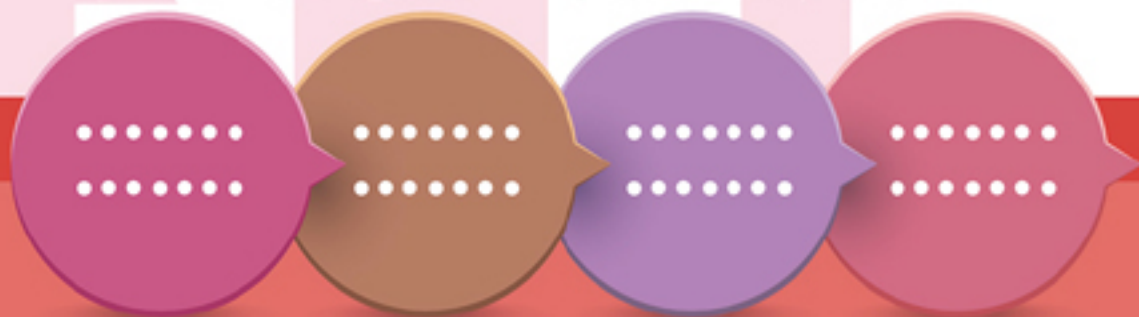


中考数学 复习微专题讲座



主编◎易良斌（特级教师）

副主编◎陈建扬 裘桢东

“四解”训练法 引领学生智慧地分析数学问题

解答：给出合乎逻辑的解题过程

解析：分析问题的关键要素，探寻可能的解决方案

解法：提炼出解决类似问题的通性通法

解释：用所学知识、技能、思想、经验说明解答的合理性



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

中考数学复习微专题讲座

主 编: 易良斌

副主编: 陈建扬 裘桢东

编 委: 俞卫胜 陈振锋 王丹群 余建明

胡小微 陈建扬 朱 福 裘桢东

吴洁慧 易良斌 王 佳 相建华

陈江嵩 杨国华 熊安辉 杨晓霞

胡柳青 吴 军 姜 萍 何继斌

吴临芳 陈春燕 池方利 杨卫红



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中考数学复习微专题讲座/易良斌主编. —杭州:
浙江大学出版社, 2017. 3
ISBN 978-7-308-16701-7

I. ①中… II. ①易… III. ①中学数学课—初中—升学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 039019 号

中考数学复习微专题讲座

主编 易良斌

策 划 陈海权(电子信箱:chess332@163.com)
责任编辑 王同裕
责任校对 董 文
封面设计 杭州林智广告有限公司
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址: <http://www.zjupress.com>)
排 版 杭州星云光电图文制作有限公司
印 刷 杭州钱江彩色印务有限公司
开 本 889mm×1194mm 1/16
印 张 21
字 数 758 千
版 印 次 2017 年 3 月第 1 版 2017 年 3 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-16701-7
定 价 49.80 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行中心联系方式:0571-88925591; <http://zjdxcbbs.tmall.com>

微中见大 微中见强

为帮助师生更好地在中考基础知识复习之后,及时查找短板、把握重点、突破难点,我们对近三年的全国中考数学试题进行考点归类分析,归纳整理成九大高频知识板块,提炼出 60 个微专题,按知识理解与建构、方法剖析与提炼、能力训练与拓展的学习流程,编写成《中考数学复习微专题讲座》这本书。其主要目的是帮助学生更好地弥补盲点、强化重点、突破难点、纠正易错点。

本书主要特色在于:

一是紧扣课标,精选例题。

我们有意识地收集一些内涵丰富的试题,或者改编一些试题来使用。选择例题时要求数量少但思维容量大、知识综合性强但主题鲜明、教学耗时少但学生收获多,必须紧紧围绕教学要求,不出现偏题、怪题,更不能影响到整个教学进度。全部例题的讲解采用易良斌老师独创的“四解”训练法(解答、解析、解法、解释),期望通过适当的训练,引领学生智慧地分析数学问题,掌握数学解题的基本套路。

二是关注学情,难度适中。

我们挑选基础、综合、拓展的题目,难度都控制在大部分学生的“最近发展区”内。从宏观上来说,讲解的例题难度可以稍高于学生的认知水平,但配套的练习要稍低于学生的平均水平,这样,学生听课和训练都可以达到最佳效果。为帮助同学们自主学习,我们对每一组能力训练与拓展题都给出了参考答案,而且在每一章学习结束后,我们给出中考高频考点强化训练题一套,对全部试题都给出了详细的解析,期待同学们从中体会解题经验。

特别提醒:老师和同学们在使用过程中,可登陆“易良斌名师工作室-中国教育云-浙江教育资源网-yun.zjer.cn-名师课堂”,我们免费为大家提供了各个专题的教学 PPT 和学习微视频。

最后,祝愿同学们在中考中取得理想成绩!

