浙大优学
一题一课

刷百题不如解透一题

低年级同步课后提升 / 毕业班专题自主复习

一题一课
初中数学

YITI YIKE
CHUZHONG SHUXUE

第五册

主　　编　惠红民
本册主编　谭建新
　　　　　谭建华

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

一题一课

初中数学(第五册)

主　　编　惠红民
本册主编　谭建新
　　　　　谭建华

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

一题一课. 初中数学. 第五册 / 惠红民主编. —杭州:浙江大学出版社,2016. 6
ISBN 978-7-308-15644-8

Ⅰ. ①一… Ⅱ. ①惠… Ⅲ. ①中学数学课—初中—题解 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 043243 号

一题一课. 初中数学(第五册)
主编 惠红民

策　　划	陈海权(电子信箱:chess332@163.com)
责任编辑	夏晓冬
责任校对	金佩雯　陈　宇
封面设计	林智广告
出版发行	浙江大学出版社 (杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007) (网址: http://www.zjupress.com)
排　　版	杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷	富阳市育才印刷有限公司
开　　本	889mm×1194mm　1/16
印　　张	7.5
字　　数	288 千
版 印 次	2016 年 6 月第 1 版　2016 年 6 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-15644-8
定　　价	17.80 元

浙江大学出版社发行中心联系方式:0571－88925591;http://zjdxcbs.tmall.com

目　　录

刷百题不如解透一题

"学习解题的最好方法之一就是研究例题"

解题，无疑是学好数学的最佳途径. 于是，刷题风起，题海浪涌，一时间，必刷题、必做题、高频题、母题等，不一而足. 以为刷题是学习数学的魔方，题海则是成就学霸的金丹！固然，学习数学离不开解题，但沉溺题海并不意味着能考好数学，不如通过分析典型例题的解题过程来学会解题更加简短有效。

"题不在多，但求精彩"

"千淘万漉虽辛苦，吹尽狂沙始到金。"直白地表达出我们在"一题一课"系列的"一题"即例题选取上的态度与倾向。每一道例题不仅体现对概念的理解与思考价值，还体现知识与方法的代表性；每一道例题不仅解析精到、解法充满活力，更通过思维拓展，借题发挥，探索其中的内在规律和方法，达成"做一题，通一类，会一片"的目标 。

"多刷题，不如多反思"

"学而不思则罔，思而不学则殆。"做题需要产生效果、追求效益。**种种经验表明：题不是刷的越多越好，如果缺乏解题反思，不但浪费时间，甚至误导学习。**因此，本书在写作体例与排版上都突出了反思的意义与重要性，反思的过程既是对数学知识和解题方法的理解与强化的过程，也是学生内化解题能力的过程。

"解题是一种实践性的技能，就像游泳、滑雪或弹钢琴一样，只能通过模仿、练习和钻研才能占为己有"

例题帮助学生理解并学会运用同步教材所学知识及技能，然后通过变式练习（一课一练）内化落实，既满足低年级同步自主学习，又满足毕业班专题自主复习。

如果您是学生，请加入"一题一课学习交流"QQ群(205743216)，我们一起学习、提高；如果您是老师，请加入"一题一课教师研讨"QQ群(529481589)，我们一起研讨、探索。

"学习的本质，不在于记住哪些知识，而在于它触发了你的思考。"学习数学的道路上，祝愿您学会思考，体会成功！刷百题不如解透一题，"一题一课"系列图书还有哪些分册，请看本书封底。

第一章　一元二次方程

第 1 课　一元二次方程的定义

1. 一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，其中 ax^2 是二次项，a 是二次项系数，bx 是一次项，b 是一次项系数，c 是常数项.

2. 一元二次方程的一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 中，$a\neq0$ 是一个隐含条件，一不留神就容易忽略，在很多与一元二次方程相关的考题中经常就 $a\neq0$ 及未知数的最高次数是 2 来命制试题.

第 1 题　已知下列关于 x 的方程都是一元二次方程，求满足条件的 a 的值：

(1) $x^{|a|}-3x=2$；

(2) $(a+2)x^{|a|}-3x=2$；

(3) $(a+2)x^2+x^{|a|}-3x=2$.

