Xianxing Daishu Xuexi Zhidaoshu

线性代数学习指导书

主编　四川大学数学学院
陈　丽　胡朝浪　谭英谊

四川大学出版社

Xianxing
Daishu Xuexi Zhidaoshu

线性代数学习指导书

主编　四川大学数学学院
陈　丽　胡朝浪　谭英谊

四川大学出版社

前　言

本书是与四川大学数学学院编的《线性代数》(四川大学出版社出版)相配套的学习辅导书，主要面向使用该教材的学生，也可供有关教师作为参考用书.

中国高等教育规模扩大化后，精英教育向大众化教育转变. 整个社会对于教育质量十分关注. 我们编写这本辅导书的目的是适应社会发展，满足学生学习线性代数课程的需要，期望能够对达到线性代数教学基本要求，提升线性代数教学质量有一定的辅助作用.

本书按照《线性代数》的章节顺序编写，以便于教学同步，同时有相对的独立性，方便读者选择. 每一章包括下列内容:

(1) 重点、难点及学习要求. 根据课程教学大纲和内容，在概念、理论、方法、能力等方面对学生提出学习要求.

(2) 知识结构网络图. 每章以图表形式建立知识结构网络图，指出各个知识点的有机联系，帮助学生从总体上把握这一章的内容及结构.

(3) 基本内容与重要结论. 以简要文字阐述章节的基本内容和重要结论.

(4) 疑难解答与典型例题. 精选一些代表性的、涉及本章节知识的若干例题，力求在解法上有一定典型性，在内容上对教材有所巩固、补充和提高，特别注意解题思路和方法. 这些例题有涉及多个知识点的综合题，也有涉及硕士研究生入学考试的题目.

(5) 练习题精选. 为满足读者练习的需要，补充了少量习题，希望通过练习解题来消化和巩固章节知识.

本书由四川大学数学学院的陈丽、胡朝浪、谭英谊主编. 陈丽编写第一、二、三章，谭英谊编写第四章，胡朝浪编写第五、六章. 鉴于数学概念的理解以及数学知识的积累是一个循序渐进的过程，敬请读者对书中的不足与瑕疵，提出批评与指正.

编　者

2019 年 5 月

目　录

第一章　线性方程组

一、重点、难点及学习要求

（一）重点

线性方程组的解的存在性与唯一性的判定. 矩阵的阶梯形，行最简形. 用初等行变换化线性方程组的增广矩阵为阶梯形或最简形，判断、求解. 在有无穷多解时，将通解表示出来.

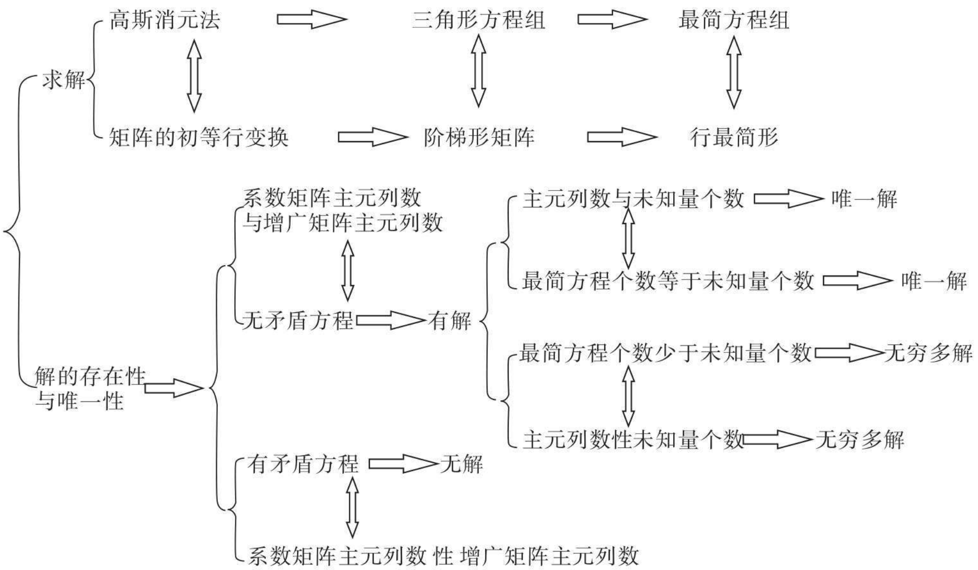
（二）难点

用初等行变换，化矩阵为阶梯形或最简形. 对于初等行变换，化含参数的线性方程组的增广矩阵为阶梯形或最简形，判断、求解.

