x^2+y^2+z^2-6x+5=0$.

**例 2** 求过点$(1,2,5)$且通过 $y$ 轴的平面的方程.

**解** 因为平面通过 $y$ 轴,所以其法向量必垂直于 $y$ 轴,即垂直于 $y$ 轴向量就可能是平面的法向量,而坐标平面 $xoz$ 上的向量均垂直于 $y$ 轴.

因此,可设其法向量为$\{A,0,C\}$,又因为平面过 $y$ 轴必过原点,所以 $D=0$,于是平面的方程为 $Ax+Cz=0$,由于平面还过点$(1,2,5)$.

因此 $A+5C=0$,$A=-5C$,代入平面方程消去 $C$,即得平面方程为 $x-5z=0$.

**例 3** 在平面 $x+y-z-11=0$ 上求一点 $P$,使之与点 $A(2,1,4)$的连线垂直于该平面.

**解** 设所求的点 $P$ 坐标为$(a,b,c)$,据题意$\overrightarrow{PA}=\{2-a,1-b,4-c\}$与平面的法向量$\boldsymbol{n}=\{1,1,-1\}$共线,故$\overrightarrow{PA}=k\boldsymbol{n}$,$\{2-a,1-b,4-c\}=k\{1,1,-1\}$.

所以 $a=2-k,b=1-k,c=4+k$，又因为 $P(a,b,c)$ 在平面上，所以 $(2-k)+(1-k)-(4+k)-11=0$，解得 $k=-2$. 所以 $a=4,b=3,c=2$，即点 $P$ 坐标为 $(4,3,2)$.

**三、课外练习**

1. 设平面与过点 $A(1,2,1)$，$B(2,0,-1)$ 的直线垂直相交于点 $B$，求平面的方程.

2. 求过 $A(1,-2,2)$，$B(2,1,0)$，$C(0,0,1)$ 的平面的方程.

3. 求点 $(2,1,4)$ 到平面 $x+y+2z-1=0$ 的距离.

4. 求平面 $x+y-4z+1=0$ 与 $x-2y+2z-3=0$ 相交的锐角.

5. 过点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$ 的平面方程.

6. 求 $Ax+By+Cz+D_1=0$ 与 $Ax+By+Cz+D_2=0$ 之间的距离.

# §9.4 空间的直线

## 一、内容提要

1. 一般式方程：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$.

2. 对称式（点向式）方程：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

方向向量：$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，过点$(x_0,y_0,z_0)$.

3. 参数式方程：$\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\\ z=z_0+pt\end{cases}$.

4. 两直线的夹角：$\boldsymbol{s}_1=\{m_1,n_1,p_1\}$，$\boldsymbol{s}_2=\{m_2,n_2,p_2\}$，

$\cos\phi=\dfrac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$.

$L_1\perp L_2\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

$L_1/\!/L_2\Leftrightarrow\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

5. 直线与平面的夹角：直线与它在平面上的投影的夹角，

$\sin\varphi=\dfrac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

$L/\!/\Pi\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$.

$L\perp\Pi\Leftrightarrow\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$.

## 二、题型示例

**例 1** 求过点 $M(3,1,-2)$ 且通过直线：$\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程.

**解** 在直线 $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 上取一点 $P(4,-3,0)$，

$\overrightarrow{MP}=(1,-4,2)$，$\boldsymbol{n}=(1-4,2)\times(5,2,1)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-4&2\\5&2&1\end{vmatrix}=\{-8,9,22\}$

所求平面方程为 $-8(x-3)+9(y-1)+22(z+2)=0$,即
$8x-9y-22z-59=0$.

**例 2** 求过点(0,2,4)且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

**解** 直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=\{-2,3,1\}$,

故所直线方程为 $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$.

**例 3** 过点 $M_0(-1,0,4)$ 且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$ 又与直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程.

**解** 设所求直线方程为

$$\frac{x+1}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z-4}{p}$$

所求直线与已知平面平行,则

$$3m-4n+p=0 \tag{1}$$

又所求直线与已知直线相交必共面,在已知直线上任取一点 $M_1(-1,3,0)$,则 $\overrightarrow{M_0M_1}=\{0,3,-4\}$ 在平面上. 三向量共面,得 $\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}=0$,即

$$10m-4n-3p=0 \tag{2}$$

由式(1)(2),得 $m:n:p=16:19:28$,则所求直线方程:$\dfrac{x+1}{16}=\dfrac{y}{19}=\dfrac{z-4}{28}$.

**例 4** 求两直线 $L_1:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-1}$ 与直线 $L_2:\dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+2}{0}$ 的最短距离.

**解** 已知两直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=\{0,-1,-1\}$,$\boldsymbol{s}_2=\{6,-3,0\}$,故垂直于两方向向量的向量 $\boldsymbol{n}$ 可取为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=-3\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$,又点(1,0,0)在直线 $L_1$ 上.

过直线 $L_1$ 且平行于 $L_2$ 的平面为 $-3(x-1)-6y+6z=0$,即 $x+2y-2z-1=0$,又点(0,0,−2)在直线 $L_2$ 上,该点到平面 $x+2y-2z-1=0$ 的距离为

$$d=\frac{3}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1.$$

即为所求两直线间的最短距离.

## 三、课外练习

1. 求过点(1,2,3)且平行于直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{5}$ 的直线方程.

2. 求过点(0,2,4)且与两平面 $x+2z=1$, $y-3z=2$ 平行的直线方程.

3. 求过点(2,0,-3)且与直线$\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$垂直的平面方程.

4. 求过点(3,1,-2)且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程.

5. 求过点(3,-1,2)并和两直线$\begin{cases}x=2z-1\\y=z+3\end{cases}$与$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$都垂直的直线方程.

6. 求点 $M(4,1,-6)$关于直线 $L$:$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$的对称点.

7. 求 $k$ 的值,使直线$\frac{x-3}{2k}=\frac{y+1}{k+1}=\frac{z-3}{5}$与直线$\frac{x-1}{3}=y+5=\frac{z+2}{k-2}$相互垂直.