GAOKAO SHUXUE

浙大数学优辅

更高更妙

追求**更高** 人生**更妙**

- 每天学一招备考秘籍
- 每天测一组仿真试题
- 每天记一点常用结论
- 每天在高效率中进步

更高更妙的

考前30天备考手册

高考数学

主编 蔡小雄（正高、特级教师）

审校 蔡天乐（北京大学学生）

蔡小雄、张宗余、江战明、黄明才、孙军波五大名师联合编著

北大数院学子从高三复习参与者的视角进行策划、精选与审核

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

更高更妙的考前30天备考手册

高考数学

主编　蔡小雄

编著　蔡小雄　张宗余　江战明
　　　黄明才　孙军波

审校　蔡天乐

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

更高更妙的考前30天备考手册.高考数学 / 蔡小雄主编.—杭州:浙江大学出版社,2017.3
ISBN 978-7-308-16703-1

Ⅰ.①更… Ⅱ.①蔡… Ⅲ.①中学数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第039058号

更高更妙的考前30天备考手册(高考数学)
蔡小雄 主编

责任编辑 夏晓冬
责任校对 董 文
封面设计 林智广告
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路148号 邮政编码310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排 版 杭州星云光电图文制作有限公司
印 刷 临安市曙光印务有限公司
开 本 889mm×1194mm 1/16
印 张 11.5
字 数 372千
版 印 次 2017年3月第1版 2017年3月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-16703-1
定 价 29.80元

浙江大学出版社发行中心联系方式:0571-88925591;http://zjdxcbs.tmall.com

追求更高　人生更妙

2009年在杭二中又带完一届高三后，我将自己多年的备考心得与专题编撰成册出版《更高更妙的高中数学思想与方法》，没想到，八年八版，畅销不断，读者遍布大江南北。之后几年，应出版社要求又相继出版了《更高更妙的高考二轮复习》、《更高更妙的解题》、《更高更妙的一题多解与一题多变》等，可以说"高妙"已成为教辅类图书中的品牌，成为无数高中数学教师教好数学、无数高中生学好数学的必备图书。

2016年国庆，刚进北京大学数学学院读本科的儿子打来电话问候的同时，不经意间说"老爸，你的'高妙'我们很多同学用过，都说好，他们说如果当时有一本关于高考最后30天的备考手册就更好了，'临时抱佛脚'还是很有用的，对于数学复习来说，用好这30天，可以提高很多……"儿子的话让我感触颇多，的确，无论是老高考还是新高考阶段，我们已经习惯了订几本复习用书一轮复习、二轮复习，甚至三轮复习，我们习惯了一遍遍地讲题、做题，到了最后一个月，教师几乎"黔驴技穷"，学生几乎"手足无措"，这样的复习是低效的。

有没有这样一本书，能让学生在最后的备考阶段有条不紊，如虎添翼，事半功倍呢？市场上之前还没有，我们应该让它有！

2017年浙江省作为全国两个试点省市之一参加新高考，从四月选考结束到六月高考期间，学生只需要复习语文、数学与英语这三科了，如何提高这期间数学复习的效率，更是迫切地需要一本"高妙"的书！为了我在教的本届高三学生我也得努力一把，出一本对他们真正有帮助的"高妙"！助他们一臂之力！让他们的分数更高，人生更妙！

时不我待，机不可失！说干就干！为了继承"高妙"，创造"高妙"，我特邀了省内四位名师一同参加编著，他们都曾获评省教坛新秀，都是全国、省、市级优质课评比一等奖获得者，都曾带过六届以上毕业班，有的还多次参加过高考、选考与学考的命题工作，他们是高中数学教学高手中的高手！本书定稿后，寒假从北大回来的儿子对全书做了审校，他从高三复习参与者的视角理解高考，并精选及补充了他在高考复习阶段认为最需要的内容！有他们的加盟，"高妙"定能"高妙"！

本书共30天内容，每天花100分钟学习，每天在高效率中进步：

◆每天学一招备考秘籍

限时40分钟，以历届高考或统考中的典型试题为例，每天介绍一种更高更妙的知识或方法，并针对招术中介绍的知识与方法进行"练一手"。

◆每天测一组仿真试题

以50分钟的量，提供最新测试卷，精选全国通用的9题，以中档题为主，每题有答案，而且对于能力题还提供详细答案，方便学生自测自评，找到高考的感觉。

◆每天记一点常用结论

提醒学生记一些高考解题常用结论，每天花10分钟保住本属于自己的分。

经过三个月，尤其是2017年寒假"白+黑"的努力，这本《更高更妙的考前30天备考手册》终于大功告成了！在出版社编辑认真校对了三遍之后，我还是不放心，为了尽量减少差错，为了对学生负责，我又在印刷前邀请了杭师大附中李昕、段佳、刘其闯、涂小坡、陈飒飒、魏朝翰及象山中学、定海一中的十余位教师做了一遍，虽然做不到尽善尽美，但求一丝不苟，全心全意！当然，限于本人水平，本书谬误与粗糙之处，在所难免，恳请大家不吝批评指正！

蔡小雄

2017年3月5日于杭州

目 录

巧用性质　妙解函数

学一招备考秘籍

函数性质主要指函数的单调性、奇偶性、周期性、对称性，要深刻理解并加以巧妙地运用.

