

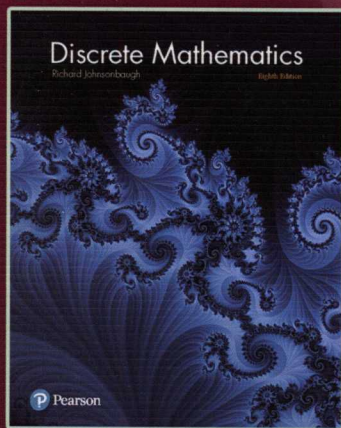
国外计算机科学教材系列

 Pearson

离散数学

(第八版)

Discrete Mathematics, Eighth Edition



英文版

[美] Richard Johnsonbaugh 著



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

国外计算机科学教材系列

离散数学

(第八版) (英文版)

Discrete Mathematics
Eighth Edition

[美] Richard Johnsonbaugh 著



电子工业出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书从算法分析和问题求解的角度,全面系统地介绍了离散数学的基础概念及相关知识,并在其前一版的基础上进行了修改与扩展。书中通过大量实例,深入浅出地讲解了集合与逻辑,证明,函数、序列与关系,算法,数论,计数方法与鸽巢原理,递推关系,图论,树,网络模型,Boole代数与组合电路,自动机、文法和语言等与计算机科学密切相关的前沿课题,既着重于各部分内容之间的紧密联系,又深入探讨了相关的概念、理论、算法和实际应用。本书内容叙述严谨、推演详尽,各章配有相当数量的习题与书后的提示和答案,为读者迅速掌握相关知识提供了有效的帮助。

本书既可作为计算机科学及计算数学等专业的本科生和研究生的双语教材,也可作为工程技术人员和相关人员的参考书。

Authorized Reprint from English language edition, entitled Discrete Mathematics, Eighth Edition, ISBN 9780321964687 by Richard Johnsonbaugh, published by Pearson Education, Inc., Copyright © 2018 by Pearson Education Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

ENGLISH language edition published by PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY Copyright ©2018. This edition is manufactured in the People's Republic of China, and is authorized for sale and distribution only in the mainland of China exclusively(except Taiwan, Hong Kong SAR and Macau SAR).

本书英文影印版专有出版权由 Pearson Education (培生教育出版集团)授予电子工业出版社。未经出版者预先书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

本书在中国大陆地区出版,仅限在中国大陆发行。

本书贴有 Pearson Education (培生教育出版集团)激光防伪标签,无标签者不得销售。

版权贸易合同登记号 图字:01-2017-7610

图书在版编目(CIP)数据

离散数学:英文/(美)理查德·约翰逊鲍夫(Richard Johnsonbaugh)著.—8版.—北京:电子工业出版社,2018.7(国外计算机科学教材系列)

书名原文:Discrete Mathematics, Eighth Edition

ISBN 978-7-121-34467-1

I. ①离… II. ①理… III. ①离散数学—高等学校—教材—英文 IV. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第121878号

策划编辑:冯小贝

责任编辑:冯小贝

印刷:三河市鑫金马印装有限公司

装订:三河市鑫金马印装有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编:100036

开本:787×980 1/16 印张:48 字数:1398千字

版次:2004年3月第1版(原著第5版)

2018年7月第3版(原著第8版)

印次:2018年7月第1次印刷

定 价:128.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888,88258888。

质量投诉请发邮件至zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式:fengxiaobei@phei.com.cn。

前 言

这本新版离散数学教材是基于作者多年来的教学经验并根据读者意见修改而成的，可作为一个或两个学期离散数学课程的教材。本书尽可能地减少了对预先掌握数学方法的要求，不需要具备微积分知识，也不需要预先掌握计算机科学的相关知识。本书包括例题、练习、图表、问题求解和相关提示，以及章节复习、注释、自测题和上机练习等，用以帮助读者掌握离散数学的基本知识。此外，与本书配套的资料还包括教师手册和网站资源。

