



高职高专“十三五”规划教材

Gao Deng Shu Xue

高等数学

(上册)

龚和林 主 编

王红玉 副主编

高 华 主 审

高等数学(上册)

主 编 龚和林
副主编 王红玉
主 审 高 华



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册 / 龚和林主编. —杭州:浙江大学出版社,2016.9

ISBN 978-7-308-16224-1

I. ①高… II. ①龚… III. ①高等数学—高等职业教育—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 216923 号

高等数学(上册)

龚和林 主编

责任编辑 张颖琪
责任校对 王 波
封面设计 春天书装
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址:<http://www.zjupress.com>)
排 版 杭州中大图文设计有限公司
印 刷 浙江新华数码印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 11
字 数 256 千
版 次 2016 年 9 月第 1 版 2016 年 9 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-16224-1
定 价 25.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行中心联系方式:0571-88925591;<http://zjdxcbbs.tmall.com>

内容提要

“高等数学”是理工科专业的一门重要的基础理论课程,它不仅培养学生的创新思维能力,而且还要为学生学习后继课程和解决实际问题提供必不可少的数学基础知识及常用的数学方法。本教材以教育部《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》(教高[2006]16号)和教育部为推动高等职业教育创新发展印发的《高等职业教育创新发展行动计划(2015—2018年)》(教职成[2015]9号)为指导,根据高职院校高等数学的教学目标和社会对高职学生的职业能力要求,并结合浙江工业职业技术学院四年制高职本科试点专业——机械设计制造及其自动化(数控技术)的专业特点,大量引入了教学与应用实例,强化了“自我学习、信息处理、数字应用、解决问题、创新”等职业核心能力的培养,以期达到培养高职本科专业学生综合应用数学的能力、建立数学模型的能力,力争培养学生的科学计算能力和利用计算机分析处理实际问题的能力。

本教材内容除预备知识外,包含极限与连续、导数与微分、微分的应用、不定积分、定积分、定积分的应用共六章内容,每一章从学习基础理论和解决实际问题两个角度,即从理论和应用两方面对高等数学知识进行全面的讲解,知识结构设置由易到难,逻辑清晰。首先学习相关概念,了解理论知识;再通过例题讲解,诠释理论;最后通过总结归纳来巩固要点,完善理论体系。

本教材结构严谨、逻辑清晰、例题较多、可读性强,有利于教师教学,方便学生的自我学习、自我提高和自我创新,可供高职高专等工科专业学生使用。

前 言

本教材依照教育部《高职高专教育专业人才培养目标及规格》及《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,结合高职高专教学改革的经验及新时期高等职业本科教育对数学基础课的教学要求编写。

本教材以知识内容“必需、够用”为原则,以培养学生“可持续发展”为目的;综合吸收大量优质教材的特点,力求通俗、简洁与高效,力求符合高职相应层次学生的数学基础及学习心理,便于学生对高等数学的学习、理解及应用;选题重基础,注意覆盖面;强化基本理论、方法和技能的训练,以此夯实基础;对提高学生运用数学知识及思维方法的能力起到一定的促进作用。

本教材由浙江工业职业技术学院龚和林任主编,王红玉任副主编,高华任主审,其中第1~3章由王红玉编写,第0章及第4~6章由龚和林编写,高华负责教材的审校工作。本书在编写过程中,得到了浙江大学出版社有关老师的指导和大力支持,在此表示感谢。

本书疏漏之处在所难免,敬请广大专家、教师和读者提出宝贵意见和建议,以便我们不断予以完善。

编 者

2016年5月

目 录

第 0 章 若干预备知识	1
第 1 章 极限与连续	15
§ 1.1 极限的概念	15
§ 1.2 极限的运算	22
§ 1.3 无穷小量与无穷大量	30
§ 1.4 函数的连续性	34
高数小知识 极限思想的起源与发展	41
第 2 章 导数与微分	43
§ 2.1 导数的概念	43
§ 2.2 导数的运算	50
§ 2.3 隐函数和参数方程所确定的函数的导数	57
§ 2.4 函数的微分及其应用	61
高数小知识 导数的起源与发展	68
第 3 章 微分中值定理和导数的应用	70
§ 3.1 微分中值定理	70
§ 3.2 洛必达法则	75
§ 3.3 函数的单调性和极值	80
§ 3.4 曲线的凹凸性与拐点、函数图形的描绘	87
高数小知识 一座高耸的金字塔——拉格朗日	93
第 4 章 不定积分	94
§ 4.1 不定积分的概念与性质	94
§ 4.2 换元积分法	100
§ 4.3 分部积分法和有理函数的积分	108

