

GAOKAO SHUXUE 高分之路拾级而上
JINJIE TEXUN



高考数学

进阶特训

4

(导数、推理证明、复数、计数原理、概率分布列)

主编◎张传鹏

本册主编◎潘 俊 赵肖东 倪瑞祥

● 高二下学期同步培优 ● 高考复习专题突破 ● 40小时精准训练“最有价值”的数学题



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高考数学进阶特训 4

导数、推理证明、复数、计数原理、概率分布列

主 编：张传鹏

本册主编：潘 俊 赵肖东 倪瑞祥

图书在版编目(CIP)数据

高考数学进阶特训. 4, 导数、推理证明、复数、计数原理、概率分布列/张传鹏主编. —杭州: 浙江大学出版社, 2016. 10(2016. 11 重印)

ISBN 978-7-308-15813-8

I. ①高… II. ①张… III. ①中学数学课—高中—习题集—升学参考资料 IV. ①G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 090011 号

高考数学进阶特训 4(导数、推理证明、复数、计数原理、概率分布列)

主编 张传鹏

策 划 陈海权(电子信箱: chess332@163. com)
责任编辑 夏晓冬
责任校对 沈炜玲
封面设计 林智广告
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址: <http://www.zjupress.com>)
排 版 杭州星云光电图文制作有限公司
印 刷 嘉兴华源印刷厂
开 本 889mm×1194mm 1/16
印 张 6. 25
插 页 24
字 数 298 千
版 次 2016 年 10 月第 1 版 2016 年 11 月第 2 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-15813-8
定 价 19. 80 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行中心联系方式: 0571-88925591; <http://zjdxcbbs.tmall.com>

编写说明

课程标准前言中指出:数学在形成人类理性思维和促进个人智力发展的过程中发挥着独特的、不可替代的作用;在形成人们认识世界的态度和思想方法方面、在推动社会进步和发展的进程中起着重要的作用,而理性思维的形成又是以数学题目为载体的。通过对近年各地数学高考试卷研究来看,高考考查的知识面广,主要考查考生对高中数学各块知识的运算变形能力、信息整合能力、数学思维方法运用能力及创新思维能力等,因此教师在平时的教学备课中选题就显得尤为重要。为了使学生日常练习更加有效,更有针对性、科学性和高效性,我们认真编写了此书,旨在帮助广大学生在复习时起到事半功倍、触类旁通的效果。

本书大多数习题是近年在杭州外国语学校高中数学课堂实践的基础上发展与完善的,这些试题非常具有代表性。本书起点低,目标高,可以供不同层次的学生使用。书中不仅解答题有详细答案,同时许多填空题和选择题也给了解析或提示,可以供同学们自学使用。本书在解答过程中,对典型题目采取一题多解、一题多变,使学生不仅知其然,而且知其所以然。解题方法新颖、有效,解法大气,不追求小技巧,注重通性、通法,不刻意追求巧解、妙解。

本书力争成为一本非常有效的学生备考指南,可以供高一、高二学生在学习新课后进行同步加深,也可以供高三学生在高考一轮复习时使用,当然也可以作为教师备课的参考工具书。本书是编撰人员精心设计、用心编写而成的,但限于能力和水平,编写中难免有疏漏和不妥之处,恳请广大读者和数学同行批评指正,以便不断修正和完善,在此表示衷心的感谢!

我的联系方式是:zhangzcp508@sina.com。

张传鹏
2016年7月

目 录

特训 1	变化率和导数	(1)
特训 2	导数的运算	(5)
特训 3	导数与函数的单调性、极值和最值	(9)
特训 4	导数的综合应用	(13)
特训 5	导数的单元练习(1)	(17)
特训 6	导数的单元练习(2)	(21)
特训 7	合情推理与直接证明	(25)
特训 8	反证法与数学归纳法	(29)
特训 9	推理与证明综合	(33)
特训 10	复 数	(37)
特训 11	导数、复数、推理与证明综合	(41)
特训 12	计数原理	(45)
特训 13	排列问题	(49)
特训 14	组合问题	(53)
特训 15	排列与组合	(57)
特训 16	二项式定理	(61)
特训 17	计数原理单元练习(1)	(65)
特训 18	计数原理单元练习(2)	(69)
特训 19	随机事件的概率和古典概型	(73)
特训 20	离散型随机变量分布列及二项分布	(77)
特训 21	离散型随机变量及其均值与方差	(81)
特训 22	概率单元练习	(85)
特训 23	导数、推理证明、复数、概率综合(1)	(89)
特训 24	导数、推理证明、复数、概率综合(2)	(93)
参考答案		(97)