以对称性为例，若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(b-x)$，则函数图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称；若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)+f(b-x)=c$，则函数图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$ 对称.

典例精析

【例 1】已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=2^{|x-m|}-1$（m 为实数）为偶函数，记 $a=f(\log_{0.5}3)$，$b=f(\log_2 5)$，$c=f(2m)$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

讲解：由函数 $f(x)=2^{|x-m|}-1$ 为偶函数可知，$m=0$，故 $f(x)=2^{|x|}-1$.

当 $x>0$ 时，$f(x)$ 为增函数，$\log_{0.5}3=-\log_2 3$，$\therefore \log_2 5>|-\log_{0.5}3|>0$.

$\therefore b=f(\log_2 5)>a=f(\log_{0.5}3)>c=f(2m)$，故选 C.

评注：对于一些指数或对数形式的比较大小问题，一般可以通过函数单调性解决.

【例 2】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，当 $x<0$ 时，$f(x)=x^3-1$；当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(-x)=-f(x)$；当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f\left(x-\frac{1}{2}\right)$，则 $f(6)$ 的值为（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 2

讲解：当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即 $f(x)=f(x+1)$，所以 $f(x)$ 是周期函数，周期 $T=1$，所以 $f(6)=f(1)$. 当 $x<0$ 时，$f(x)=x^3-1$ 且 $-1\leqslant x\leqslant 1$，$f(-x)=-f(x)$，所以 $f(2)=f(1)=-f(-1)=2$，故选 D.

评注：用已知自变量的函数解析式，求定义域内其他自变量的函数值的问题中，一般处理方法是根据函数奇偶性或周期性把待求自变量的函数值转化到已知自变量的函数值.

【例 3】设函数 $f(x)=ax^2-2ax+2-2b$（$a,b\in\mathbf{R}$），当 $x\in[-2,2]$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则 $a+2b$ 的最大值是________.

讲解：因为 $f(x)=(x^2-2x)a-2b+2$，令 $x^2-2x=-1$ 可得 $x=1$. 显然 $1\in[-2,2]$，所以有 $f(1)=a-2a-2b+2\geqslant 0$，即 $-a-2b+2\geqslant 0$，故 $a+2b\leqslant 2$.

验证当 $a=1,b=\frac{1}{2}$ 时，$a+2b$ 可以取到最大值 2.

评注：要求最值的代数式为 $a+2b$，先将关于 x 的函数 $f(x)$ 转化为关于 a 的函数 $f(a)$，再根据 a,b 的系数比为 1∶2，令 a 的系数为 -1，转化为 $a+2b$ 的形式，进而求解（注意等号成立的条件）.

【例 4】设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$，满足对一切 $x\in\mathbf{R}$，$f(-x)+f(x)=x^2$ 恒成立，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增. 若 $f(2-a)-f(a)\geqslant 2-2a$，则实数 a 的取值范围为________.

讲解：令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$，则 $g(-x)+g(x)=0$，即 $g(x)$ 为奇函数. 当 $x\in(-\infty,0]$ 时 $f(x)$ 单调递增，显然 $g(x)$ 也单调递增. 因为 $g(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 因为 $f(2-a)-f(a)\geqslant 2-2a$，即有 $g(2-a)\geqslant g(a)$，所以有 $2-a\geqslant a$，即 $a\leqslant 1$.

评注：巧妙地构造、灵活地运用函数奇偶性以及单调性，可以完美地解决很多函数不等式问题.

☞ 练一手

1. 已知 $f(x)$，$g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数和奇函数，且 $f(x)-g(x)=x^3+x^2+1$，则 $f(1)+g(1)$ 的值为（　　）

A. -3　　B. -1　　C. 1　　D. 3

2. 若函数 $f(x)=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，则 $a=$ ________.

3. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x)=-f(2-x)$，当 $x<2$ 时，$f(x)$ 单调递增，如果 $x_1+x_2<4$，且 $(x_1-2)(x_2-2)<0$，则 $f(x_1)+f(x_2)$ 的值为（　　）

A. 可正可负　　B. 可能为 0　　C. 恒大于 0　　D. 恒小于 0

4. 设函数 $f(x)=2ax^2+bx-3a+1$，当 $x\in[-4,4]$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则 $5a+b$ 的最小值为________.

