



上海出版基金项目
Shanghai Publishing Funds



创新应用型数字交互规划教材
机械工程

DYNAMICS OF MACHINERY

机械动力学

任彬 黄迪山·主编


上海科学技术出版社

国家一级出版社
全国百佳图书出版单位



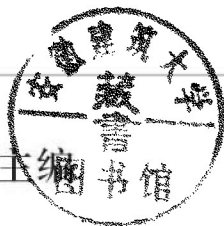
上海出版资金项目
Shanghai Publishing Funds



创新应用型数字交互规划教材
机械工程

机械动力学

任彬 黄迪山 · 主编



上海科学技术出版社

国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

内 容 提 要

本书共分为9章,第1至第5章内容包括机械振动系统基础知识、单自由度机械系统的振动、多自由度机械系统的振动、机械振动控制及其应用、机械液压系统动力学分析。第6至第9章介绍复杂机械系统动力学问题及几个典型案例,内容包括复杂系统动力学建模与仿真、机械-液压耦合的动力学问题与应用、电磁-机械耦合的动力学问题与应用、物理-数学混合的动力学问题与应用。本书依托增强现实(AR)技术,将视频、三维模型等数字资源与纸质教材交互,为读者和用户带来更丰富有效的阅读体验。为了方便教学使用,在出版社网站免费提供电子课件,供教师用户和读者参考。

本书主要作为高等院校机械类专业本科生的教材,也可供其他有关专业的师生和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

机械动力学 / 任彬,黄迪山主编. —上海:上海
科学技术出版社,2018.1

创新应用型数字交互规划教材. 机械工程

ISBN 978-7-5478-3630-9

I. ①机… II. ①任…②黄… III. ①机械动力学—高等学校—教材
IV. ①TH113

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 159741 号

机械动力学

任 彬 黄迪山 主编

上海世纪出版(集团)有限公司 出版、发行
上海科学技术出版社
(上海钦州南路71号 邮政编码200235 www.sstp.cn)

印刷

开本 787×1092 1/16 印张 11.25

字数: 280 千字

2018年1月第1版 2018年1月第1次印刷

ISBN 978-7-5478-3630-9/TH·69

定价: 38.00 元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题,
请向工厂联系调换

编审委员会

主 任 李郝林 陈关龙

副主任 钱 炜

委 员 (以姓氏笔画为序)

王小静 李峥嵘 张慧敏 陈 浩

陈军华 徐 洋 惠 虎

顾 问 曹自强

编写委员会

(以姓氏笔画为序)

丁晓红 马淑梅 王岩松 朱文峰

任 彬 李 晏 李郝林 李蓓智

张东民 张而耕 荆学东 黄迪山

支持单位

(按首字拼音排序)

德玛吉森精机公司

东华大学

ETA(Engineering Technology Associates, Inc.)中国分公司

华东理工大学

雷尼绍(上海)贸易有限公司

青岛海尔模具有限公司

瑞士奇石乐(中国)有限公司

上海大学

上海电气集团上海锅炉厂有限公司

上海电气集团上海机床厂有限公司

上海高罗输送装备有限公司技术中心

上海工程技术大学

上海理工大学

上海麦迅惯性航仪技术有限公司

上海麦迅机床工具技术有限公司

上海师范大学

上海新松机器人自动化有限公司

上海应用技术大学

上海紫江集团

上汽大众汽车有限公司

同济大学

西门子工业软件(上海)研发中心

浙江大学

中国航天科技集团公司上海航天设备制造总厂

丛书序

在“中国制造 2025”国家战略指引下,在“深化教育领域综合改革,加快现代职业教育体系建设,深化产教融合、校企合作,培养高素质劳动者和技能型人才”的形势下,我国高教人才培养领域也正在经历又一重大改革,制造强国建设对工程科技人才培养提出了新的要求,需要更多的高素质应用型人才,同时随着人才培养与互联网技术的深度融合,尽早推出适合创新应用型人才培养模式的出版项目势在必行。