易良斌

(数学特级教师,易良斌中学数学名师工作室主持人)

目 录

第一章 数与式	(1)
第 1 讲 实数的运算	(1)
第 2 讲 代数式的化简与求值	(5)
第 3 讲 因式分解的应用	(10)
第 4 讲 条件分式的化简与求值	(13)
第 5 讲 二次根式的化简与求值	(16)
中考高频考点强化训练(1)	(19)
第二章 方程与不等式	(23)
第 6 讲 一元一次方程的解的情况与整数解	(23)
第 7 讲 二元一次方程的整数解	(27)
第 8 讲 二元一次方程组易错题	(31)
第 9 讲 一元二次方程的解	(35)
第 10 讲 探究含参数的一元二次方程	(38)
第 11 讲 分式方程的增根问题	(41)
第 12 讲 一元一次不等式组的解及参数问题	(45)
第 13 讲 方案设计型问题	(49)
中考高频考点强化训练(2)	(53)
第三章 一次函数与反比例函数	(57)
第 14 讲 函数自变量的取值范围问题	(57)
第 15 讲 确定实际背景下的一次函数关系式	(61)
第 16 讲 待定系数法求一次函数关系式	(65)
第 17 讲 一次函数与方程、不等式的综合问题	(68)
第 18 讲 确定实际背景下的反比例函数关系式	(72)
第 19 讲 “ k ”与面积	(76)
第 20 讲 一次函数与反比例函数的综合问题	(80)
中考高频考点强化训练(3)	(84)
第四章 二次函数	(88)
第 21 讲 求二次函数的解析式	(88)



第 22 讲	二次函数图象与系数的关系	(92)
第 23 讲	二次函数图象的几何变换	(96)
第 24 讲	探究函数背景下的面积	(100)
第 25 讲	二次函数的最值问题	(105)
第 26 讲	函数图象过定点的研究	(109)
第 27 讲	建立函数模型解决实际问题	(112)
	中考高频考点强化训练(4)	(118)
第五章	统计与概率	(123)
第 28 讲	选用合适的公式计算平均数	(123)
第 29 讲	数据的分析与应用	(127)
第 30 讲	构建概率模型,判断游戏的公平性	(132)
第 31 讲	统计与概率的综合运用	(136)
	中考高频考点强化训练(5)	(140)
第六章	三角形	(144)
第 32 讲	三角形的外角和内角	(144)
第 33 讲	三角形中位线的应用问题	(147)
第 34 讲	留心 SSA	(151)
第 35 讲	等腰三角形的边角分类问题	(155)
第 36 讲	动态几何中的等腰三角形分类讨论问题	(159)
第 37 讲	勾股定理的应用	(163)
第 38 讲	以特殊三角形为背景的计算和证明	(167)
第 39 讲	相似三角形的相似比	(172)
第 40 讲	“一线三等角”相似问题	(175)
第 41 讲	三角形中线段之比的计算问题	(178)
	中考高频考点强化训练(6)	(181)
第七章	图形与变换	(185)
第 42 讲	与直线交点个数有关问题的探究	(185)
第 43 讲	列方程(组)求线段长	(188)
第 44 讲	平行线的探究的开放问题	(191)
第 45 讲	最短路径问题(一)	(195)
第 46 讲	最短路径问题(二)	(198)
第 47 讲	图形的旋转路径	(201)
第 48 讲	图形变换的计算与证明	(204)
	中考高频考点强化训练(7)	(208)

第八章 四边形与多边形	(213)
第 49 讲 多边形与三角形的转化问题	(213)
第 50 讲 平行四边形判定误区	(218)
第 51 讲 矩形翻折问题	(221)
第 52 讲 菱形、正方形的探究	(224)
第 53 讲 不画图导致的错误问题	(227)
第 54 讲 以特殊四边形为背景的计算与证明	(230)
中考高频考点强化训练(8)	(233)
第九章 圆	(238)
第 55 讲 垂径定理的应用	(238)
第 56 讲 三角形的外心和内心	(241)
第 57 讲 圆的切线性质与证明	(244)
第 58 讲 与圆有关的分类讨论	(248)
第 59 讲 与圆有关的计算与证明	(253)
第 60 讲 在圆的背景下的相似问题	(257)
中考高频考点强化训练(9)	(262)

第一章 数与式

第1讲 实数的运算



知识理解与建构

在实数范围内,加、减、乘(包括乘方)、除(除数不为0)运算都可以实施,就是说,两个实数经过以上运算,其结果仍是实数,但对于开方运算则有限制,因为任何实数的平方(偶次方)都不是负数,所以在实数范围内,负数不能开平方(开偶次方).