测一组仿真试题

一、选择题

1. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，则下列结论中正确的是（　　）

A. $f(x)g(x)$ 是偶函数　　B. $f(x)|g(x)|$ 是奇函数

C. $|f(x)|g(x)$ 是奇函数　　D. $|f(x)g(x)|$ 是奇函数

2. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上一点 M 到焦点 F 的距离等于 $2p$，则直线 MF 的斜率为（　　）

A. $\pm\sqrt{3}$　　B. ± 1

C. $\pm\frac{3}{4}$　　D. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}(|x-a^2|+|x-2a^2|-3a^2)$. 若 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x-1)\leqslant f(x)$，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $\left[-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right]$　　B. $\left[-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right]$

C. $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$　　D. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

二、填空题

4. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，$f(2)=0$. 若 $f(x-1)>0$，则 x 的取值范围是________.

5. 已知 $y=f(x)+x^2$ 是奇函数，且 $f(1)=1$. 若 $g(x)=f(x)+2$，则 $g(-1)=$ ________.

6. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的奇函数，当 $0<x<1$ 时，$f(x)=4^x$，则 $f\left(-\frac{5}{2}\right)+f(2)=$ ________.

三、解答题

7.已知 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle A,\angle B,\angle C$ 所对的边分别为 a,b,c,且 $a\cos B+\sqrt{3}b\sin A=c$.
(Ⅰ)求 $\angle A$ 的大小;
(Ⅱ)若 $a=1,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$,求 $b+c$ 的值.

8.设函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x,x\leqslant a,\\-2x,x>a.\end{cases}$
(Ⅰ)若 $a=0$,求 $f(x)$ 的最大值;
(Ⅱ)若 $f(x)$ 无最大值,求实数 a 的取值范围.

9.设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,已知 $a_1=a,S_{n+1}=2S_n+n+1,n\in\mathbf{N}^*$.
(Ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项公式;
(Ⅱ)当 $a=1$ 时,若 $b_n=\dfrac{n}{a_{n+1}-a_n}$,数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 $T_n,n\in\mathbf{N}^*$,求证:$T_n<2$.

记一点常用结论

有关函数 $f(x)$ 周期性的常用结论:
1.若 $f(x+a)=f(x-a)$,则函数 $f(x)$ 的周期为 $2|a|$;
2.若 $f(x+a)=-f(x)$,则函数 $f(x)$ 的周期为 $2|a|$;
3.若 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$,则函数 $f(x)$ 的周期为 $2|a|$;
4.若 $f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}$,则函数 $f(x)$ 的周期为 $2|a|$.

倒计时第 29 天

最值函数　大显身手

学一招备考秘籍

最值函数的定义：设 a,b 为实数，则 $\min\{a,b\}=\begin{cases}a,a\leqslant b,\\ b,b<a;\end{cases}\max\{a,b\}=\begin{cases}a,a\geqslant b,\\ b,b>a.\end{cases}$解有些求最值问题时，巧妙借助以下性质，可如虎添翼.

(1)$\min\{a,b\}\leqslant\dfrac{a+b}{2}\leqslant\max\{a,b\}$；

(2) $\min\limits_{a>0,b>0}\{a,b\}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\max\limits_{a>0,b>0}\{a,b\}$.

☞ 典例精析

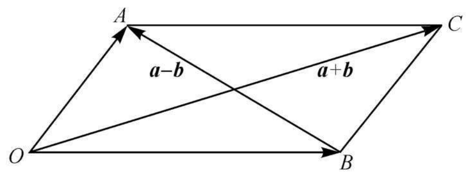
【例 1】 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为平面向量，则(　　)

A. $\min\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\}\leqslant\min\{|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|\}$

B. $\min\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\}\geqslant\min\{|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|\}$

C. $\max\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2\}\leqslant|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$

D. $\max\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2\}\geqslant|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$



例 1 图

讲解： $\max\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2\}\geqslant\dfrac{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2}{2}=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$，故选 D.

【例 2】 已知 $f(x),g(x)$ 都是偶函数，且在$[0,+\infty)$上单调递增，设函数 $F(x)=f(x)+g(1-x)-|f(x)-g(1-x)|$，若 $a>0,b\in\mathbf{R}$，则(　　)

A. $F(-a)\geqslant F(a)$ 且 $F(1+a)\geqslant F(1-a)$　　B. $F(-a)\geqslant F(a)$ 且 $F(1+a)\leqslant F(1-a)$

C. $F(-a)\leqslant F(a)$ 且 $F(1+a)\geqslant F(1-a)$　　D. $F(-a)\leqslant F(a)$ 且 $F(1+a)\leqslant F(1-a)$

讲解： 由题意知 $F(x)=2\min\{f(x),g(1-x)\}$，而 $f(x),g(x)$ 都是偶函数，且在$[0,+\infty)$上单调递增，所以 $g(1+a)\geqslant g(|1-a|)=g(1-a)$，$f(1+a)\geqslant f(|1-a|)=f(1-a)$，

所以 $F(a)=2\min\{f(a),g(1-a)\}\leqslant2\min\{f(a),g(1+a)\}=F(-a)$，

$F(1+a)=2\min\{f(1+a),g(a)\}\geqslant2\min\{f(1-a),g(a)\}=F(1-a)$. 故选 A.