（三）学习要求

1. 理解齐次与非齐次线性方程组的解、增广矩阵、系数矩阵，矩阵的阶梯形、行最简形，矩阵的主元及主元列.
2. 熟练运用初等行变换化矩阵为阶梯形、行最简形.
3. 熟练运用初等行变换法求解线性方程组，其中要掌握通过阶梯形或行最简形矩阵判断方程组有无解，在有解时，是唯一解还是无穷多解，并会求出全部解.
4. 掌握用矩阵的主元列数与未知量个数之间的关系来判定方程组的解的存在性与唯一性.

二、知识结构网络图



三、基本内容与重要结论

1. 以 x_1，x_2，…，x_n 为未知量的线性方程与线性方程组的概念：

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b,\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

若 b，b_1，b_2，…，b_m 全为零，则为齐次线性方程（组）；若 b，b_1，b_2，…，b_m 不全为零，则为非齐次线性方程（组）.

一组满足方程（组）的 n 元有序数组（x_1，x_2，…，x_n）称为线性方程（组）的解. 若 n 元有序数组（0，0，…，0）是解，称为零解. 若方程（组）的解中含有非零数，则该解就是非零解.

2. 一个线性方程组的解有三种情况：

（1）无解.

（2）有唯一解.

（3）有无穷多解.

3. 线性方程组的两个基本问题：

（1）方程组是否有解，即解的存在性问题.

（2）如果解存在，是否仅有一个，即解的唯一性问题.

4. 包含相同变量的两个线性方程组如果有相同的解，则它们为等价的方程组. 对一个线性方程组通过下列三种初等变换可以得到等价的方程组：

（1）交换方程组中两个方程的顺序.

（2）在一个方程的两端都乘以一个非零的常数.

（3）一个方程的常数倍加到另一个方程上.

5. 一个线性方程主要由其系数决定. 一个线性方程组与一个增广矩阵一一对应.

6. 矩阵的三种初等行变换：

（1）对换变换——交换矩阵的两行.

（2）数乘变换——将某行全体元素都乘以某一非零常数.

（3）倍加变换——某行加上另一行的常数倍.

7. 两个矩阵若能通过一系列初等行变换进行转化，则这两个矩阵是行等价的. 两个线性方程组的增广矩阵行等价，则这两个方程组等价.

8. 阶梯形矩阵与矩阵的行最简形：若矩阵①所有非零行均在任一零行之上；②每一行非零首元所在列都在上一行非零首元所在列的右边；③同一列中位于非零首元下方的元素都为零，则该矩阵为阶梯形矩阵. 若阶梯形矩阵中，非零首元为 1，每个非零首元所在列只有一个非零元素，则称之为矩阵的行最简形. 一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶梯形矩阵中非零首元就称为 $\boldsymbol{A}$ 的主元，其所在行列位置就是主元位置. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中包含主元的列称为 $\boldsymbol{A}$ 的主元列.

9. 矩阵的行化简算法：

（1）从矩阵最左边的非零列开始，主元位置在该列的第一行. 如果该位置的元是零，就用初等行变换中的对换变换或倍加变换把该位置的元化为非零，得到一个主元.

（2）应用倍加变换将主元下方的元化为零.

（3）盖住或忽略含有主元位置的行和它上方的行，对余下部分继续应用第一步到第二步就可得到阶梯形矩阵.

（4）若要得到行最简形矩阵，在进行第二步时，用初等行变换中的倍加变换将主元列中除主元外的其余元化成零，并用数乘变换将主元化为 1.

10. 一个线性方程组有解当且仅当它没有矛盾方程，等价叙述为一个方程组有解当且仅当系数矩阵与增广矩阵有相同的主元列. 在有解时，若主元列数等于未知量个数，方程组有唯一解；若主元列数小于未知量个数，则方程组有无穷多解. 齐次线性方程组一定有解. 非齐次线性方程组可能无解.

11. 使用初等行变换求解线性方程组的步骤：

（1）写出方程组的增广矩阵 $\boldsymbol{A}$.

（2）使用初等行变换化 $\boldsymbol{A}$ 为阶梯形矩阵，判断方程组有无解. 无解，停止；有解，进

行下一步.

