FENSHUJIE WEIJIFEN LILUN ZAI

TUXIANG ZENGQIANG HE QUZAO ZHONG DE YINGYONG

分数阶微积分理论在图像增强和去噪中的应用

周激流　蒲亦非　黄　果　陈庆利　主编

四川大学出版社

分数阶微积分理论在
图像增强和去噪中的应用

周激流　蒲亦非　黄　果　陈庆利　主编

四川大学出版社

责任编辑:毕　潜
责任校对:唐　飞
封面设计:墨创文化
责任印制:王　炜

图书在版编目(CIP)数据

分数阶微积分理论在图像增强和去噪中的应用 / 周激流等主编. —成都：四川大学出版社，2013.6
ISBN 978-7-5614-6915-6

Ⅰ.①分…　Ⅱ.①周…　Ⅲ.①微积分-应用-图象处理　Ⅳ.①TP391.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 138181 号

书名　**分数阶微积分理论在图像增强和去噪中的应用**

主　编	周激流　蒲亦非　黄　果　陈庆利
出　版	四川大学出版社
地　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　行	四川大学出版社
书　号	ISBN 978-7-5614-6915-6
印　刷	四川永先数码印刷有限公司
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　张	12.75
字　数	288 千字
版　次	2015 年 12 月第 1 版
印　次	2015 年 12 月第 1 次印刷
定　价	48.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。
电话:(028)85408408/(028)85401670/
(028)85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请
寄回出版社调换。
◆网址:http://www.scup.cn

前 言

分数阶微积分（Fractional Calculus）是相对于整数阶微积分提出来的，它将整数阶微积分推广到微积分阶次为分数、有理数甚至是复数的情况，是整数阶微积分的拓展和广义定义。尽管分数阶和整数阶微积分的历史一样古老，然而，300 多年以来，分数阶微积分一直仅仅作为数学领域内的一个纯理论被数学家研究，没有得到广泛的应用。随着应用数学、材料力学、生物物理学等工程和技术领域提出了分数阶微积分的应用背景，分数阶微积分才逐渐被人们重视。

分数阶微积分作为分形几何和分形动力学的基础和有力工具，是描述分数维空间的数学工具和建模工具。分数阶导数的拟微分算子特性使之具有保记忆性（非局部性），因此，分数阶微积分能对现实问题进行优美刻画，非常适合刻画具有记忆和遗传性质的材料和物理过程。分数阶微积分的理论和方法广泛应用于描述各种物理过程、各种自然现象的中间过程和临界现象，是非平稳动态系统、非线性科学和复杂系统所关注的热点研究领域。

将分数阶微分理论应用于数字图像处理在国内外都是一个新兴的研究领域，并取得了一定的效果。分数阶微分是整数阶微分的推广和延拓，分数阶微分具有非线性和非局部特性。研究发现，分数阶微分在信号的奇异性检测和提取方面具有特殊的效果，直流或低频信号的分数阶微分值一般不为零；分数阶微分处理既非线性地加强了信号的高频分量，又在一定程度上非线性地加强了信号的中频分量，同时还极大地非线性保留了信号的低频和直流分量。因此，数字图像的分数阶微分具有特殊的马赫（Mach）现象，其拮抗特性具有特殊的生物视觉感受野模型，所对应的仿生 Rodieck 感受野模型的中心位置幅度更小，且更平坦。分数阶微分对图像平滑区域的处理是在极大保留其低频轮廓信息的基础上，非线性地加强灰度值跃变幅度和频率相对不大的高频纹理细节信息。因此，图像分数阶微分既保留了图像低频轮廓信息，又加强了灰度值跃变幅度较大的高频边缘信息，同时还加强了灰度值跃变幅度较小的高频纹理细节信息。

本书是四川大学天思智能信息研究所多年来集体工作的结晶。我们根据近期有关分数阶微积分的研究和教学实践，并在综合大量有关文献资料的基础上，进行归纳和总结，编写了此书。全书共 10 章，主要内容包括：①分数阶微积分理论在国内外研究现状；②分数阶微积分基本理论；③Riemann-Liouville 分数阶图像增强算法及其电路实现；