评注： 通过现象看出问题本质为两个函数的最小值，借助最值函数判断大小，方便快捷. 当然，作为选择题，本题也可用特殊化的方法快速求解.

【例 3】 已知 $x\geqslant0,y\geqslant0,3\leqslant x+y\leqslant5$，求 x^2-xy+y^2 的最小值.

讲解：解法一　令 $x=a\sin^2\theta,y=a\cos^2\theta,\theta\in[0,2\pi],a\in[3,5]$.

$$x^2-xy+y^2=a^2\sin^4\theta-a^2\sin^2\theta\cos^2\theta+a^2\cos^4\theta=a^2\left(1-\frac{3}{4}\sin^22\theta\right)\geqslant\frac{9}{4}.$$

解法二　$x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy\geqslant(x+y)^2-3\cdot\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}(x+y)^2\geqslant\dfrac{9}{4}$.

【例 4】求 $\max\{\min\{3+\log_{\frac{1}{4}}x,\log_2 x\}\}$.

讲解:解法一　$\min\{3+\log_{\frac{1}{4}}x,\log_2 x\}=\begin{cases}3+\log_{\frac{1}{4}}x, x\geqslant 4,\\ \log_2 x, 0<x<4,\end{cases}$ 考虑分段的最值,可得当 $x=4$ 时取最大值 2.

解法二　$3\min\{3+\log_{\frac{1}{4}}x,\log_2 x\}=3\min\left\{3-\frac{1}{2}\log_2 x,\log_2 x\right\}\leqslant 2\left(3-\frac{1}{2}\log_2 x\right)+\log_2 x=6.$

☞ 练一手

1. 已知函数 $f(x)=x^2+px+q$ 过点 $(\alpha,0)$,$(\beta,0)$,若存在整数 n,使 $n<\alpha<\beta<n+1$,则 $\min\{f(n),f(n+1)\}$ 与 $\frac{1}{4}$ 的大小关系为(　　)

A. $\min\{f(n),f(n+1)\}>\frac{1}{4}$　　B. $\min\{f(n),f(n+1)\}<\frac{1}{4}$

C. $\min\{f(n),f(n+1)\}=\frac{1}{4}$　　D. 不能确定

2. 设 x,y 为实数,且 $5x^2+4y^2=10x$,则 x^2+y^2 的最大值为________.

3. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$,$a,b,c\in\mathbf{R}$,记 $M(a,b,c)$ 为 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的最大值,则 $\frac{a+b+2c}{M(a,b,c)}$ 的最大值是________.

4. 求 $\min\{\max\{x^2+xy+x,4y^2+xy+2y\}\}$.

测一组仿真试题

一、选择题

1. 在 $\triangle ABC$ 中,“$\angle A>\frac{\pi}{6}$”是“$\cos A<\frac{1}{2}$”的(　　)

A. 充要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分不必要条件　　D. 既不是充分条件也不是必要条件

2. 点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心(三角形三边中线的交点),设 $\overrightarrow{GB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{GC}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{AB}$ 等于(　　)

A. $\frac{3}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{3}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　C. $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　　D. $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

3. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$. 若对任意的实数 x,都有 $2f(x)+xf'(x)<2$ 恒成立,则使 $x^2f(x)-f(1)<x^2-1$ 成立的实数 x 的取值范围为(　　)

A. $\{x\mid x\neq\pm 1\}$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $(-1,1)$　　D. $(-1,0)\cup(0,1)$

二、填空题

4. 已知角 θ 的终边过点 $(4,-3)$,则 $\tan\theta=$________,$\frac{\sin(\theta+90^\circ)+\cos\theta}{\sin\theta-\cos(\theta-180^\circ)}=$________.

5. 已知 $\log_a 2=m$,$\log_a 3=n$,其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$,则 $a^{m+2n}=$________,用 m,n 表示 $\log_4 3$ 为________.

6. 已知 $x>0,y>0$,则 $\max\left\{\min\left\{x,\frac{y}{x^2+y^2}\right\}\right\}=$________.

三、解答题

7. 在 $\triangle ABC$ 中，三个内角 $\angle A,\angle B,\angle C$ 所对的边分别为 a,b,c，已知函数 $f(x)=\sin(2x+B)+\sqrt{3}\cos(2x+B)$ 为偶函数，$b=f\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

（Ⅰ）求 b；

（Ⅱ）若 $a=3$，求 $\triangle ABC$ 的面积 S.

8. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列，首项 $a_1=a$，$\{a_n\}$ 的部分项 $a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_n}$ 恰为等比数列，且 $k_1=1,k_2=5,k_3=17$.

