高中数学解题方法

周先华 著

电子科技大学出版社

高中数学解题方法

周先华 著

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中数学解题方法 / 周先华著. -- 成都 : 电子科技大学出版社, 2015.5

ISBN 978-7-5647-2936-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①中学数学课－高中－题解 Ⅳ. ①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第070192号

高中数学解题方法

周先华 著

出　　版： 电子科技大学出版社（成都市一环路东一段159号电子信息产业大厦 邮编：610051）
策划编辑： 谭炜麟
责任编辑： 谭炜麟
主　　页： www.uestcp.com.cn
电子邮箱： uestcp@uestcp.com.cn
发　　行： 新华书店经销
印　　刷： 成都新千年印制有限公司
成品尺寸： 145mm×210mm　印张 7　字数 160千字
版　　次： 2015年7月第一版
印　　次： 2015年7月第一次印刷
书　　号： ISBN 978-7-5647-2936-3
定　　价： 38.00元

◆ 本社发行部电话：028-83202463；本社邮购电话：028-83201495。
◆ 本书如有缺页、破损、装订错误，请寄回印刷厂调换。

目　录

CONTENTS

1 逻辑方法

综合法

【方法解读】

从已知条件出发，利用某些数学定义、公理、定理等，通过一系列的推理论证或计算得到所研究问题的结论的方法称为综合法，又称为顺推法或由因导果法．

【方法来源】

《普通高中课程标准实验教科书　数学选修 2–2》.P85.

【数学思想】

划归与整合的思想，体现由“生”（“陌生”，即所求结论）向“熟”（“熟悉”，即题设或明显成立的结论）的转化．

【解题步骤】

1. 分析题目条件，寻求条件和结论之间的关系，联想与两者相关的定义、公理、定理等，确定解题的入手点；

2. 综合所得信息进行逐步推理，直到得出结论．

【适用范围】

绝大多数数学习题．

【一般规律】

1. 综合法是从问题的条件出发，寻求其结论的方法，即“执因索果”，从“已知”得到某一结论，再逐步推向“未知”，直到得出结论．其逐步推理实际上是寻找它成立的必要条件；

2. 综合法是一种直接的演绎推理方法，其思路清晰，解答自然流畅，是一种常用的证题方法；

3. 在解决数学习题时，往往要先在文字语言、符号语言与图形语言之间相互转换；还要通过严谨的分析，把隐含条件明确地表示出来 .

【易错警示】

综合法的推理过程的条理性与逻辑性要求较高，一环与下一环要紧扣 . 所以对其关键的推理步骤要有详尽的表述，不可省略 .

【精选例题】

例1 若集合 $A=\{x\in R\,|\,ax^2+ax+1=0\}$中只有一个元素，则 a=(　　)

A．2　　B．4　　C．0　　D．0 或 4

【解析】选B.

●解法一：综合法

由集合 A 只有一个元素，分两类讨论：

当$a=0$时，方程 $ax^2+ax+1=0$无解，不成立 .

当$a\neq 0$时，二次方程有两等根，则 $\Delta=a^2-4a=0,a=4$.

综上，选 B.

●解法二：排除法

若$a=2$，二次方程$2x^2+2x+1=0$的判别式$\Delta=-4<0$，则集合 A 为空集，排除选项 A.

若$a=4$，二次方程$4x^2+4x+1=0$有两等根$x=-\dfrac{1}{2}$，则集合 A=$\{-\dfrac{1}{2}\}$，合题意，选 B.

例2 已知下列三个命题：

①若一个球的半径缩小到原来的$\dfrac{1}{2}$，则其体积缩小到原来的

$\frac{1}{8}$.

②若两组数据的平均数相等，则它们的标准差也相等 .

③直线$x+y+1=0$与圆$x^2+y^2=\frac{1}{2}$相切.

其中真命题的序号是（　　）

A．①②③　　B．①②　　C．①③　　D．②③

【解析】选C.

●解法一：综合法

由球的体积公式$V=\frac{4}{3}\pi R^3$知体积与半径是立方关系，①正确 .