教科书是人才培养过程中受教育者获得系统知识、进行学习的主要材料和载体,教材在提高人才培养质量中起着基础性作用。目前市场上专业知识领域的教材建设,普遍存在建设主体是高校,而缺乏企业参与编写的问题,致使专业教学教材内容陈旧,无法反映行业技术的新发展。本套教材的出版是深化教学改革,践行产教融合、校企合作的一次尝试,尤其是吸收了较多长期活跃在教学和企业技术一线的专业技术人员参与教材编写,有助于改善在传统机械工程向智能制造转变的过程中,“机械工程”这一专业传统教科书中内容陈旧、无法适应技术和行业发展需要的问题。

另外,传统教科书形式单一,一般形式为纸媒或者是纸媒配光盘的形式。互联网技术的发展,为教材的数字化资源建设提供了新手段。本丛书利用增强现实(AR)技术,将诸如智能制造虚拟场景、实验实训操作视频、机械工程材料性能及智能机器人技术演示动画、国内外名企案例展示等在传统媒体形态中无法或很少涉及的数字资源,与纸质产品交互,为读者带来更丰富有效的体验,不失为一种增强教学效果、提高人才培养的有效途径。

本套教材是在上海市机械专业教学指导委员会和上海市机械工程学会先进制造技术专业委员会的牵头、指导下,立足国内相关领域产学研发展的整体情况,来自上海交通大学、上海理工大学、同济大学、上海大学、上海应用技术大学、上海工程技术大学等近 10 所院校制造业学科的专家学者,以及来自江浙沪制造业名企及部分国际制造业名企的专家和工程师等一并参与的内容创作。本套创新教材的推出,是智能制造专业人才培养的融合出版创新探索,一方面体现和保持了人才培养的创新性,促使受教育者学会思考、与社会融为一体;另一方面也凸显了新闻出版、文化发展对于人才培养的价值和必要性。

中国工程院院士

丛书前言

进入 21 世纪以来,在全球新一轮科技革命和产业变革中,世界各国纷纷将发展制造业作为抢占未来竞争制高点的重要战略,把人才作为实施制造业发展战略的重要支撑,改革创新教育与培训体系。我国深入实施人才强国战略,并加快从教育大国向教育强国、从人力资源大国向人力资源强国迈进。

《中国制造 2025》是国务院于 2015 年部署的全面推进实施制造强国战略文件,实现“中国制造 2025”的宏伟目标是一个复杂的系统工程,但是最重要的是创新型人才培养。当前随着先进制造业的迅猛发展,迫切需要一大批具有坚实基础理论和专业技能的制造业高素质人才,这些都对现代工程教育提出了新的要求。经济发展方式转变、产业结构转型升级急需应用技术类创新型、复合型人才。借鉴国外尤其是德国等制造业发达国家人才培养模式,校企合作人才培养成为学校培养高素质高技能人才的一种有效途径,同时借助于互联网技术,尽早推出适合创新应用型人才培养模式的出版项目势在必行。

为此,在充分调研的基础上,根据机械工程的专业和行业特点,在上海市机械专业教学指导委员会和上海市机械工程学会先进制造技术专业委员会的牵头、指导下,上海科学技术出版社组织成立教材编审委员会和编写委员会,联络国内本科院校及一些国内外大型名企等支持单位,搭建校企交流平台,启动了“创新应用型数字交互规划教材 | 机械工程”的组织编写工作。本套教材编写特色如下:

1. 创新模式、多维教学。教材依托增强现实(AR)技术,尽可能多地融入数字资源内容(如动画、视频、模型等),突破传统教材模式,创新内容和形式,帮助学生提高学习兴趣,突出教学交互效果,促进学习方式的变革,进行智能制造领域的融合出版创新探索。

2. 行业融合、校企合作。与传统教材主要由任课教师编写不同,本套教材突破性地引入企业参与编写,校企联合,突出应用实践特色,旨在推进高校与行业企业联合培养人才模式改革,创新教学模式,以期达到与应用型人才培养目标的高度契合。

3. 教师、专家共同参与。主要参与创作人员是活跃在教学和企业技术一线的人员,并充分吸取专家意见,突出专业特色和应用特色。在内容编写上实行主编负责下的民主集中制,按照应用型人才培养的具体要求确定教材内容和形式,促进教材与人才培养目标和质量的接轨。