(3) 继续用初等行变换化阶梯形矩阵为行最简形.

(4) 写出行最简形对应的线性方程组.

(5) 改写第四步得到的每个非零方程，将其中的基本变量显式表示出来，得到线性方程组的解.

四、疑难解答与典型例题

1. 研究线性方程组的作用是什么？

线性方程组是线性代数的核心. 在科学研究与工程应用中，超过四分之三的数学问题会涉及求解线性方程组. 利用新的数学方法，通常可以将较为复杂的问题化为线性方程组. 商业、经济学、社会学、生态学、人口统计学、遗传学、电子学、工程学以及物理学等领域都会应用线性方程组. 可以说，求解线性方程组是重要的数学问题.

2. 怎样理解“线性”一词？

线性表达式、线性方程（组）、线性组合、线性相关、线性变换等概念中的“线性”都是同样的意思. 我们在中学学的一次函数 $y=kx+b$ 的图形就是平面内一条直线. 它的表达式只涉及数乘和加法运算. 所以一个数学表达式中，只有加法和数乘运算，这样的表达式就称为线性表达式. 表达式在具体的环境下，有相应的名称. 比如含有 n 个未知量的等式 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 就称为 n 元线性方程. $\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \qquad\qquad\vdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases}$ 就称为线性变换.

3. 一般线性方程组的求解方法是什么？

一个线性方程组的求解实际上要得到一个变量等于某个具体的数或表达式. 比如三元线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2+x_3=6 \end{cases}$ 有唯一解 $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=3 \end{cases}$，每个未知量等于一个具体的数. 要得到 $x_3=3$ 也就是要通过初等变换把一个方程中的其余未知量 x_1，x_2 的系数化成零，然后把 x_3 的系数化为 1. 其他情形同理. 这样的方法就是高斯约当消元法.

4. 怎样理解线性方程组与矩阵的关系？

一个 n 元线性方程由其系数与常数项决定. n 个未知量进行了排序区分，那 n 个系数及常数项对应地有序，从而产生一个 $n+1$ 元有序数组. 这个 $n+1$ 元有序数组与该方程一一对应. 同理，m 个 n 元线性方程组成的方程组就与 m 个 $n+1$ 元有序数组组成的增广矩

阵一一对应. 在高斯约当消元法求解过程中，未知量并未参与运算，实际上是方程的系数及常数项参与运算. 所以为了简便，我们用增广矩阵表示线性方程组. 但是矩阵不仅仅局限在线性方程组上，还有更广泛的应用.

5. 线性方程组的初等变换的作用是什么？

一个线性方程组包含一个或多个方程. 这些方程之间可能互相有关联. 比如第一个方程的 3 倍减去第二个方程的 2 倍就是第三个方程，那么这第三个方程就是多余的. 线性方程组的初等变换就是将多余的方程去掉，使原方程组只包含最简的方程，观察最简方程组就容易发现其中的本质和规律. 初等变换是同解变形，所以得到最简的方程组，也就得到了解.

6. 矩阵的初等行变换的作用是什么？

借助于线性方程组的初等变换的作用，很容易理解矩阵的初等行变换实际上是把矩阵的行与行之间的关系精简化，当矩阵通过初等行变换化成了行最简形后，观察行最简形矩阵，就立即可以得到原矩阵的本质特征. 这也是初等行变换贯穿整个线性代数学习过程中的原因.

对矩阵施行初等行变换化为阶梯形或行最简形的方法也称为行化简算法.

7. 线性方程组的无解的情况如何判定？

线性方程组无解的根本原因在于其中包含了一个矛盾方程. 通过初等变换将线性方程组化为最简方程组后，若出现了零等于非零数的情况，那就是这个方程组包含了一个矛盾方程. 只要不出现零等于非零数的情况，这个方程组就一定有解.