实数的运算要理清运算顺序:有乘方或开方先算乘方或开方,再算乘除,最后算加减.一般地,有括号的先进行括号里的运算,同级运算从左往右依次进行.如果在正确运用运算律的前提下能够达到简便运算,可以打破一般运算顺序,这就是实数运算中的简便运算.

应用实数运算解决问题,要理清数量关系,列出正确的数学表达式.近年来,和实数有关的问题侧重于对观察、猜想、归纳能力的考查,注重数学知识的综合运用.数的巧算、绝对值化简以及应用非负数的性质解题等是难点.



方法剖析与提炼

例1 计算: $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)^2$.

【解答】解法一:

$$(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)^2$$

$$=2-\sqrt{3}.$$

解法二:

$$(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)^2$$

$$=2-\sqrt{3}.$$

【解析】在实数运算中合理运用公式能达到简便运算的目的,有时可能需要打破原来一般的运算顺序,比如解法一中先运用完全平方公式计算,就显得比较麻烦,解法二中先运用平方差公式运算就显得简便得多.

【解法】解法二是积的乘方的逆运算运用.在幂的运算中同指数幂相乘,为达到简便的目的,可将底数先相乘再把获得的积进行乘方运算,即: $a^n b^n = (ab)^n$.

【解释】这种解题策略可以推广到其他问题,如:

$$\text{计算: } (\sqrt{3}+2)^2(\sqrt{3}-2)^3.$$

$$\text{解: } (\sqrt{3}+2)^2(\sqrt{3}-2)^3$$

$$=\sqrt{3}-2.$$

按顺序运算,先运用完全平方公式计算,再相乘.

找出运算中符合 $(a+b)(a-b)$ 型的代数式,先运用平方差公式计算,再相乘.

先找出运算中符合 $(a+b)(a-b)$ 型的代数式,再运用整体思想 $a^2 b^2 = (ab)^2$ 简算.



例 2 化简： $|\sqrt{3}-2\sqrt{2}|+|\sqrt{2}+\sqrt{3}|-|\sqrt{2}-\sqrt{3}|$.

【解答】

根据绝对值 $|a|$ 的意义,先确定 a 的符号,再去掉绝对值符号,最后计算.

$$=4\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

【解析】将绝对值符号转化为括号,要牢记绝对值的结果是一个非负数,即: $|a|=\begin{cases} a & (a\geq 0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$

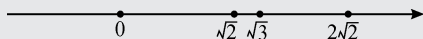
【解法】利用绝对值的非负性,可判断所求绝对值的数或式的符号,如 $|\sqrt{3}-2\sqrt{2}|$ 表示求 $\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ 的绝对值, $\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ 的结果是负数,则 $|\sqrt{3}-2\sqrt{2}|$ 的结果是 $\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ 的相反数,即: $|\sqrt{3}-2\sqrt{2}|=-(\sqrt{3}-2\sqrt{2})=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

【解释】此题利用绝对值的意义来解决问题,关键是确定绝对值符号里的数的正负性.在此对判断两数差的符号问题,提供一些经验式的解决策略:首先确定两个实数的大小,然后以“大减小为正,小减大为负”为判断依据,“大减小”的绝对值仍是“大减小”,“小减大”的绝对值是“大减小”.以本例中 $2\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}$ 这几个数的比较为例:

$$\because \sqrt{8} > \sqrt{3} > \sqrt{2},$$

$$\therefore 2\sqrt{2} > \sqrt{3} > \sqrt{2}.$$

也可以借助数轴进行比较:



$$\text{得 } 2\sqrt{2} > \sqrt{3} > \sqrt{2}.$$

含绝对值符号的实数运算,切不可视去绝对值符号等同于去括号运算,要牢记任何实数的绝对值都为非负数.

例 3 (2016 泰州)实数 a, b 满足 $\sqrt{a+1}+4a^2+4ab+b^2=0$,则 b^a 的值为()

A. 2

B. $\frac{1}{2}$

C. -2

D. $-\frac{1}{2}$

【解答】 $\because \sqrt{a+1}+4a^2+4ab+b^2=0,$

$$\therefore \sqrt{a+1}+(2a+b)^2=0, \because \sqrt{a+1} \geq 0,$$

$$(2a+b)^2 \geq 0, \therefore \sqrt{a+1}=0, (2a+b)^2=0, \therefore b^a=.$$

根据两个非负数且又互为相反数可得两个等式,进而求得 a, b 的值.