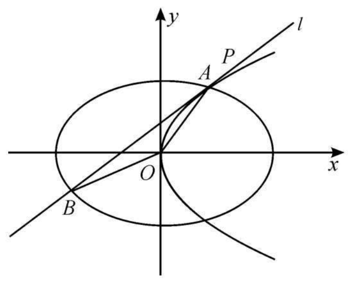
（Ⅰ）求数列的通项公式 a_n；（用 a 表示）

（Ⅱ）设数列 $\{k_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求 S_n.

9. 已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，抛物线 $C_2:y^2=4x$，过抛物线 C_2 上一点 P（异于原点 O）作切线 l 交椭圆 C_1 于 A,B 两点.

（Ⅰ）求切线 l 在 x 轴上的截距的取值范围；

（Ⅱ）求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.



第 9 题图

记一点常用结论

关于函数的单调性有以下结论：

1. 已知函数 $y=f(x)$，对于区间 I 上的任意 x_1,x_2，如果当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$（$f(x_1)>f(x_2)$），那么称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是增（减）函数，并称该函数在这一区间上具有单调性.

2. 如果 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 在 (a,b) 上单调递增（减），则 $f(x)+g(x)$ 在 (a,b) 上也单调递增（减）.

3. 对于复合函数 $y=f[g(x)]$，如果 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 的单调性相同（相反），则 $y=f[g(x)]$ 是增（减）函数.

倒计时第 28 天

应用导数　开阔思路

学一招备考秘籍

利用导数可以求出函数在任意点处的切线斜率和函数的单调区间.注意导函数的正负与原函数单调性的关系.

若已知 $f'(x)>f(x)(x\in I)$,则可以构造函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$,因为 $f'(x)-f(x)>0$,所以 $F'(x)>0$,即 $F(x)$ 在区间 I 上单调递增.

典例精析

【例 1】若函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-f'(1)x^2-x$,则 $f'(1)$ 的值为(　　)

A. 0　　B. 2　　C. 1　　D. -1

讲解:因为 $f'(x)=x^2-2f'(1)x-1$,令 $x=1$ 得 $f'(1)=1-2f'(1)-1$.所以 $f'(1)=0$,故选 A.

评注:具体自变量的导数值一定是定值,因为在函数式中若带有某个导数值,只需要把它当成常数处理.

【例 2】设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的导函数,$f(-1)=0$,当 $x>0$ 时,$xf'(x)-f(x)<0$,则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　B. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$　　D. $(0,1)\cup(1,+\infty)$

讲解:因为 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 为奇函数,$f(-1)=0$,所以 $f(1)=-f(-1)=0$.当 $x\neq 0$ 时,令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$,则 $g(x)$ 为偶函数,且 $g(1)=g(-1)=0$.则当 $x>0$ 时,$g'(x)=\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$,故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数,在 $(-\infty,0)$ 上为增函数.

所以在 $(0,+\infty)$ 上,当 $0<x<1$ 时,$g(x)>g(1)=0\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}>0\Leftrightarrow f(x)>0$;在 $(-\infty,0)$ 上,当 $x<-1$ 时,$g(x)<g(-1)=0\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}<0\Leftrightarrow f(x)>0$.

综上,使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$,故选 A.

评注:在涉及导函数不等式问题中,一般需构造新函数,使新函数的导函数与已知不等式相关,然后根据已知不等式得出构造函数的单调性.

【例 3】已知曲线 $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{4}{3}$.

(Ⅰ)求曲线在点 $P(2,4)$ 处的切线方程;

(Ⅱ)求曲线过点 $P(2,4)$ 的切线方程;

(Ⅲ)求曲线中满足斜率为 1 的切线方程.

讲解:(Ⅰ)因为 $y'=x^2$,所以在点 $P(2,4)$ 处的切线的斜率 $k=y'|_{x=2}=4$.

所以曲线在点 $P(2,4)$ 处的切线方程为 $y-4=4(x-2)$,即 $4x-y-4=0$.

（Ⅱ）设曲线 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$ 与过点 $P(2,4)$ 的切线相切于点 $A\left(x_0,\frac{1}{3}x_0^3+\frac{4}{3}\right)$，则切线的斜率 $k=y'|_{x=x_0}=x_0^2$. 所以切线方程为 $y-\left(\frac{1}{3}x_0^3+\frac{4}{3}\right)=x_0^2(x-x_0)$，即 $y=x_0^2\cdot x-\frac{2}{3}x_0^3+\frac{4}{3}$. 因为点 $P(2,4)$ 在切线上，所以 $4=2x_0^2-\frac{2}{3}x_0^3+\frac{4}{3}$，即 $x_0^3-3x_0^2+4=0$，所以 $x_0^3+x_0^2-4x_0^2+4=0$，所以 $x_0^2(x_0+1)-4(x_0+1)(x_0-1)=0$，所以 $(x_0+1)(x_0-2)^2=0$，解得 $x_0=-1$ 或 $x_0=2$，故所求的切线方程为 $4x-y-4=0$ 或 $x-y+2=0$.