在20世纪80年代初，几乎没有离散数学入门课程的合适教材。但当时许多大学需要一门涉及组合数学、算法和图论等内容的课程，来拓宽学生的数学知识和处理抽象概念的能力。本书第一版（1984年）的出版满足了这种需求，并对离散数学课程的发展产生了深远影响。此后，离散数学课程得到了包括数学和计算机等专业许多学科的认可。美国数学学会（MAA）的一个专门小组曾提议离散数学应作为讲授一学年的课程。电气与电子工程师协会（IEEE）的教育委员会也建议在大学一年级开设离散数学课程。随后，美国计算机学会（ACM）和IEEE给出了离散数学课程的推荐性大纲。本书第八版和前面各版本一样，不仅包括了算法、组合数学、集合、函数、数学归纳法等被以上组织所认可的内容，同时还涉及证明的理解和构造技巧，学生通过学习可提高数学素养。

本版更新内容

本书第八版的修改来自许多读者对本书先前版本的意见和要求。在第七版的基础上，本版做了如下修改：

- 第七版中的网站图标修改为短URL地址，以便于快速访问正确的网页，例如使用便携式设备。
- 每一章中的自测题不再与章节内容紧密相关，这使得自测题更像是真正的考试题（这些自测题的提示与章节内容仍然紧密相关）。
- 例题解答的开始及结束位置更加清晰。
- 前三章（集合与逻辑；证明；函数、序列与关系）的习题数量从第七版的大约1640个例题和练习，增加到第八版的1750个以上。

- 对于一些可能会引起歧义的概念增加了更多的说明（例如，“子集”与“…的元素”、集族、序列命题的逻辑等价、图形的对数标尺）。
- 对证明某些特定的结论，给出了更多其他构造证明的方法示例 [例如，例2.2.4和例2.2.8；例6.1.3(c)和例6.1.12；例6.7.7，例6.7.8，例6.7.9；例6.8.1和例6.8.2]。
- 修订了一些定义，以便直接应用于证明中 [例如，一对一函数（定义3.1.22）及映上函数（定义3.1.29）]。
- 追加了一些真实的例子。
- 修改了序列的定义（定义3.2.1），使其更加一般化，对子序列的讨论更易于理解。
- 增加了一些习题（5.1节，习题40～49）作为质因数分解不成立代数系统的例子。
- 使用二项定理的一个应用来证明Fermat小定理（6.7节，习题40和41）。
- 给出了一种在给定图中寻找 Hamilton 回路的随机算法（算法8.3.10）。
- 原第13章中的最小距点对问题（第七版的13.1节）被整合进第7章（递推关系）中。因为该算法是基于归并排序的，而归并排序在第7章中进行讨论和分析。第八版删去了第七版第13章的剩余内容。
- 参考文献中补充了一些最近出版的书籍和论文，原有书籍的一些信息在本版中也进行了更新。
- 习题的数量增加到近4500个（第七版中大约有4200个）。

内容和结构

内容概述

第1章 集合与逻辑

内容涵盖量化并分析Google搜索引擎的实例（例1.2.13）。利用程序逻辑讨论了英语与符号表达式之间的相互转换。例1.6.15讨论了逻辑游戏，该游戏给出了一种确定量化命题函数的值是否为真的方法。

第2章 证明

讨论了证明方法（第2章），包括直证法、反例、反证法、逆否证明法、分情况证明法、（构造和非构造）存在性证明和数学归纳法。使用循环不变式作为数学归纳法的应用例子之一。其中包括了一节简短可选读的对消解原理（一种可自动化的证明方法）的讨论。

第3章 函数、序列与关系

本章包括串、和与积的记法以及启发性的例子，例如本章开篇介绍的计算信用卡校验位的Luhn算法。其他例子包括hash函数的介绍（例3.1.15）、伪随机数生成器（例3.1.16）、函数复合在应用于价格比较时的实例（例3.1.45）、偏序集在任务调度中的应用（3.3节）和关系数据库（3.6节）。

第4章 算法

本章详细讨论了算法、递归算法及算法分析的技术。在说明“大O”和相关记号之前，给出了若干例子（4.1节和4.2节），对引入这些记法的动机进行了说明。之后，本章详细讨论了描述函数增长的“大O”、Omega和Theta记号（4.3节）。使用这些记法可以准确地描述函数的增长以及算法的时间和空间复杂度问题。