8. 线性方程组有唯一解与无穷多解的情况如何判定？

在线性方程组有解的情况下，观察最简的方程组. 如果最简方程组的方程个数等于未知量个数，实际上就得到每个未知量等于一个数，也就是方程组有唯一解. 如果最简方程组的方程个数少于未知量个数，一个方程只能解出一个未知量，即将一个未知量写在等号的一端，这样就有几个未知量解不出来，也就是它们不受表达式约束，成为自由未知量. 自由未知量可以在定义域内任意取值，从而导致有无穷多解产生. 例如，四元最简方程组 $\begin{cases} x_1-x_3-x_4=1 \\ x_2-x_3+x_4=2 \end{cases}$ 化为 $\begin{cases} x_1=1+x_3+x_4 \\ x_2=2+x_3-x_4 \end{cases}$，其中 x_1，x_2 是基本变量，x_3，x_4 就是自由未知量，可以任意取值. 所以原方程组的通解为（$1+x_3+x_4$，$2+x_3-x_4$，x_3，x_4），有无穷多解. 这样的解也称为线性方程组解集的参数表示，如设 $x_3=a$，$x_4=b$，则全部解为（$1+a+b$，$2+a-b$，a，b）.

9. 在运用矩阵的初等行变换时要注意哪些方面？

矩阵的初等行变换可以看成是线性方程组的初等变换演变抽象出来的. 线性方程组的初等变换只能是方程与方程之间的变换，所以矩阵的初等行变换也只能是整行与整行之间的变换. 比如数乘变换，第二行乘以 3，那么矩阵的第二行的每个元素都要分别乘以 3. 又

如倍加变换，第一行的 3 倍加到第二行上去，具体运算是第一行的每个元都乘以 3，然后与第二行的位于相同列的元对应相加. 第二行的每个元加上了第一行的对应元的 3 倍，有变化，但是第一行本身没有变化.

10. 线性方程组部分在实际应用中的难点是什么？

在实际应用中要运用线性方程组，首先要将实际问题转化成数学问题，建立线性方程（组）. 这是最关键，也是最难的一部分. 一旦建立了线性方程组，就有完善的理论可以求线性方程组的解.

例 1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&2&2&7\\2&2&1&1&2\\5&5&1&2&0\end{bmatrix}$，请分别判断以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组和以 $\boldsymbol{A}$ 为增广矩阵的非齐次线性方程的解的情况，在有解时，求出全部解.

解　用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形：

$$\begin{bmatrix}1&1&2&2&7\\2&2&1&1&2\\5&5&1&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1\cdot(-5)]{r_2+r_1\cdot(-2)}\begin{bmatrix}1&1&2&2&7\\0&0&-3&-3&-12\\0&0&-9&-8&-35\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}\begin{bmatrix}1&1&2&2&7\\0&0&1&1&4\\0&0&-9&-8&-35\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2\cdot 9}\begin{bmatrix}1&1&2&2&7\\0&0&1&1&4\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3\cdot(-1)]{r_1+r_3\cdot(-2)}\begin{bmatrix}1&1&2&0&5\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2\cdot(-2)}\begin{bmatrix}1&1&0&0&-1\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{U}.$$

（1）写出与 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 同解的齐次线性方程组 $\boldsymbol{UX}=\boldsymbol{0}$：$\begin{cases}x_1+x_2-x_5=0\\x_3+3x_5=0\\x_4+x_5=0\end{cases}$，齐次线性方程组一定有解，因为系数矩阵的行最简形只有三个主元列（对应三个方程），能解出三个未知量（即基本变量）x_1，x_3，x_4，剩余的两个变量 x_2，x_5 为自由未知量. $\begin{cases}x_1=-x_2+x_5\\x_3=-3x_5\\x_4=-x_5\end{cases}$，这个以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组有无穷多解，其全部解为 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-a+b,a,-3b,-b,b)$，其中 a，b 可以取一切实数.

（2）写出以 $\boldsymbol{A}$ 为增广矩阵的非齐次线性方程组的同解方程组，注意到矩阵的最后一列是常数项列. $\begin{cases}x_1+x_2=-1\\x_3=3\\x_4=1\end{cases}$，这个方程组没有矛盾方程，系数矩阵的主元列数与增广矩

阵的主元列数相等，所以方程组有解，又因为该方程组一共有四个未知量，但只有三个基本变量 x_1，x_3，x_4，所以有自由未知量 x_2. 这个以 $\boldsymbol{A}$ 为增广矩阵的非齐次线性方程组有无穷多解，其全部解为 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=(-1-a,\ a,\ 3,\ 1)$，其中 a 可以取一切实数.