高数小知识 求不定积分的列表法	115
第 5 章 定积分	116
§ 5.1 定积分的概念及性质	116
§ 5.2 微积分基本公式	124
§ 5.3 定积分的换元积分法和分部积分法	128
高数小知识 反常积分	134
第 6 章 定积分的应用	136
§ 6.1 定积分的微元法	137
§ 6.2 定积分的微元法在几何上的应用	138
* § 6.3 定积分的微元法在物理上的应用	149
高数小知识 定积分在经济学上的一个应用	158
附 录	
《高等数学》(上册)综合自测题 I	161
参考答案	163
《高等数学》(上册)综合自测题 II	166
参考答案	168
参考文献	170

第 0 章 若干预备知识

(一) 集合

具有特定性质的具体或抽象的事物全体称为**集合**(简称**集**),一般用大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 表示.如自然数集合 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$.组成集合的事物称为集合的**元素**. α 是集合 A 的元素,表示为 $\alpha \in A$.

集合的表示方法有:**列举法**(将集合的元素逐一列举出来的方式)、**描述法**(即 $\{$ 代表元素 $|$ 满足的性质 $\}$)、**韦恩图**(用一条封闭的曲线内部表示一个集合的方法)等.

集合的三要素:

- (1) 确定性,集合中的元素是确定的,要么在集合中要么不在,两者必居其一;
- (2) 互异性,集合不允许出现相同的元素,比如 $\{a, a, b, b, c, c\}$ 是错误的写法,应该写成 $\{a, b, c\}$;
- (3) 无序性,集合中元素的排列不考虑顺序问题,例如 $\{a, b, c\}$ 与 $\{a, c, b\}$ 表示同一个集合.

集合 A 中元素的数目称为集合 A 的**基数**,记作 $|A|$.当其为有限时,集合 A 称为**有限集**,反之则为**无限集**.

特殊集合符号:

$\mathbf{N}$:由自然数构成的集合 $\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$,称为**自然数集**.

$\mathbf{R}$:由实数构成的集合,称为**实数集**.

$\mathbf{Z}$:由整数构成的集合,称为**整数集**.

$\mathbf{C}$:由复数构成的集合,称为**复数集**.

$\mathbf{Q}$:由有理数构成的集合,称为**有理数集**,即 $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^+ \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质} \right\}$.

$\emptyset$:**空集**.

【说明】 可在集合记号上标示上标表示集合与正(负)实数集的交集.如 $\mathbf{N}^+$ 表示正整数集.

(二) 区间与邻域

有限区间:设 $a < b$,称数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为开区间,记为 (a, b) ,即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

类似可定义闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$, 半开半闭区间 $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$, 其中 a 和 b 称为区间 (a, b) 、 $[a, b]$ 、 $[a, b)$ 、 $(a, b]$ 的端点, $b - a$ 称为区间的长度. 有限区间可在数轴上的表示, 如图 0-1.



图 0-1

无限区间: $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$, $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$, $(-\infty, +\infty) = \{x \mid |x| < +\infty\}$. 无穷区间也可在数轴上的表示, 如图 0-2.

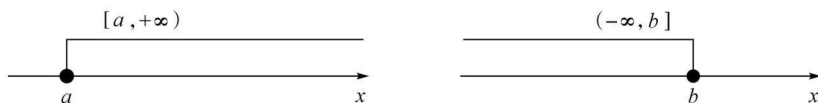


图 0-2

邻域: 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域, 记作 $U(a)$. 设 $\delta > 0$, 称开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 为点 a 的 δ 邻域 (见图 0-3), 记作 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\} = \{x \mid |x - a| < \delta\},$$

其中点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径.

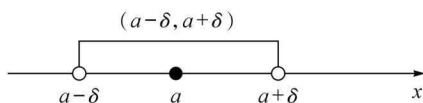


图 0-3

去心(空心)邻域: a 的 δ 去心邻域 $\dot{U}(a, \delta)$ 定义为

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta, x \neq a\} = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

(三) 数域

定义 1(数域) 设 K 是某些复数所组成的集合. 如果 K 中至少包含两个不同的复数, 且 K 对复数的加、减、乘、除四则运算是封闭的, 即对 K 内任意两个数 a, b (a 可以等于 b), 必有 $a \pm b \in K$, $ab \in K$, 且当 $b \neq 0$ 时, $a/b \in K$, 则称 K 为一个数域.