4. 优化实践环节。本套教材以上海地区院校为主,并立足江浙沪地区产业发展的整体情况。参与企业整体发展情况在全国行业中处于技术水平比较领先的位置。增加、植入这些企业中当下的生产工艺、操作流程、技术方案等,可以确保教材在内容上具有技术先进、工艺领

先、案例新颖的特色,将在同类教材中起到一定的引领作用。

5. 与国际工程教育认证接轨。增设与国际工程教育认证接轨的“学习成果达成要求”,即本套教材在每章开始,明确说明本章教学内容对学生应达成的能力要求。

本套教材“创新、数字交互、应用、规划”的特色,对避免培养目标脱离实际的现象将起到较好作用。

丛书编委会先后于上海交通大学、上海理工大学召开 5 次研讨会,分别开展了选题论证、选题启动、大纲审定、统稿定稿、出版统筹等工作。目前确定先行出版 10 种专业基础课程教材,具体包括《机械工程测试技术基础》《机械装备结构设计》《机械制造技术基础》《互换性与技术测量》《机械 CAD/CAM》《工业机器人技术》《机械工程材料》《机械动力学》《液压与气动技术》《机电传动与控制》。教材编审委员会主要由参加编写的高校教学负责人、教学指导委员会专家和行业学会专家组成,亦吸收了多家国际名企如瑞士奇石乐(中国)有限公司和江浙沪地区大型企业的参与。

本丛书项目拟于 2017 年 12 月底前完成全部纸质教材与数字交互的融合出版。该套教材在内容和形式上进行了创新性的尝试,希望高校师生和广大读者不吝指正。

上海市机械专业教学指导委员会

前 言

机械动力学是研究机械结构在动载荷作用下动力学行为的科学。随着工程结构和机械产品向大型、高速、大功率、高性能和轻结构方向发展,机械动力学问题越来越突出。复杂系统动力学无论是系统级的方案设计,还是部件级的详细参数设计,都涉及多个领域的综合知识,由不同领域的机械、电子、液压、控制系统组成,各子系统彼此之间交互耦合,组成完整的功能执行系统。

本书内容具有技术先进、工艺领先、案例新颖的特色,主要讲述机械动力学的基础理论、建模、分析计算以及复杂机械系统的动力学问题。全书分为9章,第1至第5章内容包括机械振动系统基础知识、单自由度机械系统的振动、多自由度机械系统的振动、机械振动控制及其应用、机械液压系统动力学分析。第6至第9章介绍复杂机械系统动力学问题及几个典型案例,内容包括复杂系统动力学建模与仿真、机械-液压耦合的动力学问题与应用、电磁-机械耦合的动力学问题与应用、物理-数学混合的动力学问题与应用。

本书第1至第5章可作为高等院校机械类专业的必修或选修课课程内容(需30~50学时),也可供机械制造和电子工程等专业的工程技术人员参考。本书第6至第9章结合国家“973”重点基础研究发展计划、国家科技支撑计划资助项目、国家自然科学基金、浙江省制造业信息化重大科技攻关项目、杭州市重大科技攻关项目等,介绍了复杂机械系统动力学问题及几个典型案例,为相关专业本科生和研究生的科研项目提供借鉴与参考。

本书由任彬、黄迪山担任主编。具体编写人员有黄迪山、李鹏、肖良、董昊(第1至第4章),罗序荣(第5章),赵振(第6章),任彬(第7至第9章)。罗序荣参与了章节编排。浙江大学张树有教授审阅了本书,并提出了宝贵的意见和建议,特在此致以诚挚的谢意。


限于编者的水平,书中难免有不当之处,请读者不吝批评指正。

编者

本书配套数字交互资源使用说明

针对本书配套数字资源的使用方式和资源分布,特做如下说明:

1. 用户(或读者)可持安卓移动设备(系统要求安卓 4.0 及以上),打开移动端扫码软件(本书仅限于手机二维码、手机 qq),扫描教材封底二维码,下载安装本书配套 APP,即可阅读识别、交互使用。