【解析】由已知 $4a^2+4ab+b^2$ 与 $\sqrt{a+1}$ 的和为0,则两数必为相反数. $\because 4a^2+4ab+b^2=(2a+b)^2$ 为非负数, $\sqrt{a+1}$ 也是非负数, $\therefore 4a^2+4ab+b^2$ 和 $\sqrt{a+1}$ 只能都为0.

基于以上分析,此类问题我们俗称为“零加零等于零”的问题.

【解法】要学会利用平方(偶次方)数及算术平方根的非负性进行求解.

【解释】这个已知条件若换成 $\sqrt{a+1}+b^2=-4a^2-4ab$ 或 $\sqrt{a+1}+4a^2+b^2=-4ab$,让我们求解 b^a 的值,其本质都是一致的.

例 4 当一个物体自由下落时,它所经过的距离 h (米)和时间 t (秒)之间的关系我们可以用 $t=\sqrt{\frac{h}{5}}$ 来估计.假设物体从5米的高度自由下落,那么这个物体每经过1米需要多少时间(精确到0.01)?请把结果填入下表.

距 离	第 1 米	第 2 米	第 3 米	第 4 米	第 5 米
时间(秒)					

【解答】第1米经过的时间是 $\sqrt{\frac{1}{5}}$ 秒,第2米经过的时间是 $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}-\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$ 秒,第3米经过的时间是

$\left(\sqrt{\frac{3}{5}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ 秒,第 4 米经过的时间是 $\left(\sqrt{\frac{4}{5}} - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ 秒,第 5 米经过的时间是 $\left(1 - \sqrt{\frac{4}{5}}\right)$ 秒.

【解析】求第 n 米所经过的时间,就是 n 米经过的时间减去 $(n-1)$ 米经过的时间的差.

【解法】可以通过这样一个问题来帮助理解:当一个物体自由下落时,它所经过的距离 h (米)和时间 t (秒)之间的关系可以用 $h=5t^2$ 来估计,假设物体自由下落,那么这个物体经过的时间 t 所对应的距离是多少? 请把结果填入下表.

时 间	1 秒	2 秒	3 秒	4 秒	5 秒
距离(米)					

假设物体自由下落,那么这个物体每经过 1 秒下降的距离是多少? 请把结果填入下表.

时 间	第 1 秒	第 2 秒	第 3 秒	第 4 秒	第 5 秒
距离(米)					

有以上问题作铺垫,再让学生去解决第 n 米所经过的时间,自然会理解为“第 n 米所经过的时间,就是 n 米经过的时间减去 $(n-1)$ 米经过的时间的差”.

【解释】求解此题的主要困难在于如何正确理解题目,若没有深入分析,求第 1 米、第 2 米、第 3 米、第 4 米、第 5 米所对应的时间,有可能出现如下的解答:

距 离	第 1 米	第 2 米	第 3 米	第 4 米	第 5 米
时间(秒)	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{4}{5}}$	1

能发现答案错在哪里吗? 主要是把第 n 米经过的时间错误理解为下落 n 米所经过的时间.



能力训练与拓展

1. 已知 $x + \frac{1}{x} = \sqrt{7}$, 则 $x - \frac{1}{x}$ 等于()

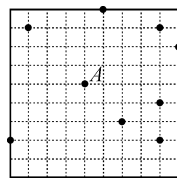
- A. $\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ C. $\pm\sqrt{3}$ D. $\pm\sqrt{5}$

2. 若把分数 $\frac{37}{13}$ 写成 $2 + \frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}}$ 的形式, 则 (x, y, z) 等于()

- A. (11, 2, 5) B. (1, 5, 2) C. (5, 2, 11) D. (1, 2, 5)

3. (2016 连云港) 如图, 在网格中(每个小正方形的边长均为 1 个单位)选取 9 个格点(格线的交点称为格点). 如果以 A 为圆心、 r 为半径画圆, 选取的格点中除点 A 外恰好有 3 个在圆内, 则 r 的取值范围为()

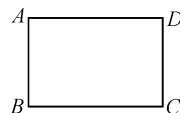
- A. $2\sqrt{2} < r < \sqrt{17}$ B. $\sqrt{17} < r < 3\sqrt{2}$
C. $\sqrt{17} < r < 5$ D. $5 < r < \sqrt{29}$



第 3 题图

4. (2016 扬州) 如图, 在矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=6$. 将该矩形纸片剪去 3 个等腰直角三角形, 所有剪法中剩余部分面积的最小值是()

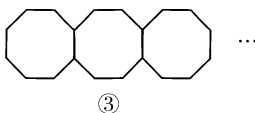
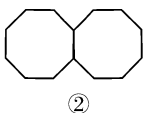
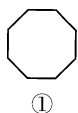
- A. 6 B. 3 C. 2.5 D. 2



第 4 题图

5. 如果 $3x-2$ 和 $5x+6$ 是一个数的平方根, 那么这个数是_____.