【例 1】 典型的数域举例: 复数域 $\mathbf{C}$; 实数域 $\mathbf{R}$; 有理数域 $\mathbf{Q}$; Gauss 数域:

$$\mathbf{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Q}\}, \text{ 其中 } i = \sqrt{-1}.$$

【例 2】 任意数域 K 都包括有理数域 $\mathbf{Q}$.

证明 设 K 为任意一个数域. 由定义可知, 存在一个元素 $a \in K$, 且 $a \neq 0$. 于是

$$0 = a - a \in K, \quad 1 = \frac{a}{a} \in K.$$

进而 $\forall m \in \mathbf{Z}^+$,

$$m = 1 + 1 + \cdots + 1 \in K.$$

最后, $\forall m, n \in \mathbf{Z}^+, \frac{m}{n} \in K, -\frac{m}{n} = 0 - \frac{m}{n} \in K$. 这就证明了 $\mathbf{Q} \subseteq K$.

(四) 集合的运算, 集合的映射(像与原像、单射、满射、双射)的概念

定义2 (集合的交、并、差) 设 S 是集合, A 与 B 的公共元素所组成的集合称为 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$; 把 A 和 B 中的元素合并在一起组成的集合称为 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$; 从集合 A 中去掉属于 B 的那些元素之后剩下的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集, 记做 $A \setminus B$.

定义3 (集合的映射) 设 A, B 为集合, 如果存在法则 f , 使得 A 中任意元素 a 在法则 f 下对应 B 中唯一确定的元素(记作 $f(a)$), 则称 f 是 A 到 B 的一个映射, 记为

$$f: A \rightarrow B, a \mapsto f(a).$$

如果 $f(a) = b \in B$, 则 b 称为 a 在 f 下的像, a 称为 b 在 f 下的原像. A 的所有元素在 f 下的像构成的 B 的子集称为 A 在 f 下的像, 记作 $f(A)$, 即 $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$.

若 $\forall a \neq a' \in A$, 都有 $f(a) \neq f(a')$, 则称 f 为单射. 若 $\forall b \in B$, 都存在 $a \in A$, 使得 $f(a) = b$, 则称 f 为满射. 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 为双射, 或称一一对应.

(五) 函数的概念与性质

定义4 (函数) 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集, 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则总有唯一确定的数值与其对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$. 数集 D 称为该函数的定义域, 有时记为 D_f , x 称为自变量, y 称为因变量.

当自变量 x 取数值 x_0 时, 因变量 y 按照法则 f 所取定的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$. 当自变量 x 取遍定义域 D 的每个数值时, 对应的函数值的全体组成的数集 $R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

两个函数相等: 函数的定义域和对应规则为函数的两个要素. 若两个函数的定义域相同, 对应规则也相同, 则称两个函数相等.

函数的表示法: 函数的表示法有图像法、表格法和公式法等.

函数的单调性: 若对任意 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调增加(函数的图像表现为自左至右是单调上升的曲线, 见图0-4); 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调减少(函数的图像表现为自左至右是单调下降的曲线, 见图0-5). 单调增加函数和单调减少函数统称单调函数. 若函数 $y = f(x)$ 是区间 (a, b) 上的单调函数, 则称区间 (a, b) 为单调区间.

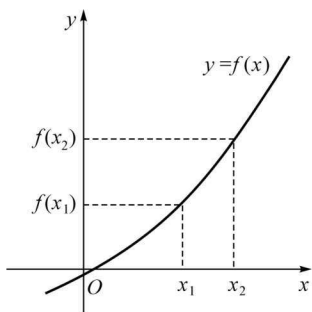


图 0-4

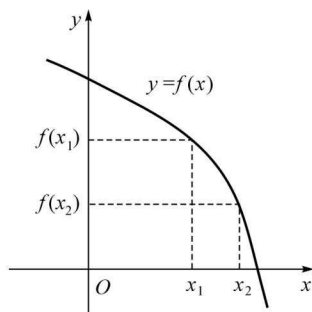


图 0-5

函数的奇偶性: 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 即对任意 $x \in D$, 有 $-x \in D$. 若对任意 $x \in D$ 满足 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是 D 上的**偶函数**; 若对任意 $x \in D$ 满足 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 是 D 上的**奇函数**, 既不是奇函数也不是偶函数的函数, 称为**非奇非偶函数**. 偶函数的图形关于 y 轴对称(见图 0-6), 奇函数的图形关于原点对称(见图 0-7).