例 2　设非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=1 \\ 2x_1-x_2+3x_3-x_4=4 \\ x_2+ax_3+bx_4=b \\ x_1-3x_2+(3-a)x_3=-4 \end{cases}$，当 a，b 取何值时，方程组有解、无解，有解时求出全部解.

解　将方程组的增广矩阵用初等行变换化为阶梯形矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & a & b & b \\ 1 & -3 & 3-a & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1\cdot(-1)]{r_2+r_1\cdot(-2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & a & b & b \\ 0 & -2 & 1-a & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2\cdot 2]{r_3+r_2\cdot(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1+a & 1+b & b-2 \\ 0 & 0 & -1-a & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4+r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1+a & 1+b & b-2 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & b-3 \end{bmatrix}.$$

根据最后一个带参数的阶梯形矩阵可以得到下列结论：

(1) 当 $a\neq-1$，$b\neq1$ 时，方程组有唯一解.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1+a & 1+b & b-2 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & b-3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{b-5}{(1+a)(b-1)}+\dfrac{4b-6}{b-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{5-b}{(1+a)(b-1)}+\dfrac{3b-5}{b-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{5-b}{(1+a)(b-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{b-3}{b-1} \end{bmatrix}.$$

(2) 当 $a=-1$ 时，$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1+b & b-2 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & b-3 \end{bmatrix}$ 分两种情况讨论.

第一种情况：化简后的上面矩阵的第三、第四行成比例，即 $\dfrac{b+1}{b-1}=\dfrac{b-2}{b-3}$，可得 $b=5$，

原增广矩阵最终可以化为行最简形$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 写出对应的原方程组的同解方程组$\begin{cases} x_1+x_3=\frac{7}{2} \\ x_2-x_3=\frac{5}{2} \\ x_4=\frac{1}{2} \end{cases}$，主元列数为 3 ，无矛盾方程，所以有三个基本变量 x_1，x_2，x_4，一个自由未知量 x_3，原方程组有无穷多解. $(x_1, x_2, x_3, x_4)=(\frac{7}{2}-k, \frac{5}{2}+k, k, \frac{1}{2})$，$k$ 为任意实数.

第二种情况：化简后的上面矩阵的第三、第四行不成比例，即 $a=-1$，$b\neq 5$. 此时原方程组一定有一个矛盾方程，所以原方程组无解.

五、练习题精选

1. 求解下列增广矩阵对应的方程组.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$.

2. 选择 a，b 的值，使得方程组分别：①无解；②有唯一解；③有无穷多解. 在有解时，求出全部解.

(1) $\begin{cases} x_1+ax_2=2, \\ 3x_1+6x_2=b; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+3x_2=2, \\ 2x_1+ax_2=b. \end{cases}$

3. 给定方程组$\begin{cases}x_1+k_1x_2=b_1\\x_1+k_2x_2=b_2\end{cases}$，其中 k_1，k_2 和 b_1，b_2 为常数.

(1) 试证：若 $k_1\neq k_2$，则方程组有唯一解；

(2) 若 $k_1=k_2$，试证当且仅当 $b_1=b_2$ 时方程组有解；

(3) 试给出 (1)(2) 问的几何解释.

4. 若线性方程组$\begin{cases}x_1+3x_2=a\\cx_1+dx_2=b\end{cases}$对任意的 a，b 都有解，求 c，d 满足的关系.

5. 若线性方程组$\begin{cases}ax_1+bx_2=m\\cx_1+dx_2=n\end{cases}$对任意的 m，n 都有解，求 a，b，c，d 满足的关系.

6. 判断下列命题的真假，并说明理由.

(1) 求一个线性方程组解集的参数表示，等同于求解方程组；

(2) 只要线性方程组有自由未知量，方程组就有无穷多解；

(3) 给定一个矩阵，可以通过不同的初等行变换顺序，化为不同的阶梯形矩阵；

(4) 给定一个矩阵，可以通过不同的初等行变换顺序，化为不同的行最简形；

(5) 线性方程组中的一个基本变量对应于系数矩阵中的一个主元列；

(6) 如果增广矩阵中有一行为 $[0\quad 0\quad 0\quad 2\quad 0]$，则该方程组无解.

7. 一个 n 元线性方程组只有唯一解，则系数矩阵与增广矩阵的主元列数分别为多少？

8. 方程个数少于未知量个数的线性方程组（亚定组）是否一定有无穷多解？

9. 方程个数比未知量个数多的线性方程组（超定组）是否一定有解？

10. 确定 a，b，c 的值，使得增广矩阵$\begin{bmatrix}1 & -4 & 7 & a\\0 & 3 & -5 & b\\-2 & 5 & -9 & c\end{bmatrix}$对应的线性方程组有解.