④基于分数阶 Euler-Lagrange 方程的图像增强算法；⑤基于 Caputo 定义的分数阶图像增强；⑥非整数步长分数阶微分的图像增强；⑦可变阶次分数阶微分实现图像自适应增强和去噪；⑧分数阶积分滤波器的构造及在图像去噪中的应用；⑨基于空间分数阶偏微分方程的图像去噪模型；⑩基于时间-空间分数阶偏微分方程的图像去噪模型等。

我们要特别感谢中国国家自然科学基金（No. 60972131，No. 61201438）对本书研究有益的建议和交流，感谢在撰写过程中四川大学天思智能信息研究所对本书所做的大量整理工作。本书的编写和出版，还得到了张妮、张卫华、张永清、刘军、朱伍洋、陈书书的支持与帮助，得到了四川大学出版社的大力协助，在此一并致谢。

由于作者知识水平有限，书中难免会存在不足之处，敬请读者斧正。

编　者

2015 年 3 月

目　录

第 1 章　分数阶微积分理论在国内外研究现状

1.1　分数阶微积分理论的发展

分数阶微积分（Fractional Calculus）理论和经典的整数阶微积分理论一样具有漫长而悠久的发展历史，它可以追溯到 Leibniz 和 Newton 创建微分学的时代。1695 年，Leibniz 写给 L'Hôpital 的信中这样写道："Can the meaning of derivatives with integer order be generalized to derivatives with non-integer orders?" L'Hôpital 对于 Leibniz 提出的这个问题感到十分好奇，但是又很难给出很好的答案，他经过一段时间的艰难思考后，在 1697 年，L'Hôpital 在回信中这样写道："What if the order will be 1/2?" 此后，Leibniz 又在回信中给出了大胆预测："It will lead to a paradox，from which one day useful consequences will be drawn." 于是，在两位杰出的数学家之间激烈的讨论和剧烈的思想碰撞中，分数阶微积分理论就从此诞生了。1730 年，Euler 研究并总结了当微分阶次为非整数条件下的含义。1772 年，Lagrange 首次推演了整数阶微积分理论微分阶次满足可叠加性质，即 $\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}y=\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}y$，然而，他不能肯定分数阶微分理论是否满足可叠加性质。1812 年，Laplace 在其专著中推导出了许多特定的分数阶微积分运算表达式。1819 年，Lacroix 利用 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ 的特殊性质，推演出了函数 $f(y)=y$ 的 $\frac{1}{2}$ 阶分数阶微分运算结果为 $\frac{\mathrm{d}^{1/2}y}{\mathrm{d}y^{1/2}}=2\sqrt{y/\pi}$。1822 年，Fourier 给出了分数阶微分的 Fourier 表达式为 $\frac{\mathrm{d}^v f(x)}{\mathrm{d}x^v}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(a)\mathrm{d}a\int_{-\infty}^{+\infty}p^v\cos\left(px-pa+\frac{v\pi}{2}\right)\mathrm{d}p$，并且特别提出该表达式中的微分阶次 u 可以为正数，也可以为负数。1823 年，Abel 首次提出了分数阶微积分理论具体的应用，即等时曲线的降落问题。以上的众多数学家只是对分数阶微积分理论进行了尝试性研究，此后的学者开始专注于对分数阶微积分理论较为系统性的研究。1832 年，Liouville 提出了分数阶微积分的基本定义，并将余函数融入分数阶微积分定