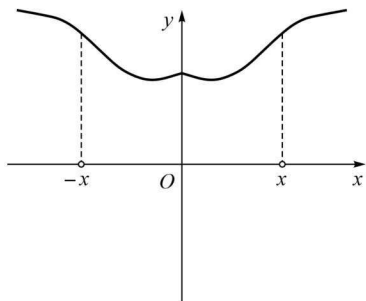


图 0-6

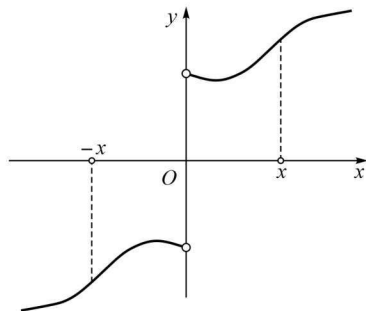


图 0-7

函数的周期性: 若存在 $T > 0$, 对任意 $x \in D$ (定义域), 一定有 $x \pm T \in D$, 且 $f(x \pm T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是**周期函数**, T 为 $f(x)$ 的**周期**. 常值函数 $f(x) = C$ 是以任意正数为周期的周期函数.

函数的有界性: 如果存在 $M > 0$, 使对于任意 $x \in D$ 满足 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $y = f(x)$ 是有界的.

反函数: 设函数 $y = f(x)$ 为定义在数集 D 上的函数, 其值域为 R_f . 如果对于数集 R_f 中的每个数 y , 在数集 D 中都有唯一确定的数 x 使 $y = f(x)$ 成立, 则得到一个定义在数集 R_f 上的以 y 为自变量、 x 为因变量的函数, 称其为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**, 记为 $x = f^{-1}(y)$, 其定义域为 R_f , 值域为 D . 如 $y = 2x - 1$ 的反函数是 $x = \frac{y+1}{2}$.

习惯上, 我们总是将 $y = f(x), x \in D$ 的反函数 $x = f^{-1}(y), y \in R_f$ 用 $y = f^{-1}(x)$,

$x \in R_f$ 表示. 原函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称(见图 0-8).

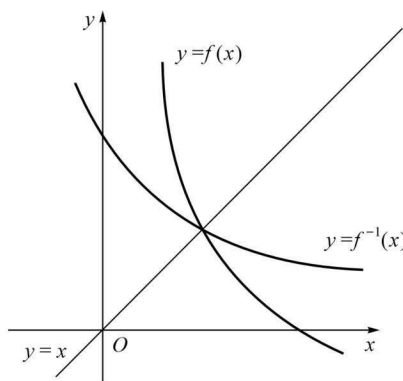


图 0-8

反函数存在定理: 若函数 $y = f(x)$ 在数集 D 上单调递增(单调递减), 则其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 存在, 并且在数集 D 上也单调递增(单调递减).

定义 5(复合函数) 设 $y = f(u)$, $u \in D_f$, $u = g(x)$, $x \in D_g$, 值域为 R_g 且 $R_g \subseteq D_f$, 若对每一个 $x \in D_g$, 有唯一的 $u \in R_g$ 与 x 对应, 则有唯一的 y 与 u 对应, 从而变量 x 与 y 之间通过变量 u 形成的一种新的函数关系, 这种函数关系称为由 $y = f(u)$, $u \in D_f$ 与 $u = g(x)$, $x \in D_g$ 复合而成的**复合函数**, 记为 $y = f[g(x)]$, $x \in D_g$, 其中 x 称为**自变量**, u 为**中间变量**, y 为**因变量**(即函数). 复合函数是指具有中间变量的函数.

由定义知, 两个函数的复合过程实际上就是将一个函数代入另一个函数. 例如, 在自由落体运动中, 物体的动能 E 是速度 v 的函数 $E = \frac{1}{2}mv^2$, 而速度 v 又是时间 t 的函数 $v = gt$, 因而, 动能 E 通过速度 v 的关系, 成为时间 t 的函数 $E = \frac{1}{2}m(gt)^2$.

【注意】 并不是任何两个函数都可复合成一个函数, 可复合的条件是: 只有当 $u = g(x)$ 的值域 R_g 和 $y = f(u)$ 的定义域 D_f 的交集不为空集时, 两者才可以复合. 如 $y = \arcsin u$ 与 $u = x^2 + 2$ 不能复合成一个函数, 因为 u 的值域为 $[2, +\infty)$ 与 $y = \arcsin u$ 的定义域 $[-1, 1]$ 的交集为空集.