6. (2016 宁波) 下列图案是用长度相同的火柴棒按一定规律拼搭而成的, 图案①需 8 根火柴棒, 图案②需 15 根火柴棒……按此规律, 图案⑦需_____根火柴棒.



...



7. 计算下列各式:

$$(1) (\pi-1)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} - |5-\sqrt{3}| - 2\sqrt{3};$$

$$(2) (\sqrt{3}+2)^{2016} (\sqrt{3}-2)^{2017}.$$

8. 观察下列分母有理化运算:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = -1+\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = -\sqrt{2}+\sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} = -\sqrt{3}+\sqrt{4}; \dots$$

利用上面的规律计算:

$$\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015}+\sqrt{2016}} \right) (1+\sqrt{2016}).$$

9. 已知 x 是实数, 且 $(x^2-9x+20)\sqrt{x-3}=0$, 求 x^2+x+1 的值.

10. 求证: 存在正整数 n , 使得 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}>100$.

第2讲 代数式的化简与求值



知识理解与建构

1. 用数值代替代数式里的字母,按照代数式里指明的运算计算出的结果,就叫代数式的值.经常利用代数式的值进行比较,可推断代数式所反映的规律.

2. 求代数式的值的一般步骤:

(1) 代入.用指定字母的数值代替代数式里的字母,代入数值时,必须将相应的字母换成数值,其他的运算符号、原来的数字都不能改变,对原来省略的乘号应还原.

(2) 计算.按照代数式指明的运算计算出结果,运算时,应分清运算种类及运算顺序,按照先乘除,后加减,有括号的先算括号里的顺序进行.

3. 求代数式的值的一般方法:

(1) 直接代入求解.

(2) 消元代入法:如果代数式中有两个或两个以上的不同字母,且条件中没有给出这几个字母各自确定的值,直接代入计算就会有一定的困难.但由于条件中已给出这几个字母的和差倍分关系,那么,可用其中一个字母来表示其他字母,然后代入计算,这种求代数式的值的方法叫做消元代入法.

(3) 整体代入法:将已知条件作为一个整体,代入经过化简整理后的代数式中,这种求代数式的值的方法叫做整体代入法.

(4) 比例系数法(设 k 法):对于比例式,可设定一个比例系数,并将比例式中各字母都转化为用比例系数表示的代数式,再代入所求代数式中化简求值,这种方法叫做比例系数法.

(5) 特殊值法:根据题目条件选择允许的特殊值代替字母,这种方法叫做特殊值法.

4. 在求代数式的值时,我们经常先将代数式化简,再代入数值计算,从而达到简化计算的目的,在化简代数式时常用到去括号法则、合并同类项法则、绝对值的意义及分类讨论的思想等,从中发展数感与符号感,提升数、式运算与变形等方面技能,渗透转化、化归、数形结合、整体代换、分类讨论、方程与函数等数学思想方法,培养观察、猜想、归纳、类比、验证等数学思维,提高合情推理能力.



方法剖析与提炼

例1 已知 $A=2x^2+3xy-2x-1$, $B=-x^2+xy-1$, 且 $3A+6B$ 的值与 x 无关,求 y 的值.

【解答】 $\because 3A+6B=$

$$=(15y-6)x-9,$$

$\therefore$ 当 $y=$ _____ 时, $3A+6B$ 的值与 x 无关.

【解析】 由已知 $3A+6B$ 与 x 无关,可得出 $3A+6B$ 中不含有 x .

【解法】 求 $3A+6B$ 表示的代数式,可用整体代入法求得关于 x, y 的代数式 $15xy-6x-9$, 因 $3A+6B$ 与 x 无关,问题就转化为:当 y 为何值时, $15xy-6x-9$ 中不含有 x ?

$\because$ 当 $15y-6=0$ 时, $15xy-6x-9$ 中不含有 x ,

$\therefore$ 当 $y=\frac{2}{5}$ 时, $3A+6B$ 中不含有 x .

【解释】 (1) $3A+6B$ 所表示的式子是将 $A=2x^2+3xy-2x-1$ 与 $B=-x^2+xy-1$ 整体代入后化简的结果.