义中，同时分析了函数 $\frac{\mathrm{d}^{1/2}\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{d}x^{1/2}}$ 的基本性质，指出了该函数的 v 阶分数阶微分运算可以分部完成，即首先将目标函数利用泰勒公式展开为幂函数级数序列形式，然后利用整数阶微分运算类似的操作，对上述幂函数级数进行逐项微分操作，最后得出了几种基于分数阶微积分理论来解决动力学和几何学的实例；1834 年，Liouville 首次尝试研究分析等时曲线问题，并且首次提出了分数阶微分方程的基本形式，他研究发现：如果 $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=0$，$n\in\mathbf{Z}$，那么微分阶次 n 可以推广到任意数，即满足 $\frac{\mathrm{d}^u y}{\mathrm{d}x^u}=0$，$u\in\mathbf{R}$；1835 年，Liouville 提出了分数阶微分的级数定义形式为 $\frac{\mathrm{d}^v y}{\mathrm{d}x^v}=\sum A_m \mathrm{e}^{mx}m^v$，从而为分数阶微积分方程的数值解奠定了坚实的基础。1841 年，Gregory 首次推导出了基于分数阶微积分理论的热力学方程表达式，这为分数阶微积分理论在物理系统中的应用作了基础性的铺垫。1847 年，Riemann 将 Taylor 级数展开并进行了延伸和拓展，并且通过归纳得到了分数阶积分的基本定义为 $\frac{\mathrm{d}^{-r}}{\mathrm{d}x^{-r}}u(x)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_c^x (x-k)^{r-1}u(k)\mathrm{d}k$，此外，他认为分数阶微积分定义的下限可以以零为起点。1848 年，Hargreave 首次提出了任意两个函数乘积的分数阶 Leibniz 规则及相关性质，并推导出了广义的函数乘积分数阶导数形式。同年，Center 推导出了微分阶次为常数的分数阶微分计算方法，并指出 Liouville 定义与 Lacroix 定义得到的结论是完全相背的。1840 年，Morgan 对 Center 推导出的结论给出了完备的解释。1859 年，Greer 在 Liouville 对指数函数理论分析的情况下，推演出了关于正弦信号和余弦信号的 1/2 阶次微分计算公式。1868 年，Letnikov 研究发现分数阶微积分运算的阶次可加性是存在的。1888 年，Nekrassov 在 Liouville 对指数函数分数阶微积分运算结果的基础上，得到了函数 $(x-a)^p$ 的任意 q 阶分数阶导数的数值计算方法。1927 年，Marchaud 推导出了分数阶微积分运算的有限差分表达式，为分数阶微积分的数值计算奠定了坚实的基础。1941 年，Widder 推演出了分数阶积分的 Laplace 变换基本形式。1950 年，Stuloff 归纳出了分数阶差分的基本定义，从而将分数阶微积分理论极大地向前拓展。1953 年，Riemann 提出了采用定积分形式的另一种分数阶微分定义。1967 年，Caputo 研究得到了适用于工程领域应用的分数阶微积分理论的基本定义。1971 年，Osler 推导出了基于分数阶微积分理论的广义链式运算规则。同年，Love 首次将分数阶微积分理论的微积分阶次推广延伸到复数的情况。1972—1975 年，Oldham，Grenness，Spanier，Osler，Juberg，Prabhakar 等学者从不同的应用角度分别编写了关于分数阶微积分理论的专著，对分数阶微积分理论及其应用进行了系统性的归纳和总结。