【分析】　题目的要求简洁明了，就是考查对一元二次方程概念的本质是否了解. 在(1)中，由于最高次项的系数为 1，显然只需 $|a|=2$，即 $a=\pm2$，方程为 $x^2-3x=2$. 在(2)中，方程与(1)中方程的差别体现在最高次项的系数上，由于系数含有字母 a，我们必须考虑到系数 $a+2$ 的值不为 0，所以 $a\neq-2$，只能是 $a=2$，方程为 $4x^2-3x=2$. 在(3)中，方程貌似为前两个方程的简单组合，但若根据一元二次方程的定义去分析，会发现其实不然. 表面上已经有了二次项 $(a+2)x^2$，可是系数里含有字母 a，问题是第二项的未知项 $x^{|a|}$ 与第一项 $(a+2)x^2$ 有千丝万缕的联系，需要综合考虑：①若 $x^{|a|}=x^0=1$（由题意可知 $x\neq0$），即 $a=0$ 时，第一项 $(a+2)x^2=2x^2$，方程为一元二次方程 $2x^2-3x=1$ 满足条件；②若 $x^{|a|}=x$，即 $a=\pm1$ 时，第一项 $(a+2)x^2=3x^2$ 或 x^2，方程为一元二次方程 $3x^2-2x=2$ 或 $x^2-2x=2$ 满足条件；③若 $x^{|a|}=x^2$，即 $a=\pm2$，此时前两项可以合并同类项为 $(a+3)x^2$，方程为 $(a+3)x^2-3x=2$，在 $a=\pm2$ 时满足条件.

【解析】　(1) 因为关于 x 的方程 $x^{|a|}-3x=2$ 是一元二次方程，

所以未知数的最高次数为 2.

所以 $|a|=2$，解得 $a=\pm2$.

(2) 因为关于 x 的方程 $(a+2)x^{|a|}-3x=2$ 是一元二次方程，

所以未知数的最高次数为 2，即 $|a|=2$，

由绝对值的定义，解得 $a=\pm2$　①.

又因为二次项系数不能为零，

所以 $a+2\neq0$，解得 $a\neq-2$　②.

由①、②可知，$a=2$.

(3) 因为关于 x 的方程 $(a+2)x^2+x^{|a|}-3x=2$ 是一元二次方程，

①若 $a+2=0$，则有 $x^{|a|}=x^2$，即 $a=-2$ 时，方程为 $x^2-3x=2$，满足条件；

②若 $a+2\neq0$，则有 $x^{|a|}=x^0=1$，即 $a=0$，方程为 $2x^2+1-3x=2$，满足条件；

或 $x^{|a|}=x$，即 $a=\pm1$，则方程为 $3x^2-2x=2$ 或 $x^2-2x=2$，满足条件；

或 $x^{|a|}=x^2$，即 $a=2$，则方程为 $5x^2-3x=2$，满足条件.

综上，若方程 $(a+2)x^2+x^{|a|}-3x=2$ 是关于 x 的一元二次方程，则 $a=0,\pm1,\pm2$.

【经验分享】　1. 这道例题通过精心的设计，目的是在巩固一元二次方程定义的基础上，让同学们学会考虑问题要全面，培养数学思维的深刻性. 由此我们可以看出，围绕一元二次方程的定义可以设计很多类似的问题，关键是只要我们抓住未知数的个数、未知数的最高次数以及二次项系数不能为 0 这些方面就能顺利求解. 一课一练的 8 道练习都紧扣一元二次方程的定义.

2. 分类讨论思想是非常重要的数学思想，也是数学解题过程中经常涉及的内容，如例题的第(3)问，围绕最高次项的系数与次数进行了充分的分类讨论，一课一练第 2,6,7 题也涉及分类讨论，同学们要认真体会.

学习心得

一课一练 1(答案及解析见 P80)