平均数反映数据的平均水平，标准差反映数据的离散程度，②不正确 .

圆心到直线的距离为$d=\frac{|0+0+1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=r$，即直线与圆相切，③正确.

所以选 C.

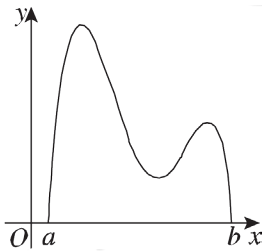
●解法二：排除法

对①：若原半径为r，则$V=\frac{4}{3}\pi R^3$；当半径为$\frac{1}{2}r$时，$V^1=\frac{4}{3}\pi(\frac{1}{2}r)^3=\frac{1}{8}V$，所以①正确 . 排除 D.

对②，令$a_1=a_2=2$, 其标准差$D_1=0$；$b_1=3$、$b_2=1$, 其标准差$D_2=\sqrt{(3-2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$. ②不正确，排除 A、B. 选 C.

【点评】根据已知条件逐一排除.

例3 函数$y=f(x)$的图像如图所示，在区间$[a,b]$上可找到$n(n\geq 2)$个不同的数$x_1,x_2,\ldots x_n$，使得$\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{f(x_2)}{x_2}=\ldots=\frac{f(x_n)}{x_n}$，则$n$的取值范围是（　）



A. {3，4} B. {2，3，4} C. {3，4，5} D. {2，3}

【解析】选B.

●综合法

由于$\dfrac{f(x_n)}{x_n}$的几何意义是：点$P(x_n, f(x_n))$与原点O连线的斜率，所以$\dfrac{f(x_1)}{x_1}=\dfrac{f(x_2)}{x_2}=\dots=\dfrac{f(x_n)}{x_n}$就等价于直线$y=kx$与函数$y=f(x)$图像的交点个数，从图中可以看出交点个数可以为2，3，4，故n的取值范围是{2，3，4}.

【点评】认识$\dfrac{f(x_n)}{x_n}$的几何意义后直接求解.

例4 若双曲线$C: x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的顶点到渐近线的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则离心率$e=$______.

【解析】由$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

●综合法

双曲线方程知$a=1$，$\therefore c=\sqrt{1+b^2}$，$\therefore$一条渐近线的方程为$y=bx$，即$bx-y=0$. 取一个顶点（1，0）.

$\therefore \dfrac{|b-1|}{\sqrt{1+b^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $b^2=\dfrac{1}{2}$，$\therefore c=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

例5 设 $a=\log_3 6$，$b=\log_5 10$，$c=\log_7 14$，则a,b,c的从小到大排序为_____.

【解析】$a>b>c$.

●解法一：综合法

$a=\log_3 6=\log_3(2\times3)=\log_3 2+1$，同理，

$b=\log_5 2+1, c=\log_7 2+1$， 而 $\log_3 2>\log_5 2>\log_7 2$， 所 以 $a>b>c$.

●解法二：比较法

$a-b=\log_3 6-\log_5 10=(1+\log_3 2)-(1+\log_5 2)=\log_3 2-\log_5 2>0$，

$b-c=\log_5 10-\log_7 14=(1+\log_5 2)-(1+\log_7 2)=\log_5 2-\log_7 2>0$，

所以 a>b>c.

【点评】三个数比较大小，一般应先分成正负数两类，再各自与某一特殊数（例如1或-1）比较得结果；本题三个数均为正的对数，且底数不同，一般应先转化为同底数或同真数后比较.

例6 $4\cos 50^0-\tan 40^0=$_______________.