2. 小节等各层次标题后对应有加“”标识的,提供三维模型、视频等数字资源,进行识别、交互。具体扫描对象位置和数字资源对应关系参见下列附表。

扫描对象位置	数字资源类型	数字资源名称
5.2 节标题	三维模型	振动压路机三维模型
5.2.2 节标题	视频	振动压路机运动仿真
5.3 节标题	三维模型	汽车起重机三维模型
5.3.3 节标题	视频	起重机运动仿真
5.4 节标题	三维模型	挖掘机三维模型
5.4.2 节标题	视频	挖掘机运动仿真
5.5 节标题	三维模型	组合机床动力滑台三维模型
5.5.2 节标题	视频	组合机床动力滑台运动仿真
7.2 节标题	视频	注塑机现场工作和注塑机数字样机视频

目 录

第 1 章	机械振动系统基础知识	1
1.1	振动的分类及表示方法	1
1.2	机械振动系统的三要素和动力学模型	7
1.3	振动实验	15
第 2 章	单自由度机械系统的振动	24
2.1	单自由度系统的运动微分方程	24
2.2	单自由度系统的自由振动	25
2.3	等效单自由度系统	28
2.4	对数衰减率及阻尼比的测定	29
2.5	单自由度系统的强迫振动	31
第 3 章	多自由度机械系统的振动	37
3.1	两自由度系统的运动微分方程	37
3.2	两自由度系统的模态	39
3.3	两自由度系统的强迫振动	41
3.4	多自由度系统的运动微分方程、模态和强迫振动	43
第 4 章	机械振动控制及其应用	51
4.1	抑制振源	51
4.2	隔振技术	52
4.3	减振技术	55
4.4	振动主动控制	58
4.5	注塑机合模机构的振动试	60

第5章	机械液压系统动力学分析	68
5.1	AMESIM 简介	68
5.2	振动压路机液压系统动力学分析	73
5.3	汽车起重机起升机构液压系统动力学分析	79
5.4	小型液压挖掘机动臂(下降)的液压系统动力学分析	87
5.5	组合机床动力滑台液压系统动力学分析	91
第6章	复杂系统动力学建模与仿真	96
6.1	多领域物理系统的建模方法	96
6.2	多体动力学动态仿真建模的系统框架	101
6.3	零部件运动约束识别建模	104
6.4	优化设计中的仿真模型动态重建	106
第7章	机械-液压耦合的动力学问题与应用	113
7.1	研究进展	113
7.2	机械场中前模板结构的拓扑优化	115
7.3	注射成型装备合模机构刚柔耦合动力学分析	130
7.4	注射成型装备机械-液压耦合的多场仿真	134
第8章	电磁-机械耦合的动力学问题与应用	137
8.1	研究背景	137
8.2	低压断路器的基本结构、工作原理及数学模型	139
8.3	低压断路器电磁-机械耦合仿真分析和参数检测	145
第9章	物理-数学混合的动力学问题与应用	152
9.1	研究背景	152
9.2	大型深低温精馏塔的数学仿真	154
9.3	高效填料性能的物理仿真	156
9.4	空分装备精馏系统物理-数学混合仿真	157
符号表		160
参考文献		161

机械振动系统基础知识

◎ 学习成果达成要求

机械振动是研究机械动力学的基础,为了更好地了解机械动力学,需要学习机械振动系统的动力学模型。

学生应达成的能力要求包括:

1. 能够掌握振动的分类、振动的表示方法、简谐振动的基本特征;
2. 能够理解机械振动系统的三要素,了解动力学模型分类。

机械振动是研究机械动力学的基础,本章从机械系统动力学的观点介绍机械系统振动的基本知识,为研究机械系统动力学打下基础。

1.1 振动的分类及表示方法

为了便于研究,人们把振动按不同的方式进行分类并给出几种常用的表示方法。

1.1.1 振动的分类

1) 按振动产生的原因分类

- (1) 自由振动。自由振动是指系统受初始干扰或原有外激励力取消后产生的振动。
- (2) 强迫振动。强迫振动是指系统在外激励力的作用下产生的振动。
- (3) 自激振动。自激振动是指在没有周期外力的作用下,由系统内部激发及反馈的相互作用而产生的稳定的周期振动。