特训 1 变化率和导数

训练内容:

函数在某一点附近的平均变化率,理解瞬时变化率的意义,会利用导数的定义求函数在某点处的导数,会求曲线上某点处的切线方程.

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 3 分,共 24 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 在导数的定义中,自变量 x 的增量 Δx ()

- A. 大于 0 B. 小于 0 C. 等于 0 D. 不等于 0

2. 已知函数 $f(x)=2x^2-1$ 的图象上一点 $(1,1)$ 及邻近一点 $(1+\Delta x, 1+\Delta y)$, 则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 等于 ()

- A. 4 B. $4\Delta x$ C. $4+2\Delta x$ D. $4+2(\Delta x)^2$

3. 已知一木块沿某一斜面自由下滑,测得下滑的水平距离 s 与时间 t 之间的函数关系为 $s=\frac{1}{8}t^2$, 则当 $t=2$ 时,此木块在水平方向上的瞬时速度为 ()

- A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

4. 在 $x=1$ 附近,取 $\Delta x=0.3$,在下列四个函数:① $y=x$,② $y=x^2$,③ $y=x^3$,④ $y=\frac{1}{x}$ 中,平均变化率最大的是 ()

- A. ④ B. ③ C. ② D. ①

5. 设 $f(x)=ax+4$,若 $f'(1)=2$,则 a 等于 ()

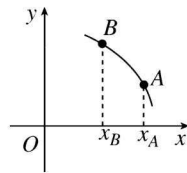
- A. 2 B. -2 C. 3 D. 不确定

6. 下列说法中正确的是 ()

- A. 若 $f'(x_0)$ 不存在,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处没有切线
 B. 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处有切线,则 $f'(x_0)$ 必存在
 C. 若 $f'(x_0)$ 不存在,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率不存在
 D. 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处没有切线,则 $f'(x_0)$ 有可能存在

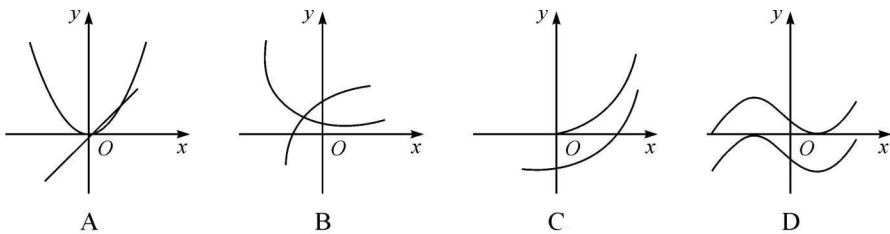
7. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示,则 $f'(x_A)$ 与 $f'(x_B)$ 的大小关系是 ()

- A. $f'(x_A) > f'(x_B)$ B. $f'(x_A) < f'(x_B)$
 C. $f'(x_A) = f'(x_B)$ D. 不能确定



第 7 题图

8. 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数,将 $y=f(x)$ 和 $y=f'(x)$ 的图象画在同一个直角坐标系中,不可能正确的是 ()





二、填空题(本大题共 7 小题,每小题 4 分,共 28 分)