1. 已知方程$(m+2)x^{2n-3}-1=0$是关于x的一元二次方程,则m________,$n=$________.
2. 已知方程$3x^2+x^{n+3}-mx^2+2=0$是关于x的一元二次方程,则$n=$________.
3. 判断下列方程哪些是一元一次方程,哪些是一元二次方程,哪些是分式方程.
   ①$2x^2-3x=2x(x-1)+5$,②$t^2-2t=-1$,
   ③$x^2-5xy+3y^2=0$,④$x^2-\dfrac{1}{x}+3=0$,
   ⑤$ax^2+bx+3=0$,⑥$(|a|+2)x^2+bx+3=0$.
4. 已知关于x的方程$kx^3-(x-1)^2=3(k-2)x^3+1$是一元二次方程,求实数k的值.
5. 已知关于x的方程$mx^2-3x=x^2-mx+2$.
   (1)若此方程为一元二次方程,求实数m的取值范围;
   (2)若此方程为一元一次方程,求实数m的值,并求方程的解.
6. 如果关于x的方程$x^{2a+b}-2x^{a+b}+3=0$是一元二次方程,求实数a与b的值.
7. 已知关于x的方程$(m-1)x^{m^2+1}-mx-3=0$(m为实数).
   (1)若方程是一元一次方程,求m的值,并求方程的解;
   (2)若方程是一元二次方程,求m的值,并写出它的二次项、一次项系数和常数项.
8. 已知关于x的方程$|m|x^3+(m^2-4m)x^2-3mx+m=4x^3-2$为一元二次方程.
   (1)求实数m的值;
   (2)在(1)的条件下,将方程整理为$ax^2+bx+c=0$($a>0$,a,b,c为整数,且$|a|,|b|,|c|$的最大公约数为1)的形式,并求$a-b+c$的值.

易错追踪

第2课 一元二次方程解的定义

1.一元二次方程的解:使一元二次方程左右两边的值相等的未知数的值就是这个一元二次方程的解,也叫作一元二次方程的根.

2.一元二次方程的解的应用:在一个含有字母系数的一元二次方程里,如果已知某个数是这个方程的解,那只需根据方程的解的定义,将这个方程中的未知数用这个数代换,从而构造出关于字母系数的新方程(组),使问题得到顺利解决.

第2题 已知关于x的一元二次方程$(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$.

(1)若方程有一个根是0,求实数m的值;

(2)若方程有一个根是1,求代数式$(m+1)(2m-1)-(m+1)^2+2m+2015$的值.

【分析】 这道题的题面简单、清晰,没有在审题上给我们设置任何障碍.第(1)问涉及的知识点表面上看只有一元二次方程根的定义,但由于二次项系数中含有字母m,所以自然会考查到一元二次方程的定义中二次项系数不为0这一应用,即通过一元二次方程解的定义将这两项串联起来:将已知的根$x=0$代入方程,得$m^2-4=0$,解得$m=\pm2$,但是题干部分的"一元二次方程"这六个字包含了二次项系数$m-2\neq0$这一隐含条件,第1课已有多次强调.第(2)问本质是求代数式的值的问题,还考查代数式的恒等变形.首先由已知的方程根$x=1$,得到一个关于m的二次三项式m^2+m-3的值为0(或者一个关于m的一元二次方程),然后再通过化简、变形,在结构特征上探索要求的代数式与上述代数式之间的内在联系.

【解析】 (1)根据题意,将$x=0$代入方程得$m^2-4=0$,

解得$m=\pm2$ ①.

又因为方程$(m-2)x^2+3x+m^2-4=0$是关于x的一元二次方程,

所以$m-2\neq0$,

解得$m\neq2$ ②.

由①、②可知,$m=-2$,

所以实数m的值为-2.

(2)[解法一]根据题意,将$x=1$代入方程,

得$(m-2)\cdot1^2+3\times1+m^2-4=0$,

整理得$m^2+m-3=0$,即$m^2+m=3$,

所以

$(m+1)(2m-1)-(m+1)^2+2m+2015$

$=(m+1)(2m-1)-(m+1)^2+2m+2+2013$

$=(m+1)[(2m-1)-(m+1)+2]+2013$

$=m(m+1)+2013$

$=m^2+m+2013$

$=3+2013$

$=2016$.

[解法二]根据题意,将$x=1$代入方程,

得$(m-2)\cdot1^2+3\times1+m^2-4=0$,

整理得$m^2+m-3=0$,即$m^2=3-m$,

所以

$(m+1)(2m-1)-(m+1)^2+2m+2015$

$=2m^2+m-1-m^2-2m-1+2m+2015$

$=m^2+m+2013$

$=3-m+m+2013$

$=2016$.

【经验分享】 1.方程的解的含义:求解与方程的解有关的问题,一定要理解方程的解的含义.一课一练的7道小题都紧扣一元二次方程的解的意义.

2.一题多解:如同本题,一般来说求代数式的值有两种基本解法,尽量避开通过解方程求出m的值再代入代数式的方法求值.

(1)整体代入法:解法一自始至终将m^2+m看作一个整体,然后将m^2+m的值整体代入到化简后的代数式中求值.另外,在这种解法中还要留意代数式化简过程的技巧运用.一课一练中第4、5、6题都涉及整体代入.