【解析】$\sqrt{3}$.

$$4\cos 50^0-\tan 40^0=4\sin 40^0-\frac{\sin 40^0}{\cos 40^0}=\frac{4sin40^0\cos 40^0-\sin 40^0}{\cos 40^0}$$

$$=\frac{2sin80^0-\sin 40^0}{\cos 40^0}=\frac{2\cos 10^0-\sin 40^0}{\cos 40^0}=\frac{2\cos(40^0-30^0)-\sin 40^0}{\cos 40^0}$$

$$=\frac{2\cos 40^0\cos 30^0+2\sin 40^0\sin 30^0-\sin 40^0}{\cos 40^0}$$

$$=\frac{\sin 40^0+\sqrt{3}\cos 40^0-\sin 40^0}{\cos 40^0}=\sqrt{3}$$

例7 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1+a_3=8$，且a_4为a_2和a_9的等比中项，求数列 $\{a_n\}$ 的首项、公差及前n项和.

【解析】

● 综合法

设该数列公差为d，前n项和为S_n.

由已知可得 $\begin{cases} a_1+d=4 \\ (a_1+3d)^2=(a_1+8d) \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=4 \\ d=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1=1 \\ d=3 \end{cases}$. 即数列 $\{a_n\}$ 的首项为 4，公差为 0，或首项为 1，公差为 3.

所以，数列的前 n 项和 $S_n=4n$ 或 $S_n=\frac{3n^2-n}{2}$.

例8 在△ ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，且 $a^2+b^2+\sqrt{2}ab=c^2$.

（1）求 C;

（2）设 $\cos A\cos B=\frac{3\sqrt{2}}{5}$, $\frac{\cos(\alpha+A)\cos(\alpha+B)}{\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{5}$ 求 $\tan\alpha$ 的值.

【解析】

● 综合法

（1）因为$a^2+b^2+\sqrt{2}ab=c^2$.

由余弦定理有$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $C=\frac{3\pi}{4}$.

（2）由题意得

$$\frac{(\cos\alpha\cos A-\sin\alpha\sin A)(\cos\alpha\cos B-\sin\alpha\sin B)}{\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$\therefore (\tan\alpha\sin A-\cos A)(\tan\alpha\sin B-\cos B)=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$\therefore (\tan\alpha\sin A\text{-}\cos A)(\tan\alpha\sin B\text{-}\cos B)=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

$\therefore \tan^2\alpha\sin A\sin B-\tan\alpha(\sin A\cos B+\cos A\sin B)+\cos A\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

$\therefore \tan^2\alpha\sin A\sin B-\tan\alpha\sin(A+B)+\cos A\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

$\because C=\dfrac{3\pi}{4},\therefore A+B=\dfrac{\pi}{4},\sin(A+B)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\because \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

$\therefore \dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}-\sin A\sin B,\therefore \sin A\sin B=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

$\therefore \dfrac{\sqrt{2}}{10}\tan^2\alpha-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\tan\alpha+\dfrac{3\sqrt{2}}{5}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

$\therefore \tan^2\alpha-5\tan\alpha+4=0$，得$\tan\alpha=1$或$\tan\alpha=4$.

【点评】考虑已知条件$a^2+b^2+\sqrt{2}ab=c^2$与余弦定理“相似”性，利用余弦定理即求出角C；第（2）问通过对已知式的恒等变形后发现需要求出$\sin(A+B),\sin A\sin B$两式的值，而它们均容易由（1）问结果及$\cos(A+B)$求得.

例9 已知两点M（-2，0），N（2，0），点P为坐标平面内的动点，满足$|\overrightarrow{MP}|\cdot|\overrightarrow{MN}|+\cdot\overrightarrow{NP}=0$，求动点$P$（$x$，$y$）的轨迹方程.

【解析】

●综合法

设点P的坐标为（x，y），则$\overrightarrow{MN}=(4,0)$，$\overrightarrow{MP}=(x+2,y)$，$\overrightarrow{NP}=(x-2,y)$.

$\therefore |\overrightarrow{MN}|=4$，$|\overrightarrow{MP}|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$ $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{NP}=4(x-2)$.

根据已知条件得$4\sqrt{(x+2)^2+y^2}+4(x-2)=0$，整理得$y^2=-8x$. $\therefore$点P的轨迹方程为$y^2=-8x$.

【点评】直接把向量的坐标代入已知条件中即得轨迹方程.