在最近三十年，众多学者对分数阶微积分理论做出了巨大的贡献，他们在前辈们已取得的理论成果的基础上，详细论述了分数阶微积分的理论推导和已经取得的应用成

果，包括：Keith B Oldham 和 Jerome Spanier 出版的《Fractional Calculus：Theory and Applications，Differentiation and Integration to Arbitrary Order》详细论述了分数阶微积分理论与应用；Ross B 出版的《Fractional Calculus and Its Applications：Proceedings of the International Conference》全面阐述了分数阶微积分历史；Samko S G，Kilbas A A，Marichev O I 出版的《Fractional Integrals and Derivatives：Theory and Applications》系统介绍了分数阶微积分的基本理论和相关应用；Petras I，Podlubny I，O'Leary P，Dorcak L，Vinagre B 出版的《Analogue Realization of Fractional Order Controllers》论述了分数阶控制的模拟实现；Miller K S，Ross B 出版的《An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations》简述了分数阶微积分及分数阶微分方程的基本理论；Podlubny I 出版的《Fractional Differential Equations》阐述了分数阶微分方程的相关知识；目前，较新的分数阶微积分理论专著是 2010 年 Caponetto R，Dongola G，Fortuna L，Petras I 出版的《Fractional Order Systems：Modeling and Control Applications》和 Mainardi F 出版的《Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity：An Introduction to Mathematical Models》，阐述了分数阶微积分理论不同方面的具体应用。分数阶微积分理论的国际专题期刊有《Journal of Fractional Calculus》和《Journal of Fractional Calculus and Applied Analysis》。此外，还有一些专业期刊，如《Journal of Vibration and Control》《Fractals》《Chaos，Solitons，and Fractals》《Journal of Mathematical Analysis and Applications》。IEEE 会刊、物理评论、SIAM 等几十种期刊都对分数阶微积分的理论及相关应用进行过发表。分数阶微积分理论的国际研究组织主要有：国际自动化控制联盟组织 IFAC（International Federation of Automatic Control），葡萄牙工程研究院 ISEP，阿维罗电子通信工程师协会 IEETA 等。分数阶微积分理论的国际会议有：2004 年 7 月 19 日至 21 日，第一届“分数阶微分运算及其应用”会议（1st IFAC Fractional Differentiation and Its Applications）在法国波尔多（Bordeaux）开幕；2006 年 7 月 19 日至 21 日，第二届“分数阶微积分运算及其应用”会议（2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications）在葡萄牙的波尔图（Porto）开幕；2008 年 11 月 5 日至 7 日，第三届“分数阶微积分运算及其应用”会议（3rd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications）在土耳其首都安卡拉（Ankara）开幕；第四届“分数阶微积分运算及其应用”会议（4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications）在西班牙的巴达霍斯（Badajoz）开幕；第五届“分数阶微分运算及其应用”会议于 2012 年在中国河海大学和上海大学召开。

分数阶微积分理论作为基础研究理论具有悠久的发展历史，国内外众多的数学家和相关学者都对其发展做出了大量的不可磨灭的贡献。近年来，分数阶微积分在物理学、生物学等的研究和相关会议不断增多，使得分数阶微积分的应用逐步广泛起来。

1.2 分数阶微积分的应用

分数阶微积分理论虽然已经诞生了大约三百多年，但是在这段漫长的岁月中，分数阶微积分理论仅仅是数学家们纯数学理论的分析和推导，工程技术领域中的众多学者对其较为陌生。直到 Mandelbrot 首次提出了分形学说理论，将 Riemann-Liouville 分数阶微积分描述分形媒介中的布朗运动，分数阶微积分才被初次应用到工程技术领域。分数阶微积分作为一种分析复杂系统的数学描述方法，逐渐发展成为工程技术领域崭新且有效的建模工具。目前，分数阶微积分理论已经应用到物理学、控制系统、生物学、信息科学等学科，分数阶微积分理论涉及的应用领域相当广泛，本节内容仅仅包含了分数阶微积分理论具有代表性的应用领域。

（1）分数阶微积分理论在黏弹性动力学中的应用。

因为自然界许多物质具有黏弹性的特性，Newton 流体的本构方程不能完全描述很多自然流体的内在性质，如高分子溶液、血液、石油等。因此，学者尝试将分数阶微积分理论应用到黏弹性动力学中来描述自然物质的复杂特性。其中，比较有代表性的研究工作包括：Bagley，Friedrich 等[1-2] 尝试将经典微分方程中的整数阶时间导数直接替换为相应的分数阶微分算子，从而得到非牛顿流体的分数阶导数模型，该模型由于采用了分数阶微积分算子，使得能够更加准确地描述物质的自然特性；Tong 等[3] 提出了分数阶导数模型来描述广义 Oldroyd-B 流体的非定常 Couette 流，并利用 Laplace 变换、Weber 变换和广义 Mittag-Leffler 函数求取了该模型的精确结果；Engheta N[4-5] 将分数阶微积分理论应用于电磁场理论的研究中，提出了分数阶传播模型、分数阶叉积算子和旋度算子以及分数阶对偶原理。