算法的使用将贯穿全书。本书将提到许多现代算法，可能不具备传统算法的多种特征（如许多现代算法不是通用的、确定的，甚至不是有限的）。为了说明这一点，本章给出了一个随机算法作为例子（例4.2.4）。这些算法都是使用形式灵活的伪代码给出的，伪代码综合了当前的流行语言，例如C、C++以及Java等（本书不要求读者预先具有计算机科学的知识，所使用伪代码的描述在附录C中给出）。本章介绍的算法有

- 覆盖算法（4.4节）
- 计算最大公约数的欧几里得算法（5.3节）
- RSA公钥算法（5.4节）
- 排列组合生成算法（6.4节）
- 归并排序算法（7.3节）
- 寻找最小距点对算法（7.4节）
- Dijkstra最短路径算法（8.4节）
- 回溯算法（9.3节）
- 深度优先和广度优先算法（9.3节）
- 树的遍历算法（9.6节）
- 博弈树求值算法（9.9节）
- 网络最大流量算法（10.2节）

第5章 数论简介

本章内容包括一些传统的结论（如整除性、素数个数是无限的、基本的算术定理）和数论算法（如寻找最大公约数的欧几里得算法、基于重复平方法计算数的指数算法、计算满足 $\gcd(a, b) = sa + tb$ 的整数 s 和 t 的算法、计算一个整数针对某个模的逆的算法等）。本章介绍的方

法可应用于RSA公钥算法（5.4节）中涉及的计算。RSA公钥算法的计算量需求使用本章前面给出的算法进行了演示。

第6章 计数方法与鸽巢原理

本章内容包括排列、组合、离散概率（可选读的6.5节和6.6节）以及鸽巢原理。应用问题包括互联网编址（6.1节）、实际的电话销售中的模式识别问题（例6.6.21）以及利用贝叶斯定理进行的病毒检测（例6.6.22）。

第7章 递推关系

本章内容包括递推关系及其在算法分析中的应用。

第8章 图论

本章内容包括并行计算机体系结构的图形模式、骑士巡游问题、旅行商问题、Hamilton回路、图的同构、平面图等。定理8.4.3给出了Dijkstra算法正确性的证明。

第9章 树

本章内容包括二叉树、树的遍历、最小生成树、决策树、排序的时间下界以及树的同构。

第10章 网络模型

本章内容包括网络最大流算法和匹配问题。

第11章 Boole代数与组合电路

本章重点强调了Boole代数与组合电路之间的关系。

第12章 自动机、文法和语言

本章重点强调模型和应用。SR触发电路将在例12.1.11中进行介绍。例12.3.19以von Koch雪花为例，给出了分形的语法描述。

本书其他部分

附录中涵盖了矩阵、基本的代数知识以及伪代码的介绍。本书的参考文献超过160篇，提供了额外的信息源。书末汇总了书中用到的数学和算法记号。

内容特色

- 特别强调不同主题之间的相互关联。例如：
 - 数学归纳法与递归算法被紧密结合在一起（4.4节）。
 - 使用了Fibonacci序列来分析欧几里得算法（5.3节）。
 - 本书中的很多习题都需要使用数学归纳法进行证明。

- 给出了如何通过图中的顶点集上引入一组等价关系来描述图的分支的方法（参见例8.2.13中的讨论）。
- 给出了 n 顶点非同构二叉树的个数（定理9.8.12）。
- 特别强调证明细节的理解和证明的构造。多数定理的证明带有插图注释并（或）有专门的讨论。有独立的小节（问题求解部分）向学生讲解如何进行问题求解及定理证明。一些章节后的问题求解要点则对本章节涉及的主要技术和方法进行总结。
- 大量的应用问题，特别是计算机领域中的应用问题。
- 图和表。利用图表描述概念、表示算法的工作原理、对定理进行阐释，从而使内容讲解更加生动。有些定理的证明辅以图示，从而对证明进行进一步的解释。