2) 按结构参数的特性分类

- (1) 线性振动。线性振动是指,一般在微小振动条件下,系统内的恢复力、阻尼力和惯性力分别与振动位移、速度和加速度成线性关系的一类振动,可用常系数线性微分方程来描述。
- (2) 非线性振动。非线性振动是指,因材料非线性本构关系或运动大变形引起的,系统内上述参数有一组或一组以上(恢复力与振动位移,阻尼力与速度,惯性力与加速度)不成线性关系时的振动,此时微分方程中出现非线性项。

3) 按系统的自由度数分类

- (1) 单自由度系统振动。单自由度系统振动是指只用一个独立坐标就能确定的系统振动。
- (2) 多自由度系统振动。多自由度系统振动是指需要多个独立坐标才能确定的系统振动。
- (3) 连续体振动。连续体振动是指无限多自由度系统的振动,一般也称为弹性体振动,需

用偏微分方程来描述。

4) 按振动的规律分类

(1) 简谐振动。简谐振动是指振动量为时间的正弦或余弦函数的一类周期振动。

(2) 周期振动。周期振动是指振动量可表示为时间的周期函数的一类振动,可用谐波分析法将其展开成一系列简谐振动的叠加。

(3) 瞬态振动。瞬态振动是指振动量为时间的非周期函数的一类振动,通常只在一定的时间内存在。

(4) 随机振动。随机振动是指振动量为时间的非确定性函数的一类振动,只能用概率统计的方法进行研究。

1.1.2 振动的表示方法

机械振动是指振动系统围绕其平衡位置做往复运动。在许多情况下,机械振动是有害的,它影响机械设备的工作性能和寿命,产生不利于工作的噪声和有损于机械或结构的动载荷,严重时会使零部件失效甚至破损而造成事故。从运动学的观点来看,机械振动是振动系统的某些物理量(位移、速度、加速度)随时间 t 变化的规律。

1) 机械振动的一般表示方法

如果机械振动的规律是确定的,则可用函数关系式

$$x = x(t) \quad (1-1)$$

来描述其运动。也可用函数图形来表示,通常以时间为横坐标,以振动的物理量为纵坐标。图 1-1、图 1-2、图 1-3 所示是以位移 x 为纵坐标的几种典型的机械振动。

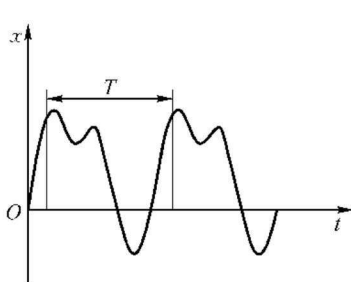


图 1-1 周期振动

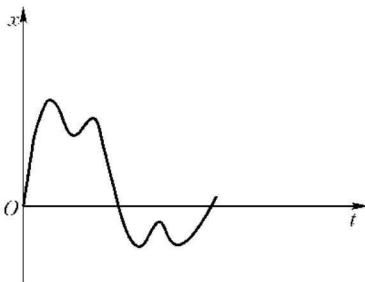


图 1-2 瞬态振动



图 1-3 随机振动

对于周期振动,可用时间的周期函数表示为

$$x(t) = x(t + nT) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1-2)$$

式中, T 为振动周期,单位为 s(秒)。将周期的倒数,即

$$f = \frac{1}{T} \quad (1-3)$$

式中, f 为振动频率,单位为 Hz(赫兹)。

2) 简谐振动的表示方法

(1) 正弦、余弦函数表示法。简谐振动是一种最简单的周期振动,也是最基本的振动形式,是研究其他形式振动的基础。简谐振动的时间历程是正弦或余弦函数,它的位移可表示为

$$x = A \cos \omega t \quad \text{或} \quad y = A \sin \omega t \quad (1-4)$$

式中, A 为振动的最大值, 称为振幅; ω 称为振动角频率或圆频率 (rad/s); ωt 称为相位角。一般常用频率 f 或周期 T 来表示振动的快慢, ω 、 f 、 T 之间的关系为