（2）分数阶微积分理论在反常扩散与随机游走中的应用。

将分数阶微积分理论结合传统的偏微分方程来构建分数阶偏微分方程，即通过将传统偏微分方程中的时间（空间）导数的阶次用非整数替代而得到分数阶偏微分方程，该方程是分数阶扩散模型的理论基础。分数阶偏微分方程分为三种形式：①时间分数阶偏微分方程（时间导数是分数阶导数）；②空间分数阶偏微分方程（空间导数是分数阶导数）；③时间一空间分数阶偏微分方程（时间和空间导数均是分数阶）。在自然界中，反常扩散现象通常都不遵循布朗运动的 Gauss 统计规律以及 Fick 第二定律。在自然界中存在大量反常扩散现象，包括：粒子在非晶形半导体中的传输，无序介质中的核磁共振，多孔渗水系统，聚合体中的振动系统，水粒在聚合体系统中的运动，固体表面的集体滑动扩散，理查森湍流扩散，细菌的运动等。分数阶扩散方程是用来描述反常扩散过程的重要工具，上述自然现象都可以利用分数阶微分方程进行分析和描述。Schiessel 等[6] 提出了基于 Riemann-Liouville 分数阶微分定义的广义 Maxwell 流体模型，并用该

模型确定了松弛和延迟函数。刘发旺等[7] 采用以时间和距离尺度为变量的分数阶微分和散布系数为控制方程的散布条件，提出了一种新的 Fokker-Planck 方程的数值解法，探讨了依赖时间和距离的分数阶微分和分数阶幂函数之间的区别。

（3）分数阶微积分理论在控制系统中的应用。

分数阶微积分较整数阶微积分更能准确地描述复杂的实际系统。早在半个世纪前，分数阶微积分理论就已经尝试性地应用于控制领域，但是，当时由于缺少相关的理论基础和实验条件，直到 20 世纪末研究人员才取得了一些令人瞩目的研究成果，包括：Oustaloup 等[8] 阐述了 CRONE（非整数阶鲁棒控制器）控制的基本原理；Matignon 分析了分数阶控制系统的稳定性、可控性和可观性[9-10]；Podlubny[11] 创造性地提出了分数阶 PID 控制器的概念，系统介绍了 FOC 及 FDEs 的计算方法，将 Laplace 变换等数学工具应用到分数阶控制系统中，证明了线性分数阶微分方程解的存在性和唯一性，并且给出了基于 Green 函数和 M-L 函数表示的分数阶微分方程的解析解。

PID 控制是控制系统中应用最为广泛、技术最为成熟的控制方法，因其结构简单、控制精确、鲁棒性强等优点被广泛地应用于冶金、电力和机械制造等工业领域，并取得了巨大的实用效果。Pdolubny[12-13] 创造性地将分数阶微积分理论和 PID 控制器相结合，提出了分数阶 PID 控制器。分数阶 PID 的基本描述为 $PI^{\lambda}D^{\mu}$，即取 λ 阶积分 μ 阶微分，其中 λ，μ 为任意数。因为分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器较整数阶 PID 控制器增加了两个可调参数 λ 和 μ，通过设定这两个自由参数，$PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器能够更加灵活地控制相关对象，从而得到期望的控制效果。Podlubny 为分数阶控制理论的发展做出了杰出的贡献，他提出的 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器为分数阶控制的理论的发展奠定了基础，到目前为止，$PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器仍在分数阶控制研究的前沿具有特殊的影响。此后，国内外许多学者对 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器进行了深入的研究和相应的改进，包括：Masoud 等[14] 利用 PSO（Particle Swarm Optimization）算法解决了 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 的参数优化问题，从而将现代智能算法应用到分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制；薛定宇等[15-16] 通过 ITAE 和 ISE 最优指标讨论了 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 设计，包括参数设定、近似算法阶次自适应选择、鲁棒性的证明等；曾庆山等[17] 认为当分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器的相应参数在小范围内取值时，整个闭环系统的性能受参数变化影响较小，从而证明了分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器具有较强的鲁棒性，并说明了使用与系统特性相似的分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器能较好地控制被控制的对象。分数阶控制是现代控制理论发展的一个重要分支，整数阶控制理论不能较好地模拟控制复杂的自然系统，因此分数阶控制理论的相关研究显得尤为重要。目前，分数阶控制理论的研究还处于尝试应用阶段，仍有大量的基础工作需要完善，包括：分数阶非线性微分方程的数值计算方法和解的分析等基础理论研究，分数阶非线性系统的稳定性、可靠性和准确性分析问题，分数阶时变系统和分布参数系统的对应分析，分数阶系统时域和频域性能之间的内在联系等。由此，可以大胆预测，随着分数阶控制理论的完善和发展，分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器必将成为控制领域的重点和热点。