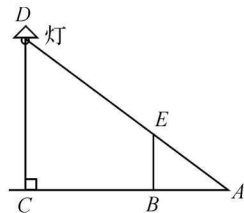
9. 已知物体的运动速度与时间之间的关系是 $v(t) = t^2 + 2t + 2$, 则在时间间隔 $[1, 1 + \Delta t]$ 内的平均加速度是_____, 在 $t = 1$ 时的瞬时加速度是_____.
10. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义, 且有 $f(x_0 + \Delta x) - f(x) = a\Delta x + b(\Delta x)^2$ (a, b 为常数), 则 $f'(x_0) =$ _____.
11. 函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $x = 2$ 处的导数为_____.
12. 如果一个函数的瞬时变化率处处为 0, 那么这个函数的图象是_____.
13. 设 $y = f(x)$ 为可导函数, 且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1 - 2x)}{x} = -1$, 则 $f'(1) =$ _____.
14. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象在 $x = 3$ 处的切线方程为 $y = -2x + 7$, 则 $f(3) + f'(3) =$ _____.
15. 设函数 $y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处可导, 已知 $f(-x)$ 在 $x = a$ 处的导数为 A , 则 $f(x)$ 在 $x = -a$ 处的导数为_____.

三、解答题(本大题共 5 小题,共 48 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (本题 8 分)求函数 $f(x) = x + \frac{2}{x}$ 在 $x = 1$ 处的导数.

17. (本题 10 分)路灯距地面 8m, 一个身高为 1.6m 的人以 84m/min 的速度从路灯在地面上的射影点 C 处沿直线离开路灯.

- (1)求身影的长度 y 与人距路灯的距离 x 之间的关系式;
- (2)求人离开路灯的第一个 10s 内身影长度的平均变化率.



第 17 题图



18. (本题 10 分) 若一物体的运动方程为 $s = \begin{cases} 3t^2 + 2, & t \geq 3, \\ 29 + 3(t-3)^2, & 0 \leq t \leq 3. \end{cases}$ (位移单位: m, 时间单位: s)

求: (1) 物体在 $t \in [3, 5]$ 内的平均速度;

(2) 物体的初速度 v_0 ;

(3) 物体在 $t=1$ 时的瞬时速度.

19. (本题 10 分) 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线与直线 $y = x - 2$ 平行, 求 b, c 的值.



20. (本题 10 分) 已知点 P 在曲线 $C_1: y = x^2 + 1$ 上, 且曲线在点 P 处的切线与曲线 $C_2: y = -2x^2 - 1$ 相切, 求点 P 的坐标.



特训2 导数的运算

训练内容:

导数的定义和几何意义,求函数图象在某一点处的切线方程,导数计算公式和导数运算法则的应用,复合函数的求导法则,求一些基本初等函数以及复合函数的导数.

一、选择题(本大题共8小题,每小题3分,共24分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 函数 $f(x) = e^x \cos x$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线斜率为 ()
 A. 0 B. -1 C. 1 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 已知函数 $y = 2x^2 - 2x + 1$ 的导数为 y' , 则 y' 等于 ()
 A. $2x - 2$ B. $4x + 1$ C. $4x - 2$ D. $2x + 1$
- 已知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的两个可导函数,若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足 $f'(x) = g'(x)$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足 ()
 A. $f(x) = cg(x)$ (c 为常数) B. $f(x) - g(x) = c$ (c 为常数)
 C. $f(x) - g(x) = 0$ D. $f(x) + g(x) = cf(x) + g(x)$ (c 为常数)
- 已知直线 $y = x + 1$ 与曲线 $y = \ln(x + a)$ 相切, 则 a 等于 ()
 A. -1 B. -2 C. 0 D. 2
- 已知函数 $f(x) = a \sin ax$ ($a \in \mathbf{R}$) 的图象过点 $P(2\pi, 0)$, 并且在点 P 处的切线斜率为 4, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 ()
 A. 2π B. π C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$
- 已知 $f(x) = x^2 - xf'(0) - 1$, 则 $f(2014)$ 的值为 ()
 A. 2012×2014 B. 2013×2014
 C. 2013×2015 D. 2014×2016
- 设函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3} \sin \theta}{3} x^3 + \frac{\cos \theta}{2} x^2 + 4x - 1$, $\theta \in [0, \frac{5\pi}{6}]$, 则导数 $f'(-1)$ 的取值范围是 ()
 A. $[3, 4 + \sqrt{3}]$ B. $[3, 6]$
 C. $[4 - \sqrt{3}, 6]$ D. $[4 - \sqrt{3}, 4 + \sqrt{3}]$
- 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 上的导函数为 $f'(x)$, $f'(x)$ 在区间 (a, b) 上的导函数为 $f''(x)$, 在区间 (a, b) 上, 若 $f''(x) > 0$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上为“凹函数”. 已知 $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{12}mx^4 - 2x^2$ 在 $(1, 3)$ 上为“凹函数”, 则实数 m 的取值范围是 ()
 A. $(-\infty, \frac{31}{9})$ B. $[\frac{31}{9}, 5]$
 C. $(-\infty, -3]$ D. $(-\infty, 5)$