(2)降次代入法:解法二将等式$m^2+m-3=0$变形为$m^2=3-m$,这种变形相当于用一次代数式$3-m$去代换二次的m^2,使所求代数式不再含有m^2项,而只含有m的一次项,所以称作降次,这种方法是代数式化简求值问题的通法,一课一练第5、6题都涉及降次代入,第4题还有类似的消元代入法.

学习心得

一课一练 2

(答案及解析见 P80)

1. 若关于 x 的方程 $x^2+3x+a=0$ 有一个根为 -1，则另一个根为　　(　　)

   A. 2　　B. -2　　C. 3　　D. -3

2. 关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^{m^2+1}+4x+2=0$ 的解为　　(　　)

   A. $x_1=1$，$x_2=-1$　　B. $x_1=x_2=1$

   C. $x_1=x_2=-1$　　D. 无解

3. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两根分别为 $x_1=2$，$x_2=1$，求实数 p，q 的值.

4. 若一元二次方程 $ax^2-bx-7=0$ 有一根为 $x=-1$，求代数式 $3(a-2b)-4(3a+2b)-5(b+2a)$ 的值.

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x-1=0$ 的一个根为 m.

   (1)求 $m(7m-9)-(2m+1)(2m-1)-3$ 的值；

   (2)求 $m^2+\frac{1}{m^2}$ 的值.

6. 已知 a 是方程 $x^2-x-1=0$ 的一个根，求代数式 $a^3-2a+2016$ 的值.

7. 如果方程 $x^2-px+2q=0$ 和 $x^2-qx+2p=0(p\neq q)$ 有一个相同的根，试求这个相同的根.

易错追踪

第3课　直接开平方法解一元二次方程

1.解一元二次方程的基本思路是通过“降次”把一元二次方程转化为一元一次方程求解.

2.根据平方根的定义，“一般地，如果一个数x的平方等于a，即$x^2=a(a\geqslant 0)$，那么这个数x叫作a的平方根，记作$x=\pm\sqrt{a}$”，这里$x^2=a(a\geqslant 0)$就是一元二次方程，求一个非负数的平方根的过程就是解一元二次方程的过程.

3.根据平方根的定义解一元二次方程的方法，叫作直接开平方法，直接开平方法是解一元二次方程的基础方法，正因为是基础，所以在整个一元二次方程的解法中的地位不容忽视.

4.直接开平方法也是配方法求解一元二次方程的基础，是为配方法作铺垫的.

第3题　已知α,β是方程$4(x+2)^2=9$的两个根，求$|\alpha|+|\beta|$的值.

【分析】　到现在为止，我们还没有学习一元二次方程的具体解法，所以要求出一元二次方程$4(x+2)^2=9$的两个根，我们只能从已经学过的知识中寻求解决办法.而方程很容易变形为$(x+2)^2=\frac{9}{4}$，这个形式自然而然地让我们想到可以用平方根的定义，通过直接开平方来求解.需要注意的是，在学习平方根的定义时，就有个别同学老是忘记这条性质“一个正数有两个平方根，它们互为相反数”，从而在开方时忘记写正负号，漏掉一根.

【解析】　[解法一]因为$4(x+2)^2=9$，

所以$(x+2)^2=\frac{9}{4}$，

所以根据平方根的定义有$x+2=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\pm\frac{3}{2}$，

移项，$x=-2\pm\frac{3}{2}$，

所以$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{7}{2}$，

即方程的两根分别为$-\frac{1}{2}$和$-\frac{7}{2}$，

所以$|\alpha|+|\beta|=\left|-\frac{1}{2}\right|+\left|-\frac{7}{2}\right|=4$.

[解法二]因为$4(x+2)^2=9$，

所以$[2(x+2)]^2=9$，

两边直接开平方，$2(x+2)=\pm 3$，

所以$x+2=\pm\frac{3}{2}$，

移项，$x=-2\pm\frac{3}{2}$，

所以$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{7}{2}$，

即方程的两根分别为$-\frac{1}{2}$和$-\frac{7}{2}$，

所以$|\alpha|+|\beta|=\left|-\frac{1}{2}\right|+\left|-\frac{7}{2}\right|=4$.

【经验分享】　1.以后形如$(x+a)^2=b(b\geqslant 0)$这样的一元二次方程就可以用直接开平方法来求解.为落实直接开平方法，一课一练中专门设计了第2、3、4、5、8题.