$$\omega = 2\pi f, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1-5)$$

(2) 旋转向量表示法。一个模为 A 的向量以匀角速度 ω 作逆时针旋转时(图 1-4), 它在横坐标 x 轴和纵坐标 y 轴上的投影分别为

$$x = A\cos \omega t \quad \text{和} \quad y = A\sin \omega t$$

正好与简谐振动表达式(1-4)相同, 因此可用旋转向量来表示简谐振动。旋转向量的模 A 为振幅, 其旋转角速度 ω 为简谐振动的角频率。

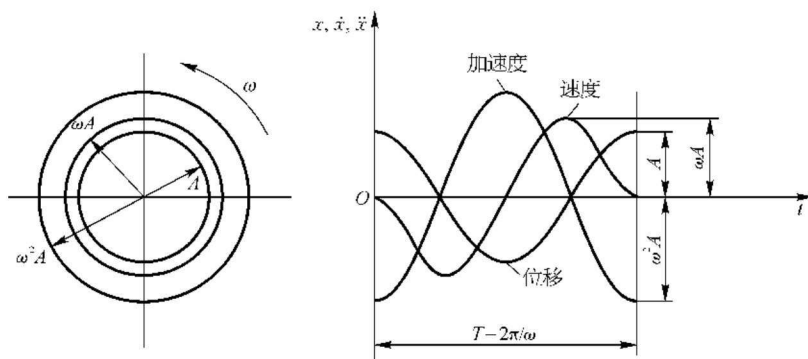


图 1-4 简谐振动的旋转矢量表示法

振动的起始点 ($t = 0$) 的位置可用初相位 φ 来确定。因此, 一般简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \quad (1-6)$$

对式(1-6)求一阶、二阶导数可得简谐振动的速度和加速度表达式:

$$\dot{x} = -A\omega \cos(\omega t + \varphi) = A\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1-7)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi) \quad (1-8)$$

由式(1-6)、式(1-7)、式(1-8)可见, 如果位移为简谐函数, 其速度和加速度也必为简谐函数, 且有相同的频率。不过, 在相位上速度和加速度分别超前 $\pi/2$ 和 π 。

注意有

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (1-9)$$

可见, 简谐振动加速度的大小与位移成正比, 方向与位移相反, 始终指向平衡位置, 这是简谐振动的一个重要特征。

(3) 复数表示法。复数 $z = a + jb$ 在复平面上是一个点, 它和坐标原点的连线代表复平面上的一个向量, 称为复向量, 其模和辐角为

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = A \\ \arg z = \omega t \end{cases} \quad (1-10)$$

如图 1-5 所示,复数 z 的实部和虚部分别为

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z = a = A \cos \omega t \\ \operatorname{Im} z = b = A \sin \omega t \end{cases} \quad (1-11)$$

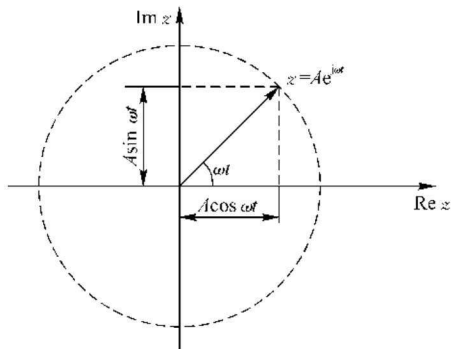


图 1-5 简谐振动的复数表示法

则复数表达式为

$$z = A(\cos \omega t + j \sin \omega t) = A e^{j\omega t} \quad (1-12)$$

由式(1-11)或式(1-12)可知,复数 z 的虚部和实部均表示一个简谐振动。为了便于运算,可事先约定用复数的虚部或实部来表示所研究的简谐振动。

对于一个简谐振动,设其位移的复数形式为

$$z = A e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (1-13)$$

则相应速度和加速度的复数形式分别为:

$$\dot{z} = j\omega A e^{j(\omega t + \varphi)} = \omega A e^{j(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})} \quad (1-14)$$

$$\ddot{z} = -\omega^2 A e^{j(\omega t + \varphi)} = \omega^2 A e^{j(\omega t + \varphi + \pi)} \quad (1-15)$$

将式(1-13)~式(1-15)分别与式(1-6)~式(1-8)对比可知:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad \dot{x} = \operatorname{Re} \dot{z}, \quad \ddot{x} = \operatorname{Re} \ddot{z} \quad (1-16)$$