二、填空题(本大题共 7 小题,每小题 4 分,共 28 分)

9. 设函数 $f(x) = ax^2 - b\sin x$, 且 $f'(0) = 1, f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

10. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} \cos x$, 则 $f(\pi) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ _____.

11. 已知函数 $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2ax^2 + 3x (a > 0)$ 的导数 $f'(x)$ 的最大值为 5, 则在函数 $f(x)$ 图象上的点 $(1, f(1))$ 处的切线方程是_____.

12. 若函数 $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 1 + \sin 2x$, 则 $f(g(x)) =$ _____, $g(f(x)) =$ _____.

13. 若可导函数 $f(x)$ 满足 $f'(3) = 9$, 则 $f(3x^2)$ 在 $x=1$ 处的导数值为_____.

14. 若函数 $y = x(1 - ax)^2 (a > 0)$, 且 $y'|_{x=2} = 5$, 则实数 $a =$ _____.

15. 设函数 $f'(x)$ 是 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的导函数, $f(0) = 1$, 且 $3f(x) = f'(x) - 3$, 则 $4f(x) > f'(x)$ 的解集是_____.

三、解答题(本大题共 5 小题,共 48 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (本题 8 分)求下列函数的导数.

(1) $y = x \sqrt{1+x^2}$;

(2) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$;

(3) $y = x \sin^2 x$;

(4) $y = \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.



17. (本题 10 分) 已知函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x) = 3x^2 - 6x$, 且 $f(0) = 4$, 解不等式 $f(x) > 0$.

18. (本题 10 分) 若存在过点 $(1, 0)$ 的直线与曲线 $y = x^3$ 和 $y = ax^2 + \frac{15}{4}x - 9$ 都相切, 求 a 的值.



19. (本题 10 分) 已知曲线 $y = e^{2x} \cos 3x$ 在 $(0, 1)$ 处的切线与直线 l 的距离为 $\sqrt{5}$, 求直线 l 的方程.

20. (本题 10 分) 设函数 $f(x) = ax - \frac{b}{x}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $7x - 4y - 12 = 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求证: 曲线 $y = f(x)$ 上任一点处的切线与直线 $x = 0$ 和直线 $y = x$ 所围成的三角形的面积为定值, 并求出此定值.