（Ⅲ）设切点为 (x_0,y_0)，故切线的斜率为 $k=x_0^2=1$，解得 $x_0=\pm1$，故切点为 $\left(1,\frac{5}{3}\right)$ 和 $(-1,1)$. 故所求切线方程为 $y-\frac{5}{3}=x-1$ 和 $y-1=x+1$，即 $3x-3y+2=0$ 和 $x-y+2=0$.

评注：解决本题的关键是准确理解导数的几何意义并正确区分“在”与“过”；曲线的切线与曲线的交点个数不一定只有一个，这和研究直线与二次曲线相切时有差别；切点既在切线上又在曲线上，即切点坐标满足直线方程和曲线方程.

【例 4】（Ⅰ）讨论函数 $f(x)=\frac{x-2}{x+2}e^x$ 的单调性，并证明当 $x>0$ 时，$(x-2)e^x+x+2>0$；

（Ⅱ）求证：当 $a\in[0,1)$ 时，函数 $g(x)=\frac{e^x-ax-a}{x^2}(x>0)$ 有最小值. 设 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$，求函数 $h(a)$ 的值域.

讲解：（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$. $f'(x)=\frac{(x-1)(x+2)e^x-(x-2)e^x}{(x+2)^2}=\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\geqslant0$，当且仅当 $x=0$ 时，$f'(x)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(-2,+\infty)$ 上单调递增. 因此当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)>f(0)=-1$. 所以 $(x-2)e^x>-(x+2)$，即 $(x-2)e^x+x+2>0$.

（Ⅱ）证明：$g'(x)=\frac{(x-2)e^x+a(x+2)}{x^3}=\frac{x+2}{x^3}[f(x)+a]$. 由（Ⅰ）知，$f(x)+a$ 单调递增，对任意 $a\in[0,1)$，$f(0)+a=a-1<0$，$f(2)+a=a\geqslant0$. 因此，存在唯一 $x_a\in(0,2]$，使得 $f(x_a)+a=0$，即 $g'(x_a)=0$. 当 $0<x<x_a$ 时，$f(x)+a<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x>x_a$ 时，$f(x)+a>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增. 因此 $g(x)$ 在 $x=x_a$ 处取得最小值，最小值为 $g(x_a)=\frac{e^{x_a}-a(x_a+1)}{x_a^2}=\frac{e^{x_a}+f(x_a)(x_a+1)}{x_a^2}=\frac{e^{x_a}}{x_a+2}$. 于是 $h(a)=\frac{e^{x_a}}{x_a+2}$，由 $\left(\frac{e^x}{x+2}\right)'=\frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}>0$ 知 $\frac{e^x}{x+2}$ 单调递增. 所以，由 $x_a\in(0,2]$ 得 $\frac{1}{2}=\frac{e^0}{0+2}<h(a)=\frac{e^{x_a}}{x_a+2}\leqslant\frac{e^2}{2+2}=\frac{e^2}{4}$. 因为 $\frac{e^x}{x+2}$ 单调递增，对任意 $\lambda\in\left(\frac{1}{2},\frac{e^2}{4}\right]$，存在唯一的 $x_a\in(0,2]$，$a=-f(x_a)\in[0,1)$，使得 $h(a)=\lambda$. 所以 $h(a)$ 的值域是 $\left(\frac{1}{2}\ \frac{e^2}{4}\right]$.

综上，当 $a\in[0,1)$ 时，$g(x)$ 有最小值 $h(a)$，$h(a)$ 的值域是 $\left(\frac{1}{2},\frac{e^2}{4}\right]$.

评注：函数不等式很多时候可以通过构造函数，再运用导数判断出新构造函数的单调性，然后根据自变量的大小得出函数值的大小；同时根据函数单调性可以比较快捷地得出函数在某个区间上的值域.

☞ 练一手

1. 曲线 $f(x)=x^3+x-2$ 在点 P_0 处的切线平行于直线 $y=4x-1$，则 P_0 点坐标为（　　）

A. $(1,0)$　　　　B. $(2,8)$

C. $(1,0)$ 和 $(-1,-4)$　　　　D. $(2,8)$ 和 $(-1,-4)$

2. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=-1$，其导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x)>k>1$，则下列结论中一定错误的是(　　)

A. $f\left(\frac{1}{k}\right)<\frac{1}{k}$　　B. $f\left(\frac{1}{k}\right)>\frac{1}{k-1}$　　C. $f\left(\frac{1}{k-1}\right)<\frac{1}{k-1}$　　D. $f\left(\frac{1}{k-1}\right)>\frac{k}{k-1}$

3. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足 $f(x)=3x^2+2x\cdot f'(2)$，则 $f'(2)=$ ________.