教材结构

每一章都按照下面的方式组织：

Chapter X Overview

Section X.1

Section X.1 Review Exercises

Section X.1 Exercises

Section X.2

Section X.2 Review Exercises

Section X.2 Exercises

⋮

Chapter X Notes

Chapter X Review

Chapter X Self-Test

Chapter X Computer Exercises

此外，多数章节都有“Problem-Solving Corners”部分（参考后文“本书亮点”部分给出的更加详细的说明。）

“Review Exercises”部分帮助学生复习本章节的重要概念、定义、定理和求解技巧等，书后附有部分章节练习的答案。尽管章节练习是为复习章节内容准备的，但也可作为课后作业或考试题目。

“Notes”部分给出了进一步学习的建议。“Review”部分给出每章的基本概念。在“Self-Test”部分中，对应每节给出4道练习，相关的答案在书后给出。

“Computer Exercises”部分包括项目、一些算法的实现及其他与程序设计有关的活动。本书不要求读者具备程序设计的能力，也没有给出程序设计内容的介绍，因而这些练习只是为那些具有程序设计基础并愿意利用计算机来分析离散数学概念的读者准备的。

本书亮点

习题

书中包括近4500个习题，其中150个是上机练习。超过一般难度的习题用“*”标出。部分习题（约占三分之一）在书后有提示或答案。其他习题的答案可以在教师手册中找到。有少数习题明确标出需要微积分知识，但书中的主要章节不涉及微积分的概念。因此除那些有标识的习题之外，其他习题是不需要用到微积分知识的。

例题

本书包括约650个例题。这些例题向学生展示如何使用离散数学解决问题、介绍理论的应用、阐述证明过程，从而使相关内容的讲解更加生动。

问题求解

问题求解部分（即“Problem-Solving Corners”部分）旨在帮助学生对一些问题进行研究和探索，展示如何给出一个问题的证明。这部分的结构不同于本书的正文，是对一个问题进行讨论之后出现的独立一节，其目的是展示另一种求解问题的方法、讨论如何寻找问题的答案、说明问题求解和证明的技巧，而不是简单地给出一个问题的证明和答案。

问题求解部分由问题陈述开始，接着是讨论解决问题的方法。在得出求解方法以后，进一步说明该如何正确地书写形式化的求解过程。最后，再对使用的求解技巧进行总结。此外，有的问题求解部分还包括注释，并讨论其与数学和计算机科学的其他内容的联系，有的给出问题的背景和进一步阅读的参考文献目录，有的则以练习作为结束。

补充资料和技术支持

教师手册

作者编写的教师手册包含了本书中多数练习的解答。购买本书的教师可以从 Pearson 教师资源中心（www.pearsonhighered.com/irc）下载相关文件^①。

^① 教辅资源获取方式请参见书后的“教学支持说明”。

网站支持

学生可以通过正文中给出的短URL链接获得

- 对于较难掌握材料的补充讲解，以及与离散数学相关的其他网站。
- 计算机程序（用C或C++编写）。

URL地址goo.gl/f03Crh 给出了上述全部资源以及一个额外列表的地址。

致谢

向为本次改版提供了大量有益建议的审稿人致以特别的感谢：

Venkata Dinavahi, 芬德利大学

Matthew Elsey, 纽约大学

Christophe Giraud-Carrier, 杨百翰大学

Yevgeniy Kovchegov, 俄勒冈州立大学

Felix Maisch, 俄勒冈州立大学

Tyler McMillen, 加州州立大学Fullerton分校

Christopher Storm, 艾德菲大学

Donald Vestal, 南达科他州立大学

Guanghua Zhao, 费耶特维尔州立大学

同时也非常感谢本书的所有读者，他们给予了非常有用的信件和电子邮件。

感谢本书的编审Patricia Johnsonbaugh，她仔细阅读了本书的草稿，改进了行文结构，找出许多不该出现的错误并且协助作者完成了索引的编定。

本书的出版得到了Pearson团队的持续支持。特别感谢Pearson负责本项目的Lauren Morse，负责设计和排版的SPi Global公司的Jullie Kidd，以及检查了本书证明中的很多部分的圣克劳德州立大学的Nick Fiala。