(六) 求和号与求积号

为了把加法和乘法表达得更简练, 我们引进求和号和乘积号.

求和号与乘积号的定义: 设给定某个数域 K 上 n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 我们使用如下记号:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i,$$

$$a_1 a_2 \dots a_n = \prod_{i=1}^n a_i.$$

当然也可以写成

$$a + a + \cdots + a = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i,$$

$$a \cdot a \cdots a = \prod_{1 \leq i \leq n} a_i.$$

求和号的性质: 容易证明,

$$\lambda \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \lambda a_i$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

事实上, 最后一条性质的证明只需要把各个元素排成如下形状:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{array}$$

分别先按行和列求和, 再求总和即可.

(七) 三角函数

三角函数在研究三角形和圆等几何形状的性质时有重要作用, 也是研究周期性现象的基础数学工具. 常见的三角函数包括正弦函数、余弦函数和正切函数. 在航海学、测绘学、工程学等其他学科中, 还会用到如余切函数、正割函数、余割函数、正矢函数、余矢函数等其他的三角函数. 不同的三角函数之间的关系可以通过几何直观或者计算得出, 称为三角恒等式.

1. 三角函数的定义

在平面直角坐标系 xOy 中, 由原点 O 引出一条射线, 在射线上取一点 $P(x, y)$, 设旋转角 (从 x 轴沿逆时针方向旋转至射线所转过的角度) 为 α , 且 $|OP| = r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$, 则定义 (图 0-9):

$$\alpha \text{ 的正弦: } \sin \alpha = \frac{y}{r},$$

$$\alpha \text{ 的余弦: } \cos \alpha = \frac{x}{r},$$

$$\alpha \text{ 的正切: } \tan \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0),$$

$$\alpha \text{ 的余切: } \cot \alpha = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0),$$

$$\alpha \text{ 的正割: } \sec \alpha = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0),$$

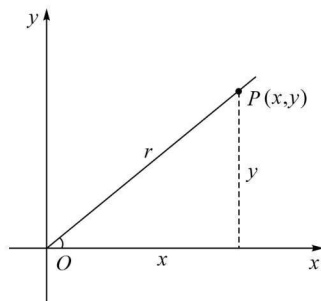


图 0-9

α 的余割: $\csc \alpha = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0)$.

【注意】

(a) 正弦、余弦函数在实数域上均有定义, 但正切函数在 $\left[\alpha \mid \alpha \in \mathbf{R}, \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right]$ 上, 余切函数在 $\left[\alpha \mid \alpha \in \mathbf{R}, \alpha = k\pi, k \in \mathbf{Z} \right]$ 上, 正割函数在 $\left[\alpha \mid \alpha \in \mathbf{R}, \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right]$ 上, 余割函数在 $\left[\alpha \mid \alpha \in \mathbf{R}, \alpha = k\pi, k \in \mathbf{Z} \right]$ 上定义.

(b) α 的正弦与余割的符号由 y 确定; α 的余弦与正割的符号由 x 确定; α 的正切与余切的符号由 $x \cdot y$ 确定.

2. 特殊角的三角函数值 (表 0-1)

表 0-1 注意 $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ 弧度, “—” 指代“不存在”

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
正弦	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
余弦	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
正切	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0
余切	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	—	0	—

3. 同角三角函数的基本关系

倒数关系: $\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$,

$$\sin \alpha \cdot \csc \alpha = 1,$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$$

商的关系: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sec \alpha}{\csc \alpha},$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\csc \alpha}{\sec \alpha}.$$

平方关系: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha,$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha.$$

4. 诱导公式(表 0-2)

表 0-2 一些三角恒等式

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$
$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin(3\pi/2 - \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$
$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(3\pi/2 - \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$
$\tan(\pi/2 - \alpha) = \cot \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(3\pi/2 - \alpha) = \cot \alpha$	$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
$\cot(\pi/2 - \alpha) = \tan \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(3\pi/2 - \alpha) = \tan \alpha$	$\cot(2\pi - \alpha) = -\cot \alpha$
$\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(3\pi/2 + \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$
$\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(3\pi/2 + \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$
$\tan(\pi/2 + \alpha) = -\cot \alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\tan(3\pi/2 + \alpha) = -\cot \alpha$	$\tan(2\pi + \alpha) = \tan \alpha$
$\cot(\pi/2 + \alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\cot(3\pi/2 + \alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(2\pi + \alpha) = \cot \alpha$