2.转化思想：解一元二次方程的基本思想是“转化”，转化思想是数学思想的核心和精髓，如加和减的相互转化、乘和除的相互转化、难向易的转化、繁向简的转化、数与形的转化、抽象与直观的转化、一般与特殊的转化、未知向已知的转化等等，这道题的求解属于哪一种转化呢？一课一练第7题要用到转化思想，第1、6题还涉及分类讨论.

3.一题多解：解数学题，很多时候只要大的方向相同，目标达成一致，中间的过程和细节可以不一样.比如这道题的两种解法，只要对知识点理解透彻，方法正确，解题过程可以灵活处理.解法一的好处是一开始就将未知数的系数化成1；解法二的好处是将方程左边看成一个整体来开平方，避免出现分数开平方的问题.

学习心得

一课一练 3(答案及解析见 P81)

(答案及解析见 P81)

1. 下列是对于形如 $(x+a)^2=b$ 的方程的解的表述，其中正确的是　(　　)

A. 可以用直接开平方法求解，且 $x=-a\pm\sqrt{b}$

B. 当 $b\geqslant0$ 时，$x=a\pm\sqrt{b}$

C. 当 $b\geqslant0$ 时，$x=-a\pm\sqrt{b}$

D. 当 $b\geqslant0$ 时，$x=\pm\sqrt{b-a}$

2. 一元二次方程 $(x-1)^2=2$ 的解是　(　　)

A. $x_1=-1-\sqrt{2}$，$x_2=-1+\sqrt{2}$

B. $x_1=1-\sqrt{2}$，$x_2=1+\sqrt{2}$

C. $x_1=3$，$x_2=-1$

D. $x_1=1$，$x_2=-3$

3. 下面是某同学在一次测验中解答的填空题，其中答对的是　(　　)

A. 若 $x^2=4$，则 $\underline{x=2}$

B. 若方程 $x^2+2x+k=0$ 有一根为 2，则 $\underline{k=-8}$

C. 方程 $x(2x-1)=2x-1$ 的解为 $\underline{x=1}$

D. 方程 $(x-1)^2=144$ 的解为 $\underline{x=\pm12}$

4. 若 $a\neq0$，则方程 $9a^2x^2-16b^2=0$ 的解为　(　　)

A. $x=\dfrac{16b}{9a}$　　B. $x=\dfrac{4b}{3a}$

C. $x=\pm\dfrac{4b}{3a}$　　D. $x=\pm\dfrac{4b^2}{3a^2}$

5. 用直接开平方法解下列一元二次方程：

(1) $(x+3)^2-4=0$；

(2) $4(x-1)^2=\dfrac{9}{4}$；

(3) $2(x+2)^2-6=0$；

(4) $(2x-1)^2=(3-x)^2$.

6. 解关于 x 的一元二次方程 $4(x-1)^2+m=0$.

7. x 为何值时，分式 $\dfrac{x^2-9}{x+3}$ 的值为零？

8. 如果 $x=\dfrac{1}{2}$ 是关于 x 的方程 $2x^2+3ax-2a=0$ 的根，求关于 y 的方程 $y^2-3=a$ 的解.

易错追踪

第4课　配方法解一元二次方程

1.用配方法解一元二次方程，实际上就是通过配方，将一个一元二次方程转化为$(x+a)^2=b(b\geqslant 0)$的形式，进而用直接开平方法求解，蕴含着转化的数学思想方法.

2.配方法是解一元二次方程的通法，也就是说，理论上所有的一元二次方程都可以用配方法来求解.

3.配方法解一元二次方程也是一元二次方程求根公式的来源.

第4题　解方程：(1)$x^2-2mx-m^2=0$；(2)$2x^2-3x+1=0$.

【分析】　现有的解一元二次方程的经验是直接开平方法，是针对$(x+a)^2=b(b\geqslant 0)$形式的，而本题中的方程显然不具备这样的条件，需要我们想办法看能否将这个方程变成$(x+a)^2=b(b\geqslant 0)$的形式. 而方程$(x+a)^2=b(b\geqslant 0)$的特点——左边是一个含有未知数的完全平方式，右边是一个常数，这样我们的思路就有了，第(1)小题只要将方程中含有未知数的两项x^2和$-2mx$，根据完全平方式$x^2\pm 2ax+a^2$的特点，通过添加一项m^2，凑成完全平方式，即：$x^2-2mx=x^2-2mx+m^2-m^2=(x-m)^2-m^2$. 根据恒等变形，在配方的过程中加上一个$m^2$后，必须再减去一个$m^2$，实际上是加了一个0.