最后，感谢编辑Jeff Weidenaar在本书第八版的准备过程中给予的帮助。他对本书的所有细节都非常关注，给出了大量强化设计的建议，提出了很多具体的提高表达和理解能力的建议，也提出了很多提高阅读性的建议。

Richard Johnsonbaugh

Contents

1 Sets and Logic 1

- 1.1 Sets 2
- 1.2 Propositions 14
- 1.3 Conditional Propositions and Logical Equivalence 20
- 1.4 Arguments and Rules of Inference 31
- 1.5 Quantifiers 36
- 1.6 Nested Quantifiers 49
- Problem-Solving Corner:** Quantifiers 57
- Chapter 1 Notes 58
- Chapter 1 Review 58
- Chapter 1 Self-Test 60
- Chapter 1 Computer Exercises 60

2 Proofs 62

- 2.1 Mathematical Systems, Direct Proofs, and Counterexamples 63
- 2.2 More Methods of Proof 72
- Problem-Solving Corner:** Proving Some Properties of Real Numbers 83
- 2.3 Resolution Proofs[†] 85
- 2.4 Mathematical Induction 88
- Problem-Solving Corner:** Mathematical Induction 100
- 2.5 Strong Form of Induction and the Well-Ordering Property 102
- Chapter 2 Notes 109
- Chapter 2 Review 109

Chapter 2 Self-Test	109
Chapter 2 Computer Exercises	110

3 Functions, Sequences, and Relations 111

3.1	Functions	111
	Problem-Solving Corner: Functions	128
3.2	Sequences and Strings	129
3.3	Relations	141
3.4	Equivalence Relations	151
	Problem-Solving Corner: Equivalence Relations	158
3.5	Matrices of Relations	160
3.6	Relational Databases [†]	165
	Chapter 3 Notes	170
	Chapter 3 Review	170
	Chapter 3 Self-Test	171
	Chapter 3 Computer Exercises	172

4 Algorithms 173

4.1	Introduction	173
4.2	Examples of Algorithms	177
4.3	Analysis of Algorithms	184
	Problem-Solving Corner: Design and Analysis of an Algorithm	202
4.4	Recursive Algorithms	204
	Chapter 4 Notes	211
	Chapter 4 Review	211
	Chapter 4 Self-Test	212
	Chapter 4 Computer Exercises	212

5 Introduction to Number Theory 214

5.1	Divisors	214
5.2	Representations of Integers and Integer Algorithms	224
5.3	The Euclidean Algorithm	238
	Problem-Solving Corner: Making Postage	249
5.4	The RSA Public-Key Cryptosystem	250
	Chapter 5 Notes	252
	Chapter 5 Review	253
	Chapter 5 Self-Test	253
	Chapter 5 Computer Exercises	254

[†]This section can be omitted without loss of continuity.

6 Counting Methods and the Pigeonhole Principle 255

- 6.1 Basic Principles 255
 - Problem-Solving Corner:** Counting 267
- 6.2 Permutations and Combinations 269
 - Problem-Solving Corner:** Combinations 281
- 6.3 Generalized Permutations and Combinations 283
- 6.4 Algorithms for Generating Permutations and Combinations 289
- 6.5 Introduction to Discrete Probability[†] 297
- 6.6 Discrete Probability Theory[†] 301
- 6.7 Binomial Coefficients and Combinatorial Identities 313
- 6.8 The Pigeonhole Principle 319
 - Chapter 6 Notes 324
 - Chapter 6 Review 324
 - Chapter 6 Self-Test 325
 - Chapter 6 Computer Exercises 326

7 Recurrence Relations 327

- 7.1 Introduction 327
- 7.2 Solving Recurrence Relations 338
 - Problem-Solving Corner:** Recurrence Relations 350
- 7.3 Applications to the Analysis of Algorithms 353
- 7.4 The Closest-Pair Problem[†] 365
 - Chapter 7 Notes 370
 - Chapter 7 Review 371
 - Chapter 7 Self-Test 371
 - Chapter 7 Computer Exercises 372