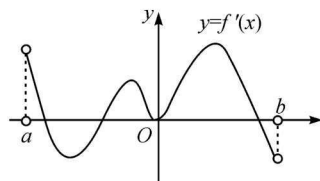
特训3 导数与函数的单调性、极值和最值

训练内容：

利用导数讨论函数的单调性，会求函数的单调区间，利用导数求函数的极值，求函数在给定区间上的最大值和最小值。

一、选择题(本大题共8小题，每小题3分，共24分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

- 函数 $f(x) = (x-3)e^x$ 的单调递增区间是 ()
 A. $(-\infty, 2)$ B. $(0, 3)$ C. $(1, 4)$ D. $(2, +\infty)$
- 函数 $y = 1 + 3x - x^3$ 有 ()
 A. 极小值-1, 极大值1 B. 极小值-2, 极大值3
 C. 极小值-2, 极大值2 D. 极小值-1, 极大值3
- 若函数 $f(x) = a \ln x + x$ 在 $x=1$ 处取到极值, 则 a 的值为 ()
 A. $\frac{1}{2}$ B. -1 C. 0 D. $-\frac{1}{2}$
- “可导函数 $y=f(x)$ 在某点的导数值为0”是“函数 $y=f(x)$ 在该点取极值”的 ()
 A. 充分非必要条件 B. 既不充分也不必要条件
 C. 必要非充分条件 D. 充要条件
- 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x - \ln x (x > 0)$, 则 $y=f(x)$ ()
 A. 在区间 $(\frac{1}{e}, 1)$, $(1, e)$ 内均有零点
 B. 在区间 $(\frac{1}{e}, 1)$, $(1, e)$ 内均无零点
 C. 在区间 $(\frac{1}{e}, 1)$ 内无零点, 在区间 $(1, e)$ 内有零点
 D. 在区间 $(\frac{1}{e}, 1)$ 内有零点, 在区间 $(1, e)$ 内无零点
- 已知函数 $f(x) = -x^3 + ax^2 - x - 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调函数, 则实数 a 的取值范围是 ()
 A. $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$ B. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
 C. $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ D. $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- 已知函数 $f(x)$ 的定义域为开区间 (a, b) , 导函数 $f'(x)$ 在 (a, b) 内的图象如图所示, 则函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的极值点有 ()
 A. 1个 B. 2个
 C. 3个 D. 4个
- 设函数 $f'(x)$ 是偶函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的导函数, $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的



第7题图



唯一零点为 2, 并且当 $x \in (-1, 1)$ 时, $xf'(x) + f(x) < 0$, 则使得 $f(x) < 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()

A. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

B. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

C. $(-1, 1)$

D. $(-2, 2)$

二、填空题(本大题共 7 小题, 每小题 4 分, 共 28 分)

9. 已知 $f(x) = x^2 + 2xf'(1)$, 则 $f'(0) =$ _____.

10. 若函数 $f(x) = x(x-c)^2$ 在 $x=2$ 处有极大值, 则常数 $c =$ _____.

11. 曲线 $y = \frac{1}{x}$ 和 $y = x^2$ 在它们交点处的两条切线与 x 轴所围成的三角形面积是_____.

12. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$ 在 $x=1$ 时有极值 10, 那么 a, b 的值分别为_____.

13. 已知函数 $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax - 5$ 在 $[1, +\infty)$ 上总是单调函数, 则 a 的取值范围为_____.

14. 已知函数 $f(x) = x^3 + mx^2 + (m+6)x + 1$ 存在极值, 则实数 m 的取值范围为_____.

15. 已知 $f(x)$ 为定义在 $(0, +\infty)$ 上的可导函数, 且 $f(x) > xf'(x)$ 恒成立, 则不等式 $x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) > 0$ 的解集为_____.

三、解答题(本大题共 5 小题, 共 48 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (本题 8 分) 已知函数 $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}mx^2 - 2m^2x - 4$ (m 为常数, 且 $m > 0$) 有极大值 $-\frac{5}{2}$, 求 m 的值.

17. (本题 10 分) 已知函数 $f(x) = ax^3 + (a-1)x^2 + 48(a-2)x + b$ 的图象关于原点成中心对称.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 当 $x \in [1, 5]$ 时, 求函数的最值.



18. (本题 10 分) 已知函数 $f(x) = px - \frac{p}{x} - 2\ln x$.

(1) 若 $p=2$, 求曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 在其定义域内为增函数, 求正实数 p 的取值范围.

19. (本题 10 分) 设函数 $f(x) = x + ax^2 + b\ln x$, 曲线 $y = f(x)$ 过点 $P(1, 0)$, 且在 P 点处的切线斜率为 2.

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 求证: $f(x) \leq 2x - 2$.



20. (本题 10 分) 已知函数 $f(x) = a \ln(2x+1) + bx + 1$.

(1) 若函数 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极值, 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线与直线 $2x + y - 3 = 0$ 平行, 求 a 的值;

(2) 若 $b = \frac{1}{2}$, 试讨论函数 $y = f(x)$ 的单调性.