从配方的角度看，方程(2)与方程(1)的最大区别是二次项的系数不是1. 我们可以在方程两边同时除以二次项系数（在这里是方程两边都除以2），把方程(2)转化为方程(1)的类型，再根据完全平方式的特点配方.

【解析】　(1)在方程$x^2-2mx-m^2=0$两边同时加上m^2，得

$x^2-2mx+m^2-m^2=m^2$，

整理得$(x-m)^2=2m^2$，

①当$m\geqslant 0$时，$x-m=\pm\sqrt{2}m$，即$x=(1\pm\sqrt{2})m$，

所以$x_1=(1+\sqrt{2})m$，$x_2=(1-\sqrt{2})m$；

②当$m<0$时，$x-m=\pm\sqrt{2}(-m)$，

即$x=(-1\pm\sqrt{2})(-m)=(1\pm\sqrt{2})m$，

所以$x_1=(1+\sqrt{2})m$，$x_2=(1-\sqrt{2})m$.

综上所述，这个一元二次方程的解为$x_1=(1+\sqrt{2})m$，$x_2=(1-\sqrt{2})m$.

(2)在方程$2x^2-3x+1=0$两边同时除以2，得

$x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0$，即$x^2-2\times\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=0$，

方程两边同时加上$\left(\frac{3}{4}\right)^2$，

得$x^2-2\times\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{2}=\left(\frac{3}{4}\right)^2$，

整理得$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$，

直接开平方，得$x-\frac{3}{4}=\pm\frac{1}{4}$，

所以$x_1=1$，$x_2=\frac{1}{2}$.

【经验分享】　1.配方法解一元二次方程的一般步骤：

(1)将一元二次方程化为$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的形式；

(2)将二次项系数化为1；

(3)将常数项移到等号右边；

(4)等号两边同时加上一次项系数一半的平方；

(5)将等号左边的代数式写成完全平方形式；

(6)左右两边同时开平方；

(7)整理得到原方程的根.

一课一练第1题专门训练用配方法解一元二次方程，希望同学们仔细求解，用心体会.

2.分类讨论思想：第(1)小题的解法还涉及分类讨论思想，我们也可以这样求解：

在$(x-m)^2=2m^2$的基础上直接开平方，得$x-m=\pm\sqrt{2}m$，即$x=(1\pm\sqrt{2})m$，

在这里虽然没有分类讨论，但是我们心里一定要明白，虽然这两种情况下方程的两根在形式上完全一样，但本质上还是有区别的. 一课一练第3题需用到分类讨论.

3.配方法解一元二次方程的核心是配方. 配方法作为一种方法，不仅是解一元二次方程的方法之一，而且它还可以作为许多数学问题的一种研究方法，不仅在整个初中数学中占有非常重要的地位（它是代数式恒等变形的重要手段），而且在高中阶段一元二次不等式的解法中也至关重要，甚至在以后的二次函数求最值中也尤为重要. 一课一练第2、3、4、5、6题主要落实配方法的应用.

学习心得

一课一练 4（答案及解析见 P81）

1.用配方法解下列方程：

(1)$x^2+6x+5=0$；

(2)$-x^2+2x+3=0$；

(3)$2x^2+4x-3=0$；

(4)$2x^2-7x+3=0$.

2.已知关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 可配方为 $2(x-3)^2=1$，求代数式 $3a^2-2ab+abc$ 的值.

3.若方程 $4x^2-(m-2)x+1=0$ 的左边是一个完全平方式，求 m 的值.

4.已知代数式 $x^2-3x+2+k$ 的最小值为 $\frac{5}{4}$，求 k 的值.

5.用配方法证明代数式 $5x^2-6x+11$ 的值恒为正数.

6.已知对于任意实数 x,y，不等式 $m\leqslant x^2+y^2+2x-4y+7$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

易错追踪

第5课 公式法解一元二次方程、一元二次方程根的判别式

1. 公式法:任何一个一元二次方程,只要化成 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的形式,确定方程中的 a,b,c,求出 b^2-4ac 的值,当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时,就可以代入求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$来求解.

2. $\Delta=b^2-4ac$ 叫作一元二次方程根的判别式:当 $\Delta>0$ 时,方程有两个不相等的实数根 $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;当 $\Delta=0$ 时,方程有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$;当 $\Delta<0$ 时,方程没有实数根.一元二次方程根的判别式不仅可以用来判断一元二次方程的根的情况,而且为今后研究二次三项式、二次函数等奠定基础,进而解决很多综合性问题.