8 Graph Theory 373

- 8.1 Introduction 373
- 8.2 Paths and Cycles 384
 - Problem-Solving Corner:** Graphs 395
- 8.3 Hamiltonian Cycles and the Traveling Salesperson Problem 396
- 8.4 A Shortest-Path Algorithm 405
- 8.5 Representations of Graphs 410
- 8.6 Isomorphisms of Graphs 415
- 8.7 Planar Graphs 422
- 8.8 Instant Insanity[†] 429

Chapter 8 Notes	433
Chapter 8 Review	434
Chapter 8 Self-Test	435
Chapter 8 Computer Exercises	436

9 Trees 438

9.1	Introduction	438
9.2	Terminology and Characterizations of Trees	445
	Problem-Solving Corner: Trees	450
9.3	Spanning Trees	452
9.4	Minimal Spanning Trees	459
9.5	Binary Trees	465
9.6	Tree Traversals	471
9.7	Decision Trees and the Minimum Time for Sorting	477
9.8	Isomorphisms of Trees	483
9.9	Game Trees [†]	493
	Chapter 9 Notes	502
	Chapter 9 Review	502
	Chapter 9 Self-Test	503
	Chapter 9 Computer Exercises	505

10 Network Models 506

10.1	Introduction	506
10.2	A Maximal Flow Algorithm	511
10.3	The Max Flow, Min Cut Theorem	519
10.4	Matching	523
	Problem-Solving Corner: Matching	528
	Chapter 10 Notes	529
	Chapter 10 Review	530
	Chapter 10 Self-Test	530
	Chapter 10 Computer Exercises	531

11 Boolean Algebras and Combinatorial Circuits 532

11.1	Combinatorial Circuits	532
11.2	Properties of Combinatorial Circuits	539
11.3	Boolean Algebras	544
	Problem-Solving Corner: Boolean Algebras	549
11.4	Boolean Functions and Synthesis of Circuits	551
11.5	Applications	556

[†]This section can be omitted without loss of continuity.

Chapter 11 Notes 564
Chapter 11 Review 565
Chapter 11 Self-Test 565
Chapter 11 Computer Exercises 567

12 Automata, Grammars, and Languages 568

12.1 Sequential Circuits and Finite-State Machines 568
12.2 Finite-State Automata 574
12.3 Languages and Grammars 579
12.4 Nondeterministic Finite-State Automata 589
12.5 Relationships Between Languages and Automata 595
Chapter 12 Notes 601
Chapter 12 Review 602
Chapter 12 Self-Test 602
Chapter 12 Computer Exercises 603

Appendix 605

A Matrices 605

B Algebra Review 609

C Pseudocode 620

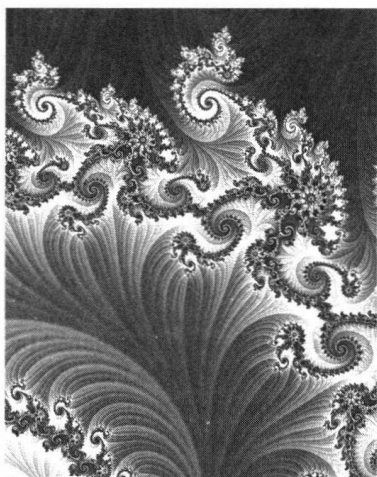
References 627

Hints and Solutions to Selected Exercises 633

Index 735

Chapter 1

SETS AND LOGIC



- 1.1 Sets
- 1.2 Propositions
- 1.3 Conditional Propositions and Logical Equivalence
- 1.4 Arguments and Rules of Inference
- 1.5 Quantifiers
- 1.6 Nested Quantifiers

Chapter 1 begins with sets. A **set** is a collection of objects; order is not taken into account. Discrete mathematics is concerned with objects such as graphs (sets of vertices and edges) and Boolean algebras (sets with certain operations defined on them). In this chapter, we introduce set terminology and notation. In Chapter 2, we treat sets more formally after discussing proof and proof techniques. However, in Section 1.1, we provide a taste of the logic and proofs to come in the remainder of Chapter 1 and in Chapter 2.