(2) $3A+6B$ 与 x 无关的问题转化为“式中不含有 x ”. 如何让代数式 $15xy-6x-9$ 中不含有 x 呢? 可以这样处理:把 y 作为常数,让字母 x 的系数为 0 即可.



例 2 若 $2x+3y=2016$, 则代数式 $2(3x-2y)-(x-y)+(-x+9y)=$ _____.

【解答】 $2(3x-2y)-(x-y)+(-x+9y)$

先化简再整体代入.

$=4032$.

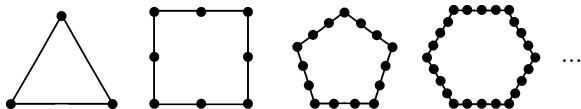
【解析】 首先化简代数式 $2(3x-2y)-(x-y)+(-x+9y)$, 得 $4x+6y$, 再观察 $4x+6y$ 与 $2x+3y$ 的关系, 若看不出来, 也可对 $4x+6y$ 进行因式分解: $4x+6y=2(2x+3y)$,

可得 $4x+6y$ 是 $2x+3y$ 的 2 倍.

【解法】 对代数式 $2(3x-2y)-(x-y)+(-x+9y)$ 化简后得 $4x+6y$, 再将 $2x+3y=2016$ 整体代入求解, 为一般性解法. 此题也可以用消元代入法: 由 $2x+3y=2016$ 得 $x=1008-\frac{3}{2}y$, 代入化简后的代数式 $4x+6y$ 求值.

【解释】 此类题常运用化简后的整体代入法或消元代入法, 具有一般性, 是常用方法, 但也有些可能用特殊值求解: 满足 $2x+3y=2016$ 这个方程的解有无数个, 可以举一个特殊的整数解如 $\begin{cases} x=0, \\ y=672 \end{cases}$ 代入代数式 $2(3x-2y)-(x-y)+(-x+9y)$, 求得值为 4032. 当然这种解法不具有一般性, 尤其是有些问题中的整数解不一定容易得到, 且计算数据复杂, 不提倡, 只能当计算方法探究的预设方法之一.

例 3 把黑色棋子按如图所示的规律摆放, 那么第 n 个图应摆放的棋子数为 _____.



【解答】 第 1 个图形, 即当 $n=1$ 时, 图形摆放的棋子数为 3.

第 2 个图形, 即当 $n=2$ 时, 图形摆放的棋子数为 $8=3+5$.

第 3 个图形, 即当 $n=3$ 时, 图形摆放的棋子数为 $15=3+5+7$.

第 4 个图形, 即当 $n=4$ 时, 图形摆放的棋子数为 $24=$ _____ $+$ _____ $+$ _____ $+$ _____.

第 n 个图形摆放的棋子数为 _____ $=n^2+2n$.

【解析】 本题可从数的角度观察, 也可从图形的角度观察、归纳.

第 1 个图形, 正三角形每条边上有 2 个棋子, 图形摆放的棋子数为: $3 \times 2 - 3 = 3 \times (2 - 1) = 3$,

也可以这样思考, 正三角形每个顶点上有 1 个棋子, 图形摆放的棋子数为: $3 \times 1 = 3$;

第 2 个图形, 正方形每条边上有 3 个棋子, 图形摆放的棋子数为: _____ $= 8$,

也可以这样思考, 正方形每条边其中一个顶点上有 1 个棋子, 边中间有 1 个棋子, 图形摆放的棋子数为: _____ $= 8$;

第 3 个图形, 正五边形每条边上有 4 个棋子, 图形摆放的棋子数为: _____ $= 15$,

也可以这样思考, 正五边形每条边其中一个顶点上有 1 个棋子, 边中间有 2 个棋子, 图形摆放的棋子数为: _____ $= 15$;

第 n 个图形, 正 $(n+2)$ 边形每条边上有 $(n+1)$ 个棋子, 图形摆放的棋子数为: _____ $= n^2 + 2n$,

也可以这样思考, 正 $(n+2)$ 边形每条边其中一个顶点上有 1 个棋子, 边中间有 $(n-1)$ 个棋子, 图形摆放的棋子数为: _____ $= n^2 + 2n$.

【解法】 要找出一个代数式来表示数量变化规律, 从数的角度入手探寻数量变化规律要有一个从起始角度思考的策略, 如 3, 8, 15, 24, ..., 前后两数差为 5, 7, 9, ... 如何用一个含 n 的代数式表示第 n 个数呢? 通过以上分析获得的信息, 利用这些信息用含 n 的代数式表示数量变化规律还是有点难度的. 若每个阶段的数都能从“起始”角度思考列式, 信息量就丰富很多, 分析如下:

$8=3+5, 15=3+5+7, 24=3+5+7+9,$

就可以比较清晰地理出,第 n 个数为 $3+5+7+9+\cdots+(2n+1)=\frac{n(2n+4)}{2}=n(n+2)=n^2+2n$.