例10 已知p：对任意实数x都有$ax^2+ax+1>0$成立；q关于x的方程$x^2-x+a=0$有实数根．如果“$p\wedge q$”为假命题，“$p\vee q$”为真命题，求实数的取值范围．

【解析】

●解法一：综合法

p: 对任意实数x都有$ax^2+ax+1>0$成立为真，则“$a=0$”，或“$a>0$ 且 $a^2-4a<0$”．即命题p等价于“$0\leqslant a<4$”；

q: 关于的方程$x^2-x+a=0$有实数根为真，则$\Delta=1-4a\geqslant 0$，得$a\leqslant\frac{1}{4}$，即命题等价于“$a\leqslant\frac{1}{4}$；

因为$p\wedge q$为假命题，$p\vee q$为真命题，所以p，q有且仅有一个为真命题且另一个为假命题，即“p真q假”或“p假q真”，

则$\begin{cases}a<0\text{或}a\geqslant 4,\\ a\leqslant\frac{1}{4},\end{cases}$或$\begin{cases}0\leqslant a<4,\\ a>\frac{1}{4},\end{cases}$解得$a<0$或$\frac{1}{4}<a<0$．

综上，a的范围是$(-\infty,0)\cup(\frac{1}{4},4)$．

●解法二：综合法

因为$p\wedge q$为假命题，$p\vee q$为真命题，所以p，q有且仅有一个为真命题且另一个为假命题，下面分两种情况分别计算：

（1）“p真q假”，即“对任意实数x都有$ax^2+ax+1>0$成立”且“关于x的方程$x^2-x+a=0$无实数根”．

所以$\begin{cases}0\leqslant a<4,\\ a>\frac{1}{4},\end{cases}$解得$\frac{1}{4}<a<0$；

（2）“p假q真”，即$\begin{cases}a<0\text{或}a\geqslant 4,\\ a\leqslant\frac{1}{4},\end{cases}$解得$a<0$．

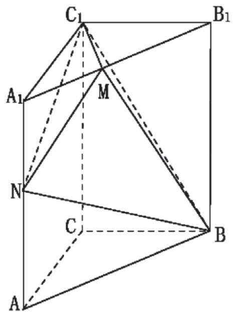
综上，a的范围是$(-\infty,0)\cup(\frac{1}{4},4)$．

【点评】解法一的思路更顺畅，运算更简洁，理解更容易.

例11 如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧棱$AA_1\perp$底面ABC，且$AA_1=2,AC=BC=1,\angle BCA=90^0$，分别是$A_1B_1$，$A_1A$的中点.

（Ⅰ）求证：平面$C_1MB\perp$平面ABB_1A_1；

（Ⅱ）求三棱锥$N-C_1MB$的体积.



【解析】

● 综合法

（1）$\because AA_1\perp$底面ABC，$\therefore AA_1\perp C_1M$

又$\because M$平分A_1B_1，且$A_1C_1=B_1C_1$，$\therefore C_1M\perp A_1B_1$

且$AA_1\cap A_1B_1=A_1$，$\therefore C_1M\perp ABB_1A_1$，

而$C_1M\subset$平面C_1MB

$\therefore$平面$C_1MB\perp$平面ABB_1A_1

（2）$V_{N-C_1MB}=V_{C_1-MBN}=\dfrac{1}{3}C_1M\cdot S_{\Delta BMN}$，

而$S_{\Delta BMN}=S_{\Delta ABB_1A_1}-S_{\Delta ABN}-S_{\Delta A_1MN}-S_{\Delta BMB_1}$

$$=2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times1-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times2=\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

所以$V_{N-C_1MB}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{4}=\dfrac{1}{4}$

【点评】

（1）要证面面垂直，需证一个面内一条直线垂直于另一个面；

（2）求三棱锥体积时，常常更换其底面，以利于求锥棱的高及底面面积．这种方法可称为等职法．

例12 已知$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{2},\tan\beta=-\dfrac{1}{7}$，且$\alpha,\beta\in(0,\pi)$求$\tan\alpha$及$2\alpha-\beta$的值．