3. 通法:配方法可以求解所有的一元二次方程,公式法也可以求解所有的一元二次方程,什么时候选用配方法、什么时候选用公式法要具体问题具体分析,不能一概而论.

4. 特殊到一般:一元二次方程求根公式的推导过程,体现了由特殊到一般的数学思想.

第5题 已知关于 x 的方程 $kx^2-kx+1=0$ 有两个相等的实数根.

(1)求实数 k 的值;

(2)求方程的解.

【分析】 方程有"两个相等"的实数根,这是一元二次方程的标志性符号,所以这个方程一定是一元二次方程,"两个根"等同于"方程是一元二次方程",无论哪种说法都需注意:一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 中的隐含条件是 $a\neq0$,这是经常考查的知识点,也是有的同学容易粗心遗漏的地方.而"两个相等的实数根"进一步明确了该一元二次方程中,根的判别式 b^2-4ac 的值为0,代入系数 a,b,c,则问题转化为关于 k 的方程,求解即可.最后代入所求字母系数 k 的值,求关于 x 的一元二次方程的解.

【解析】 [解法一](1)因为有两个实数根的方程必为一元二次方程,

所以 $k\neq0$ ①.

又因为方程有两个相等的实数根,

所以 $\Delta=(-k)^2-4\times k\times1=0$,即 $k^2-4k=0$,

解得,$k=0$,或 $k=4$ ②.

综合①、②,得 $k=4$,

即实数 k 的值为4.

(2)因为 $k=4$,所以原方程化为 $4x^2-4x+1=0$,

所以 $a=4,b=-4$,

所以 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times4}=\frac{1}{2}$,

即原方程的解为 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

[解法二]方程两边都除以 k(首先判断方程 $kx^2-kx+1=0$ 中系数 k 不为0),得 $x^2-x+\frac{1}{k}=0$,

因为方程有两个相等的实数根,由配方法与直接开平方法可知,方程的左边一定是一个完全平方式,右边一定是0,

所以只有当 $\frac{1}{k}=\frac{1}{4}$ 时,方程才能变形为 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$,

解得 $k=4$,所以方程的解为 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

【经验分享】 1. 公式法是求解一元二次方程的基本方法,它的优点是模式化、程序化,可操作性强,不仅兼有"配方法"和"直接开平方法"的优势,还克服了"直接开平方法"的局限性,也省略了"配方法"的配方过程,因而具有通用性与简洁性,所以每个同学都必须掌握,而且要熟练、准确地运用.一课一练第1、4、6题主要落实公式法解一元二次方程.

2. 一元二次方程根的判别式和一元二次方程的定义经常一起考查,而且常考常新.其实解决这一类问题也有比较固定的套路,即一看二次项系数,二看判别式,两者综合考虑.虽然这类问题考查的知识点相对较固定,但是同样的知识点在命制题目时却可以千变万化,这就需要同学们在面对具体问题时,既要把握大的解题方向,也要具体问题具体分析,关注到每一个细节.为此一课一练设计了第2、3、4、5、6题,其中第3题还涉及消元代入求代数式的值,第4题还涉及分类讨论.

3. 解法二貌似不按常理出牌,但恰是真正理解了一元二次方程的定义以及解方程的各种方法背后的实质,才会这样灵活解题.

学习心得

一课一练 5(答案及解析见 P82)

1.用公式法解下列一元二次方程:

(1)$x^2+6x+5=0$;

(2)$x(x-4)=2-8x$;

(3)$2x^2+5x-3=0$;

(4)$mx^2-(m-4)x-4=0(m\neq0)$.

2.当 m 为何值时,关于 x 的一元二次方程$(m-1)x^2-(4m-1)x+4m-3=0$ 没有实数根?

3.已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+1=0(a\neq0)$有两个相等的实数根,求代数式$\frac{ab^2}{(a-2)^2+b^2-4}$的值.

4.已知关于 x 的方程$(a-6)x^2-8x+6=0$ 有实数根,求整数 a 的最大值,并求此时方程的实数根.

5.已知 a,b,c 是$\triangle ABC$ 的三边长,且关于 x 的方程$a(1+x^2)+2bx-c(1-x^2)=0$ 的两根相等,试判断$\triangle ABC$ 的形状.