【解释】仅从数或形入手进行归纳获得的一般性规律,严格地讲在没有推理证明前是不严密的,结果是有待于证明的,要有这样一个意识:在学习数学归纳法后,进一步领略数学的严密性.

例 4 已知 $m^2+m-1=0$,求 m^3+2m^2+2016 的值.

【解答】 $\because m^2+m-1=0, \therefore m^2=1-m$,

$$m^3+2m^2+2016$$

$$=m^2 \cdot m+2m^2+2016$$

运用降次代入法,
用 $1-m$ 替换 m^2 .

$$=2017.$$

【解析】此题用降次代入法:用低次的代数式去代换高次代数式,降低所求式子的幂的次数.

【解法】除了用 $m^2=1-m$ 代入 m^3+2m^2+2016 求解外,也可以用 $m^2+m=1$ 代入求解:

$$m^3+2m^2+2016$$

降次代入法,也可称为整体代入
法,用 m^2+m 替换 1.

$$=2017.$$

还可以这样做,用 $m^2+m-1=0$ 整体代入求解:

$$m^3+2m^2+2016$$

$$=m(m^2+m-1)+m^2+m-1+2017$$

$$=2017.$$

【解释】(1)如想通过解方程 $m^2+m-1=0$ 得出 m 的值,再代入 m^3+2m^2+2016 求值,显然是不适合的,解决问题要找到正确的策略思想,解决此题要有整体代入的整体思想.

(2)变形已知式,用低次式整体代换高次式将所求式降次,是解决此类问题的一个基本套路.如:用 $m^2=1-m$ 代换是让一次换二次,或用 $m^2+m=1$ 代换是让零次换二次.

例 5 (2016 毕节)若 $a^2+5ab-b^2=0$,则 $\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=\underline{\hspace{2cm}}$.

【解答】 $\because a^2+5ab-b^2=0$,

$$\therefore a^2-b^2=-5ab \text{ 或 } ab=\frac{1}{5}(b^2-a^2),$$

$$\therefore \frac{b}{a}-\frac{a}{b}=\underline{\hspace{2cm}}=5$$

或

$$\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=\underline{\hspace{2cm}}=5.$$

两种不同方式整
体代入求值.

【解析】先从已知条件入手,利用等式性质进行等式变形,使其成为“可代”式 $a^2-b^2=-5ab$ 或 $ab=\frac{1}{5}(b^2-a^2)$,将 $a^2-b^2=-5ab$ 或 $ab=\frac{1}{5}(b^2-a^2)$ 代入 $\frac{b^2-a^2}{ab}$,成为“可约”式.此题还可以对已知式利用等式性质进行等式变形:

$$\because a^2+5ab-b^2=0,$$

$$\therefore \text{两边都除以 } ab \text{ 得: } \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\therefore \frac{b}{a}-\frac{a}{b}=5.$$



【解法】此题运用整体代入思想求解代数式的值,要“两手抓”,“一手抓”等式的基本性质变形已知等式,另“一手抓”分式的基本性质等值变形所求的代数式,探寻问题的解决策略.

【解释】(1)利用已知条件求代数式的值,若不能求出或确定各字母的值,可考虑用整体代入法求值.一般从已知或所求出发,利用不同性质变形式子,获得“可约式”或“可代式”,有时先约后代,有时先代后约.

(2)有时已知条件中需要设参数字母后通过等式变形,再考虑消元代入法求值.如:

若 $\frac{x}{a-b} = \frac{y}{b-c} = \frac{z}{c-a}$, 求 $x+y+z$ 的值.

解: 设 $\frac{x}{a-b} = \frac{y}{b-c} = \frac{z}{c-a} = k$, 则 $x=k(a-b)$, $y=k(b-c)$, $z=k(c-a)$,

即 $x=ka-kb$, $y=kb-kc$, $z=kc-ka$,

$\therefore x+y+z=0$.



能力训练与拓展

1. (2016 济宁) 已知 $x-2y=3$, 那么代数式 $3-2x+4y$ 的值是()

A. -3

B. 0

C. 6

D. 9

2. 若多项式 $x^2-3kxy-3y^2+\frac{1}{3}xy-8$ 中不含 xy 项, 则 k 的值等于()

A. 0

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{9}$

D. $-\frac{1}{9}$

3. 若 $(x+3)^2+|y+1|+z^2=0$, 则 $x^2+y^2+z^2$ 的值为_____.