4. 已知 e 为自然对数的底数，设函数 $f(x)=(e^x-1)(x-1)^k(k=1,2)$，则(　　)

A. 当 $k=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取到极小值

B. 当 $k=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取到极大值

C. 当 $k=2$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取到极小值

D. 当 $k=2$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取到极大值

测一组仿真试题

一、选择题

1. 已知 i 是虚数单位，则 $\frac{2i}{1-i}$ 等于(　　)

A. $1+i$　　B. $-1+i$

C. $1-i$　　D. $-1-i$

2. α,β,γ 为不同的平面，a,b,c 为三条不同的直线，则下列命题正确的是(　　)

A. 若 $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$，则 $\alpha\parallel\beta$　　B. 若 $a\parallel\beta,a\parallel b$，则 $b\parallel\beta$

C. 若 $a\parallel\alpha,b\parallel\alpha,c\perp a,c\perp b$，则 $c\perp\alpha$　　D. 若 $a\perp\gamma,b\perp\gamma$，则 $a\parallel b$

3. 对二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$(a 为非零整数)，四位同学分别给出下列结论，其中有且只有一个结论是错误的，则错误的结论是(　　)

A. -1 是 $f(x)$ 的零点　　B. 1 是 $f(x)$ 的极值点

C. 3 是 $f(x)$ 的极值　　D. 点(2,8)在曲线 $y=f(x)$ 上

二、填空题

4. 若直线 $y=kx+1$ 与曲线 $y=x^3+ax+b$ 相切于点 $A(1,3)$，则 $2a+b=$ ________.

5. 当 $x\in[-2,1]$ 时，不等式 $ax^3-x^2+4x+3\geqslant 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

6. 已知函数 $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{b}{2}x^2+ax+1(a>0,b>0)$，则函数 $g(x)=a\ln x+\frac{f'(x)}{a}$ 在点 $(b,g(b))$ 处的切线斜率的最小值是________.

三、解答题

7. 已知向量 $a=(2\sin x,\sqrt{3}\cos x)$，$b=(-\sin x,2\sin x)$，函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的单调递增区间；

(Ⅱ)在 $\triangle ABC$ 中，a,b,c 分别是 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的对边且 $f(C)=1,c=1,ab=2\sqrt{3},a>b$，求 a,b 的值.

8. 已知函数 $f(x)=x^3+(1-a)x^2-a(a+2)x+b(a,b\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 的图象过原点，且在原点处的切线斜率为 -3，求 a，b 的值；

（Ⅱ）若曲线 $y=f(x)$ 存在两条垂直于 y 轴的切线，求 a 的取值范围.

9. 设函数 $f(x)=x^2-ax+b$.

（Ⅰ）讨论函数 $f(\sin x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的单调性并判断有无极值，有极值时求出极值；

（Ⅱ）记 $f_0(x)=x^2-a_0x+b_0$，求函数 $|f(\sin x)-f_0(\sin x)|$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值 D；

（Ⅲ）在（Ⅱ）中，取 $a_0=b_0=0$，求 $z=b-\dfrac{a^2}{4}$ 满足 $D\leqslant 1$ 时的最大值.

记一点常用结论

若已知曲线过点 $P(x_0,y_0)$，求曲线过点 $P(x_0,y_0)$ 的切线，则需分点 $P(x_0,y_0)$ 是切点和不是切点两种情况求解.

(1) 当点 $P(x_0,y_0)$ 是切点时：

第一步：求导数 $f'(x)$；

第二步：求切线斜率 $k=f'(x_0)$；

第三步：写出过点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

(2) 当点 $P(x_0,y_0)$ 不是切点时可分以下几步完成：

第一步：设出切点坐标 $P'(x_1,f(x_1))$；

第二步：写出过点 $P'(x_1,f(x_1))$ 的切线方程 $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$；

第三步：将点 P 的坐标 (x_0,y_0) 代入切线方程，求出 x_1；

第四步：将 x_1 的值代入方程 $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$，可得过点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程.

倒计时第 27 天

玩转通项　搞定数列

学一招备考秘籍

各种数列问题在很多情形下，就是对数列通项公式的求解. 特别是在一些综合性比较强的数列问题中，求得通项，便“执得牛耳”，抓住了数列问题的关键. 除了直接可运用等差数列、等比数列公式的数列通项问题外，下面再介绍几种常见的数列类型及通项的求法.

类型一　递推公式为 $a_{n+1}=a_n+f(n)$

解法：把原递推公式转化为 $a_{n+1}-a_n=f(n)$，利用累加法(逐差相加法)求解.

类型二　递推公式为 $a_{n+1}=f(n)a_n$

解法：把原递推公式转化为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$，利用累乘法(逐商相乘法)求解.