6.已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(4m+1)x+3m+3=0(m>\frac{1}{2})$.

(1)求证:方程有两个不相等的实数根;

(2)设方程的根均为整数,求整数 m 的值和方程的整数根.

易错追踪

第6课　因式分解法解一元二次方程

1.解一元二次方程的基本思路，是通过“降次”把一元二次方程转化为一元一次方程求解，而因式分解法就是尝试将一个一般形式的一元二次方程分解成两个一次因式的乘积等于0的形式，即转化为两个一元一次方程，从而实现降次.

2.理论依据：因式分解法解一元二次方程的理论依据是：$A\cdot B=0\Leftrightarrow A=0$ 或 $B=0$.

3.转化思想：因式分解法解一元二次方程的过程，包含了“转化”的数学思想，再一次印证了转化思想的重要性和普遍性.

第6题　已知关于 x 的一元二次方程 $(k+4)x^2+3x+k^2+3k-4=0$ 的一根为0.

(1)求实数 k 的值；

(2)在(1)的条件下求原方程的解.

【分析】　这道题考查一元二次方程的定义、一元二次方程的解的定义和一元二次方程的解法，通过字母系数将这些知识点巧妙结合在一起.已知条件“一元二次方程”意味着二次项系数 $k+4\neq0$，即 $k\neq-4$；方程有一根为0，意味着将 $x=0$ 代入，得 $k^2+3k-4=0$，这是关于 k 的一元二次方程，我们知道二次三项式 k^2+3k-4 可以因式分解为 $(k+4)(k-1)$，从而一元二次方程 $k^2+3k-4=0$ 转化为 $k+4=0$，或 $k-1=0$，解得 $k=-4$，或 $k=1$，这就是因式分解法解一元二次方程.最后再将符合条件的 $k=1$ 代入原方程，得 $5x^2+3x=0$，这个关于 x 的一元二次方程又可以因式分解为 $x(5x+3)=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=-\frac{3}{5}$.

一元二次方程的概念以及方程解的定义是这一章最基础的知识，也是经常考查的知识，同学们应该做到熟练掌握、运用自如.对于综合性问题，在解题的过程中需要将每一个知识点经常考查的方式、需要注意的地方、容易出错的地方都考虑到，长此以往解题能力在无形中就有大幅提升.

【解析】　(1)因为方程为一元二次方程，

所以 $k+4\neq0$，

解得 $k\neq-4$　①.

又因为方程的一根为0，代入方程得 $k^2+3k-4=0$.

[解法一]因为 $\Delta=3^2-4\times1\times(-4)=25$，

所以 $k=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2\times1}$，

即 $k=1$，或 $k=-4$　②.

综合①、②，可得 $k=1$，

所以 k 的值为1.

[解法二]因为 $k^2+3k-4=(k-1)(k+4)=0$，

所以 $k-1=0$，或 $k+4=0$，

解得 $k=1$，或 $k=-4$　③.

综合①、③，可得 $k=1$，

所以 k 的值为1.

(2)由(1)知 $k=1$，原方程化为 $5x^2+3x=0$，

即 $x(5x+3)=0$，

所以 $x=0$，或 $5x+3=0$，

所以原方程的解为 $x_1=0$，$x_2=-\frac{3}{5}$.

【经验分享】　1.一题多解：一元二次方程的解法是解决这道题的关键，我们已经研究了一元二次方程的所有解法，而且配方法和公式法可以求解所有的一元二次方程，我们可以根据具体问题，结合自己的解题经验灵活选用.第(1)小题中的方程给出两种解法，意在让同学们体会不同的方程到底选用什么方法求解更为合适.一课一练第3、5、6、7题都是落实一元二次方程的解法.

2.因式分解的方法：首先提取公因式，然后考虑用公式法、十字相乘法试一试.

3.通过上面的例题，我们明显感觉到因式分解法求解一元二次方程所带来的便利，但是不是所有的一元二次方程都可以用因式分解法来求解呢？我们首先来思考这样一个问题：什么样的一元二次方程能够用因式分解法求解？根据笔者的解题经验，凡是根的判别式是完全平方数(式)的一元二次方程，都可以用因式分解法求解，同学们也可以在今后的解题过程中去检验、思考，说不定你会有新的发现.一课一练第1、2、3(1)、4、5、7是为落实十字相乘法分解因式而设计，第5题顺便再一次落实消元代入法求代数式的值.

学习心得