【解析】

$$\tan\alpha=\tan[(\alpha-\beta)+\beta]=\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+(-\frac{1}{7})}{1-\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{7})}=\frac{1}{3}.$$

● 角的变换法

（1）

$$\tan(2\alpha-\beta)=\tan[(\alpha-\beta)+\alpha]=\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\alpha}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\alpha}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$$

$\because\ \alpha$、$\beta\in(0,\ \pi)$，$\tan\alpha\in(0,\ 1)$，$\tan\beta<0$，

$\therefore\ \alpha\in(0,\ \dfrac{\pi}{4})$，$\beta\in(\dfrac{\pi}{2},\ \pi)$．$\therefore -\pi<-\beta<\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore 2\alpha-\beta\in(-\pi,\ 0)$，$\therefore 2\alpha-\beta=-\dfrac{3}{4}\pi$．

（2）由（1）

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4},$$

$$\therefore\tan(2\alpha-\beta)=\frac{\tan 2\alpha-\tan\beta}{1+\tan 2\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{3}{4}-(-\frac{1}{7})}{1+\frac{3}{4}\times(-\frac{1}{7})}=1$$

以下与解法一相同．

【点评】观察已知角与所求角的关系（和、差、倍、半）即可成功对角进行转化.注意第（2）中$2\alpha-\beta$即可转化为$(\alpha-\beta)+\alpha$，也可直接利用公式两角$2\alpha,\beta$的差来计算.

分析法

【方法解读】

分析法是指从要研究问题的结论出发，向题设或明显成立的结论方向进行推理，寻求使它成立的充分条件，直到得出一个显然成立的条件（可以是已知条件、定义、公理、定理等）为止，从而断定原命题成立的一种论证方法．也称为因果分析、逆推证法或由果导因法．

分析法是沿着“执果索因”的思索路线，它能帮助我们较快地找到解决途径．所以分析法是思考一切数学问题的方法，是综合法的逆向．但是由于其书写繁琐，一般在解题时先用分析法思考，再用综合法书写，即把分析法的步骤倒着写即为解题的步骤．

【方法来源】

《普通高中课程标准实验教科书》（以下简称《教科书》）数学选修 2–2，P87.

【数学思想】

划归与整合的思想，体现从陌生（结论）向熟悉（题设或明显成立的结论）的转化．

【解题步骤】

1. 要题目结论成立，需要结论 1 成立．

2. 要结论 1 成立，需要结论 2 成立．

3. 要结论 2 成立，需要结论 3 成立 .

……

n. 要结论 n–1 成立，需要结论 n 成立 .

n+1. 结论 n 显然成立（如果结论显然不成立，即推出了矛盾，则题目结论不成立 . 这也为选择题提供了筛选法）.

所以结论成立 .

【适用范围】

1. 寻求所有数学问题的解决思路；

2. 证明不易直接证明的结论；

3. 已知条件不明确或已知条件简洁而结论较为复杂的问题 .

4. 条件探究性问题：一般用分析法进行逆推 .

【一般规律】

能用分析法解决的问题，也一定可以使用综合法完成 . 所以一般用分析法思考，再把分析法的过程逆向书写（即综合法）.

【易错警示】

分析法的书写有非常规范的要求，要写成“要证明…，只需证明…”等形式 . 切忌省略这些字样 . 如果省略了“只需证明”之类的话，这个证明过程就是错误的 .

【精选例题】

例1 用分析法证不等式：欲证命题 p:“$A > B$”，只需证命题 q:“$C < D$”，这里命题 p 是命题 q 的（　　）

A. 既不充分也不必要条件　　B. 充要条件

C. 充分条件　　D. 必要条件

【解析】选D.显然，命题能推出命题，所以是的必要条件.

【点评】本题容易出现理解错误而选C.要证“$A>B$”，需证“$C<D$”，即若“q:$C<D$”成立，则“p:$A>B$”成立，所以命题 q 能推导出命题 p，所以命题 p 是命题 q的必要条件.

例2 某几何体三视图如图所示，则其体积是（　　）.