1.1.3 简谐振动的基本特征

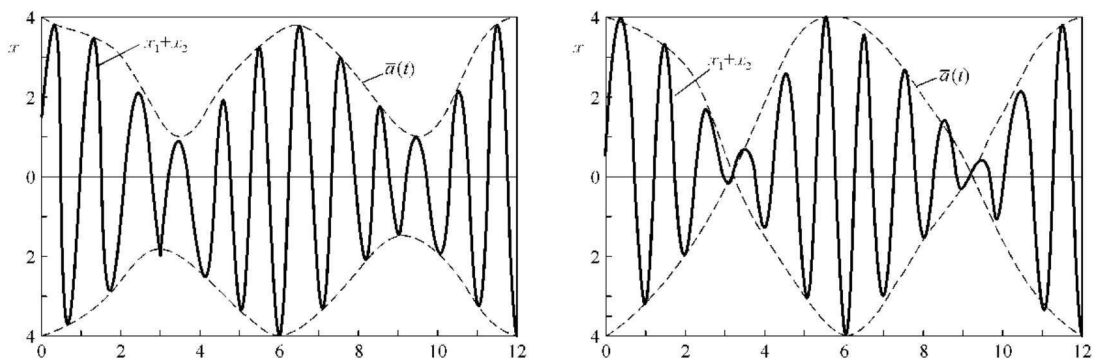
1) 振动方向相同的简谐振动的合成

运用三角函数容易证明:

性质 1 两个同方向且同频率简谐振动的合成(叠加)结果仍为简谐振动,且频率不变。

性质 2 两个不同频率的简谐振动的合成结果一般为周期振动,特殊情况下为非周期振动(此时两频率比为无理数)。

性质 3 两个频率十分接近的简谐振动合成后会产生周期性的拍振,如图 1-6 所示,其中虚线 $\bar{a}(t)$ 为合成振动的包络线。



(a) 两个异振幅简谐振动合成的拍振

(b) 两个同振幅简谐振动合成的拍振

图 1-6 频率十分接近的简谐振动的合成

下面给出两个简谐振动合成的证明。

(1) 两个相同频率的简谐振动的合成仍然是简谐振动,而且保持原来的频率。

证明:设两个简谐振动分别为

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ 及 } x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

则有

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\ &= \operatorname{Re}[A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)}] \\ &= \operatorname{Re}[e^{j\omega t} (A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2})] \\ &= \operatorname{Re}\{e^{j\omega t} [(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) + j(A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)]\} \\ &= \operatorname{Re}(e^{j\omega t} A e^{j\varphi}) = A \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

式中:

$$\begin{aligned} A &= [(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2]^{1/2} \\ \varphi &= \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \end{aligned}$$

(2) 频率不同的简谐振动的合成不再是简谐振动。当频率比为有理数时,合成为周期振动;当频率比为无理数时,合成为非周期振动。

证明:设两个简谐振动分别为

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

令 $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$, m, n 互质,则

$$m \frac{2\pi}{\omega_1} = n \frac{2\pi}{\omega_2}$$

设

$$mT_1 = nT_2 = T$$

记 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, 所以 $x(t+T) = x_1(t+T) + x_2(t+T) = x_1(t+mT_1) + x_2(t+nT_2) = x_1(t) + x_2(t) = x(t)$ 。

例 1-1 判断下列振动是否为周期振动,若是求其周期。

(1) $x(t) = \cos 3t + 7\sin 3.5t$;

(2) $x(t) = 6\cos 3t + 8\cos^2 1.6t$;

(3) $x(t) = 3\sin \sqrt{2}t + \cos \sqrt{3}t$;

解: (1) 根据性质 2, 由于 $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{3.5} = \frac{6}{7}$ 为有理数, 则该振动为周期振动, 周期 $T = 6 \times \frac{2\pi}{3} \text{ s} = 7 \times \frac{2\pi}{3.5} \text{ s} = 4\pi \text{ s}$ 。

(2) $\cos^2 1.6t = \frac{1}{2}(\cos 3.2t + 1) \Rightarrow 8\cos^2 1.6t = 4\cos 3.2t + 4$ 将原式变换得 $x(t) = 6\cos 3t + 4\cos 3.2t + 4$ 。根据性质 2, 由于 $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{3.2} = \frac{15}{16}$ 为有理数, 则该振动为周期振动, 周期 $T = 15 \times \frac{2\pi}{3} \text{ s} =$