类型三　递推公式为 $a_{n+1}=pa_n+q$

解法：通过待定系数法，将原问题转化为特殊数列$\{a_n+k\}$的形式求解.

类型四　递推公式为 $a_{n+1}=pa_n+f(n)$

解法：利用待定系数法，构造数列$\{b_n\}$，消去 $f(n)$ 带来的差异.

☞ 典例精析

【例 1】已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n^2+n}$，求 a_n.

讲解：由条件知 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，分别令 $n=1,2,3,\cdots,(n-1)$，代入上式得$(n-1)$个等式累加之，即$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$，

所以 $a_n-a_1=1-\frac{1}{n}$. $\because a_1=\frac{1}{2}$，$\therefore a_n=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}$.

【例 2】已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\frac{2}{3}$，$a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$，求 a_n.

讲解：由条件知$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$，分别令 $n=1,2,3,\cdots,(n-1)$，代入上式得$(n-1)$个等式累乘之，

即$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\Rightarrow\frac{a_n}{a_1}=\frac{1}{n}$.

又 $\because a_1=\frac{2}{3}$，$\therefore a_n=\frac{2}{3n}$.

【例 3】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+1(n\geqslant 2)$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

讲解：由$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+1(n\geqslant 2)$得$a_n-2=\frac{1}{2}(a_{n-1}-2)$，而$a_1-2=1-2=-1$，

$\therefore$ 数列$\{a_n-2\}$是以$\frac{1}{2}$为公比，-1为首项的等比数列.

$\therefore a_n-2=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$\therefore a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

评注：以上解法是通过对常数1的分解，进行适当组合，可得等比数列$\{a_n-2\}$，从而达到解决问题的目的. 一般地，可通过待定系数法完成.

【例 4】设数列$\{a_n\}$满足$a_1=4, a_n=3a_{n-1}+2n-1(n\geqslant 2)$，求$a_n$.

讲解：设$b_n=a_n+An+B$，则$a_n=b_n-An-B$，将a_n, a_{n-1}代入递推式得

$b_n-An-B=3[b_{n-1}-A(n-1)-B]+2n-1=3b_{n-1}-(3A-2)n-(3B-3A+1)$.

$\therefore\begin{cases}A=3A-2,\\B=3B-3A+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1,\\B=1.\end{cases}$

$\therefore$ 取$b_n=a_n+n+1$ ①，则$b_n=3b_{n-1}$. 又$b_1=6$，故$b_n=6\times 3^{n-1}=2\times 3^n$，

代入①式得$a_n=2\times 3^n-n-1$.

评注：(1) 若$f(n)$为n的二次式，则可设$b_n=a_n+An^2+Bn+C$；

(2) 本题也可由$a_n=3a_{n-1}+2n-1, a_{n-1}=3a_{n-2}+2(n-1)-1(n\geqslant 3)$两式相减得$a_n-a_{n-1}=3(a_{n-1}-a_{n-2})+2$，转化为$b_n=pb_{n-1}+q$求之.

【例 5】设$\{a_n\}$是首项为1的正项数列，且$a_n^2-a_{n-1}^2-na_n-na_{n-1}=0(n\in\mathbf{N}^*, n\geqslant 2)$，求数列的通项公式$a_n$.

讲解：由题设得$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-n)=0$，

由$a_n>0, a_{n-1}>0$知$a_n+a_{n-1}>0$，于是$a_n-a_{n-1}=n$，

所以$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

【例 6】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_n=3^n+2a_{n-1}(n\geqslant 2)$，求$a_n$.

讲解：将$a_n=3^n+2a_{n-1}$两边同除以3^n，得$\frac{a_n}{3^n}=1+\frac{2a_{n-1}}{3^n}\Rightarrow\frac{a_n}{3^n}=1+\frac{2}{3}\times\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}$.

设$b_n=\frac{a_n}{3^n}$，则$b_n=1+\frac{2}{3}b_{n-1}$.

令$b_n-t=\frac{2}{3}(b_{n-1}-t)$，则$b_n=\frac{2}{3}b_{n-1}+\frac{1}{3}t$，解得$t=3$.

条件可化成$b_n-3=\frac{2}{3}(b_{n-1}-3)$，

数列$\{b_n-3\}$是以$b_1-3=\frac{a_1}{3}-3=-\frac{8}{3}$为首项，$\frac{2}{3}$为公比的等比数列.

所以$b_n-3=-\frac{8}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

由$b_n=\frac{a_n}{3^n}$得$a_n=b_n\cdot 3^n=3^n\left[-\frac{8}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+3\right]$，化简得$a_n=3^{n+1}-2^{n+2}$.

评注：递推式为$a_{n+1}=pa_n+q^{n+1}$(p,q为常数)时，可同除q^{n+1}，得$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{a_n}{q^n}+1$. 令$b_n=\frac{a_n}{q^n}$，从而化归为$a_{n+1}=pa_n+q$($p,q$为常数)型.