4. (2016 大庆) 已知 $a+b=3$, $ab=2$, 求代数式 $a^3b+2a^2b^2+ab^3$ 的值.

5. 已知 $a^2-3a+1=0$, 求 $\frac{a^2}{a^4+1}$ 的值.

6. 阅读下面题目的计算过程:

$$\frac{x-3}{x^2-1} - \frac{2}{1+x} = \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} - \frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)} \quad ①$$

$$= x-3-2(x-1) \quad ②$$

$$= x-3-2x+2 \quad ③$$

$$= -x-1 \quad ④.$$

(1) 上面计算过程从哪一步开始出现了错误? 请写出该步骤的代号;

(2) 写出正确的解答过程.

7. 已知 x, y 满足 $x^2 + y^2 + \frac{5}{4} = 2x + y$, 求代数式 $\frac{xy}{x+y}$ 的值.

8. 如果对于某一在特定范围内 x 的任意允许值, $p = |1-2x| + |1-3x| + \cdots + |1-9x| + |1-10x|$ 的值均为常数, 求此常数值.

9. 令 $f(n) = \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$,

(1) 求证: $f(n) = \frac{2}{n(n+1)}$;

(2) 求 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2016) + f(2017)$ 的值;

(3) 求证: $\frac{3}{2} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2017^2} < 2$.



第3讲 因式分解的应用



知识理解与建构

把一个多项式化为几个最简整式的乘积的形式,这种变形叫做把这个多项式因式分解(也叫分解因式).它是中学数学中最重要的恒等变形之一,广泛地应用于初等数学之中,是我们解决许多数学问题的有力工具.因式分解方法灵活,技巧性强,学习这些方法与技巧,不仅是掌握因式分解内容所必需的,而且对于培养学生的解题技能,发展学生的思维能力,都有着十分独特的作用.学习它,既可以复习整式的四则运算,又为学习分式打好基础;学好它,既可以培养学生的观察、思维发展性、运算能力,又可以提高学生综合分析和解决问题的能力.

因式分解是初中数学重要的基本知识、基本技能.在代数恒等变形、化简、求值、证明以及解方程(组)、不等式、整数问题甚至某些几何问题中都有广泛的应用.因式分解没有普遍适用的方法,初中数学教材中主要介绍了提取公因式法、运用公式法、分组分解法.而在竞赛中,又有拆项和添减项法、十字相乘法、待定系数法、换元法等.



方法剖析与提炼

例1 (2015 金华)已知 $a+b=3$, $a-b=5$, 则代数式 $a^2-b^2=$ _____.

【解答】

先利用平方差公式分解所求代数式,然后把已知条件整体代入.

【解析】(1)先将所求代数式变形为 $(a+b)(a-b)$.

(2)比较因式分解后的结果与已知条件,可将已知条件整体代入.

【解法】代入法.利用平方差公式分解因式法.整体代入法.

【解释】(1)将一个多项式分解因式的一般步骤:首先看各项有没有公因式,若有公因式,则把它提取出来,再观察是否符合完全平方公式或平方差公式,若是就考虑用公式法继续分解因式.

(2)此题若直接从已知条件出发,可通过解二元一次方程组求得 a, b 的值,然后把 a, b 直接代入便可解决.

例2 已知 $x-y=2016$, $xy=\frac{1}{2016}$, 求 $x^3y-2x^2y^2+xy^3$ 的值.

【解答】

先对所求代数式进行因式分解,然后整体代入.

$$\text{原式} = xy(x-y)^2 = \frac{1}{2016} \times 2016^2 = 2016.$$

【解析】若从已知条件出发,直接解出 x, y , 涉及解一元二次方程的知识,由于数据烦琐,解决起来非常困难,通过观察所求代数式,发现这是一个可以因式分解的多项式,分解后各因式与所给的已知条件相同,于是把已知条件 $x-y=2016$, $xy=\frac{1}{2016}$ 整体代入因式分解后的代数式,即可求得结果.

【解法】提取公因式法.利用完全平方公式因式分解法.整体代入法.

【解释】(1)一般地,求一个代数式的值,若知道未知数的值,可通过直接代入得到答案,而此题由已知条件求 x, y 的值显得有点困难,计算比较复杂.

(2)当正向思维遇到困难时,不妨从所求代数式入手,通过对所求代数式进行因式分解,发现结果非常完美.有时“正难则反”的思维方式能给问题的解决带来突破.