Logic is the study of reasoning; it is specifically concerned with whether reasoning is correct. Logic focuses on the relationship among statements as opposed to the content of any particular statement. Consider, for example, the following argument:

All mathematicians wear sandals.
Anyone who wears sandals is an algebraist.
Therefore, all mathematicians are algebraists.

Technically, logic is of no help in determining whether any of these statements is true; however, if the first two statements are true, logic assures us that the statement,

All mathematicians are algebraists,

is also true.

Logic is essential in reading and developing proofs, which we explore in detail in Chapter 2. An understanding of logic can also be useful in clarifying ordinary writing. For example, at one time, the following ordinance was in effect in Naperville, Illinois: “It shall be unlawful for any person to keep more than three dogs and three cats upon his property within the city.” Was one of the citizens, who owned five dogs and no cats, in violation of the ordinance? Think about this question now; then analyze it (see Exercise 75, Section 1.2) after reading Section 1.2.

Go Online

For more on logic, see
goo.gl/F7b35e

1.1 Sets

Go Online

For more on sets, see
goo.gl/F7b35e

The concept of set is basic to all of mathematics and mathematical applications. A **set** is simply a collection of objects. The objects are sometimes referred to as elements or members. If a set is finite and not too large, we can describe it by listing the elements in it. For example, the equation

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \tag{1.1.1}$$

describes a set A made up of the four elements 1, 2, 3, and 4. A set is determined by its elements and not by any particular order in which the elements might be listed. Thus the set A might just as well be specified as $A = \{1, 3, 4, 2\}$. The elements making up a set are assumed to be distinct, and although for some reason we may have duplicates in our list, only one occurrence of each element is in the set. For this reason we may also describe the set A defined in (1.1.1) as $A = \{1, 2, 2, 3, 4\}$.

If a set is a large finite set or an infinite set, we can describe it by listing a property necessary for membership. For example, the equation

$$B = \{x \mid x \text{ is a positive, even integer}\} \tag{1.1.2}$$

describes the set B made up of all positive, even integers; that is, B consists of the integers 2, 4, 6, and so on. The vertical bar “|” is read “such that.” Equation (1.1.2) would be read “ B equals the set of all x such that x is a positive, even integer.” Here the property necessary for membership is “is a positive, even integer.” Note that the property appears after the vertical bar. The notation in (1.1.2) is called **set-builder notation**.

A set may contain *any* kind of elements whatsoever, and they need *not* be of the same “type.” For example,

$$\{4.5, \text{Lady Gaga}, \pi, 14\}$$

is a perfectly fine set. It consists of four elements: the number 4.5, the person Lady Gaga, the number $\pi (= 3.1415 \dots)$, and the number 14.

A set may contain elements that are themselves sets. For example, the set

$$\{3, \{5, 1\}, 12, \{\pi, 4.5, 40, 16\}, \text{Henry Cavill}\}$$

consists of five elements: the number 3, the set $\{5, 1\}$, the number 12, the set $\{\pi, 4.5, 40, 16\}$, and the person Henry Cavill.

Some sets of numbers that occur frequently in mathematics generally, and in discrete mathematics in particular, are shown in Figure 1.1.1. The symbol \mathbf{Z} comes from the German word, *Zahlen*, for *integer*. Rational numbers are quotients of integers, thus \mathbf{Q} for *quotient*. The set of real numbers \mathbf{R} can be depicted as consisting of all points on a straight line extending indefinitely in either direction (see Figure 1.1.2).[†]

Symbol	Set	Example of Members
\mathbf{Z}	Integers	$-3, 0, 2, 145$
\mathbf{Q}	Rational numbers	$-1/3, 0, 24/15$
\mathbf{R}	Real numbers	$-3, -1.766, 0, 4/15, \sqrt{2}, 2.666 \dots, \pi$

Figure 1.1.1 Sets of numbers.

[†]The real numbers can be constructed by starting with a more primitive notion such as “set” or “integer,” or they can be obtained by stating properties (axioms) they are assumed to obey. For our purposes, it suffices to think of the real numbers as points on a straight line. The construction of the real numbers and the axioms for the real numbers are beyond the scope of this book.