11. 将军点兵，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问兵几何？(求在 100 至 500 范围内的解).

12. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & a\\1 & a & 1\\a & 1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 4\\1 & -2\\-2 & -8\end{bmatrix}$，方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解不唯一，求 a.

13. λ 为何值时，$\begin{cases}x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=1\\(2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=1\\(3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=\lambda\end{cases}$ 无解？有唯一解？无穷多解？在有无穷多解时求出所有解.

14. 判断$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=1\\2x_1+3x_2+(a+2)x_3=3\\x_1+ax_2-2x_3=0\end{cases}$的解的情况，有解时求出解.

参考答案：

1.（1）$\begin{cases} x_1=-9+11k \\ x_2=6-6k \\ x_3=k \end{cases}$，$k$ 为任意常数；

（2）$\begin{cases} x_1=-\dfrac{14}{5} \\ x_2=\dfrac{41}{5} \\ x_3=-\dfrac{2}{5} \end{cases}$；

（3）$\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{cases}$.

2.（1）当 $a\neq 2$ 时，有唯一解$\begin{cases} x_1=\dfrac{ab-12}{3a-6} \\ x_2=\dfrac{6-b}{3a-6} \end{cases}$；

当 $a=2$，$b\neq 6$ 时，无解；

当 $a=2$，$b=6$ 时，有无穷多解$\begin{cases} x_1=2-2k \\ x_2=k \end{cases}$，$k$ 为任意常数.

（2）当 $a\neq 6$ 时，有唯一解$\begin{cases} x_1=\dfrac{2a-3b}{a-6} \\ x_2=\dfrac{b-4}{a-6} \end{cases}$；

当 $a=6$，$b\neq 4$ 时，无解；

当 $a=6$，$b=4$ 时，有无穷多解$\begin{cases} x_1=2-3k \\ x_2=k \end{cases}$，$k$ 为任意常数.

3.（1）当 $k_1\neq k_2$时，方程组有唯一解；

（2）当 $k_1=k_2$，$b_1=b_2$时，方程组有无穷多解；

（3）第（1）问表示两直线有唯一交点，第（2）问表示两直线重合有无穷多交点.

4. $d\neq 3c$.

5. $ad-bc\neq 0$.

6.（1）正确；（2）正确；（3）正确；（4）错误；（5）正确；（6）错误.

7. 系数矩阵与增广矩阵的主元列数均为 n.

8. 不一定，如$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=2 \end{cases}$无解.

9. 不一定，如$\begin{cases}x_1=1\\x_1+x_2=1\\x_1+x_2=2\end{cases}$无解.

10. $2a+b+c=0$.

11. 128；233；338；443.

12. $a=-2$.

13. 当 $\lambda=3$ 时无解；当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq3$ 时有唯一解；当 $\lambda=1$ 时，有无穷多解

$\begin{cases}x_1=1-k_1-k_2\\x_2=k_1\\x_3=k_2\end{cases}$，$k_1$，$k_2$为任意常数.

14. 当 $a=3$ 时，有无穷多解$\begin{cases}x_1=3-7k\\x_2=-1+3k\\x_3=k\end{cases}$，$k$ 为任意常数；

当 $a=-1$ 时，方程组无解；

当 $a\neq3$ 且 $a\neq-1$ 时，方程组有唯一解.

第二章　矩阵代数

一、重点、难点及学习要求

（一）重点

矩阵的运算包括加法、数乘、乘法、逆、转置、分块，其中重点是乘法、逆及分块.

（二）难点

矩阵的乘法运算及求方阵的幂、方阵可逆的判定及逆阵的求法、分块矩阵的运算.

（三）学习要求

1. 理解矩阵的概念.

2. 了解单位矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵的概念以及它们的性质.

3. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置，以及它们的运算规律，了解方阵的幂、方阵多项式.

4. 理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质，以及矩阵可逆的充分必要条件. 理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求矩阵的逆矩阵.

5. 掌握矩阵的初等变换，了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念. 掌握用初等行变换求逆矩阵的方法.

6. 了解分块矩阵及其运算.