5. 两角和与差的三角公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}.$$

6. 万能公式

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

7. 半角的正弦、余弦和正切公式

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

8. 三角函数的降幂公式

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

9. 二倍(三倍)角的正弦、余弦和正切公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha,$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan \alpha}{1-\tan ^2 \alpha}.$$

$$\sin 3\alpha=3\sin \alpha-4\sin ^3 \alpha, \quad \cos 3\alpha=4\cos ^3 \alpha-3\cos \alpha, \quad \tan 3\alpha=\frac{3\tan \alpha-\tan ^3 \alpha}{1-3\tan ^2 \alpha}.$$

10.三角函数的和差化积、积化和差公式

$$\sin \alpha+\sin \beta=2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \sin \alpha-\sin \beta=2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2},$$

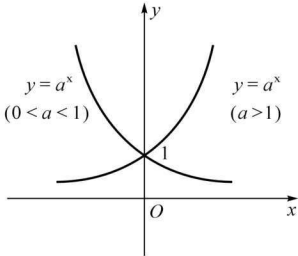
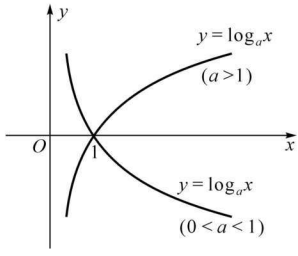
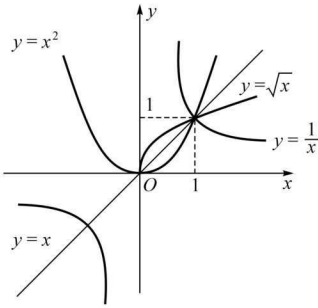
$$\cos \alpha+\cos \beta=2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \cos \alpha-\cos \beta=-2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta=\frac{1}{2}[\sin (\alpha+\beta)-\sin (\alpha-\beta)], \quad \sin \alpha \cdot \cos \beta=\frac{1}{2}[\sin (\alpha+\beta)+\sin (\alpha-\beta)],$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta=\frac{1}{2}[\cos (\alpha+\beta)+\cos (\alpha-\beta)], \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta=-\frac{1}{2}[\cos (\alpha+\beta)-\cos (\alpha-\beta)].$$

(八) 一些基本初等函数的图像(表 0-3、表 0-4)

表 0-3 一些常见函数的图像

函数名称	函数的记号	函数的图形	函数的性质
指数函数	$y=a^x(a>0, a\neq 1)$		(1) 不论 x 为何值, y 总为正数; (2) 当 $x=0$ 时, $y=1$.
对数函数	$y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$		(1) 其图形总位于 y 轴右侧, 并过 $(1, 0)$ 点; (2) 当 $a>1$ 时, 在区间 $(0, 1)$ 的值为负; 在区间 $(1, +\infty)$ 的值为正; 在定义域内单调增.
幂函数	$y=x^a$ (a 为任意实数)		令 $a=m/n$ (1) 当 m 为偶数, n 为奇数时, y 是偶函数; (2) 当 m, n 为奇数时, y 是奇函数; (3) 当 m 为奇数, n 为偶数时, y 在 $(-\infty, 0)$ 无意义.

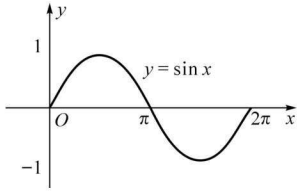
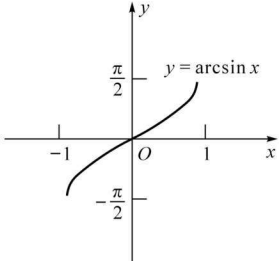
续表			
函数名称	函数的记号	函数的图形	函数的性质
三角函数	如 $y = \sin x$ (正弦函数) 仅以正弦函数为例		(1) 正弦函数是以 2π 为周期的周期函数; (2) 正弦函数是奇函数, 且 $ \sin x \leq 1$.
反三角函数	如 $y = \arcsin x$ (反正弦函数) 仅以反正弦函数为例		由于此函数为多值函数, 因此我们将此函数值限制在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上, 并称其为反正弦函数的主值.

表 0-4 其他三角函数与反三角函数的图像