（4）分数阶微积分理论在信号处理领域中的应用。

分数阶 Fourier 变换是经典 Fourier 变换的延伸和推广，为分数阶微积分理论在信号中的处理打下了基础[18－20]。分数阶 Fourier 在众多领域都有重要的应用，特别是近年以来，分数阶 Fourier 变换在信号处理领域的广泛应用得到了国内外学者的高度关注[21－23]。分数阶 Fourier 变换可以简单地理解为时频平面的旋转，并与其他的时频分布具有密切的联系，所以分数阶 Fourier 变换是时频变换的广义形式[24－28]。分数阶 Fourier 变换应用于信号处理领域必须解决分数阶 Fourier 变换的离散化问题，包括采样定理和离散化计算。众所周知，采样定理是连续时间信号和离散时间信号之间的桥梁。在经典的基于 Fourier 变换的信号处理中，采样定理为连续时间信号的离散化表示以及离散 Fourier 变换（DFT）打下了理论基础。Xia[29] 提出了分数阶 Fourier 域带限信号的性质，同时证明了如果任意非零信号 x(t) 在某个分数阶 Fourier 域带限，那么该信号 x(t) 不会在其他分数阶 Fourier 域带限。由此，研究人员从不同应用方面将经典的 Fourier 域采样定理延伸到分数阶 Fourier 域。Zayed[30] 认为分数阶 Fourier 变换和经典 Fourier 变换具有相似的特性，这样也可以得出基于分数阶 Fourier 变换的采样定理和插值理论。同样，Candan[31] 通过更加直接的推导方法获得了基于分数阶 Fourier 变换，包括其他酉变换的采样定理和插值理论。Tseng 等[32] 对分数阶微积分数字滤波器进行了研究和分析，实现了分数阶微分滤波器的设计和改进，并提出了几种滤波器的设计方案。Carlson 等[33] 分析和研究了分数阶微积分运算电路，提出了多种可以实现分数阶微积分运算的分抗电路，实现了分数阶微积分运算电路设计。袁晓等[34] 讨论了分数阶微积分在信号处理领域的应用问题，阐述了分数阶微积分的定义，并重点探讨了分数阶微分在 Fourier 空间中的定义及相关性质，同时给出了理想分数阶数字微分滤波器和 FIR 分数阶数字微分滤波的基本性质和设计思路。Hassan，Ninness，Liu 等[35－37] 将分数阶微积分应用于信号奇异性提取和信号噪声检测与处理，首先利用分数阶微分 Riemann 级数对信号进行展开，从而获得奇异性按照升幂排列的一系列 Holder 指数，然后对该指数级数根据具体的情况设定不同的阈值进行有效截断，由此可以完成对信号的去噪操作。Farid[38] 研究发现了离散分数阶微分滤波器可以由一系列的整数阶微分滤波器通过一定的规则进行有效逼近，也就是说，对于信号任意阶次的分数阶微积分，可以通过一系列整数阶微积分线性组合来实现。

（5）分数阶微积分理论在混沌系统和神经网络中的应用。

近年来，分数阶动力学系统的混沌控制与同步逐渐成为当今学术界研究的重点和难点，由庞加莱－本迪生定理[39] 可知“自治连续整数阶系统产生混沌的最低阶次是 3 阶”，然而总阶次低于 3 阶的自治分数阶系统也能产生混沌效应，比如阶次为 2.7 的蔡氏电路[40] 能够产生混沌吸引子；Ahmad W 等[41] 研究得出分数阶“jerk”模型及分数阶电子混沌振荡器产生类似双涡卷混沌吸引子的最小阶次为 2.1。由文献[42] 可知，在经典的 Chua，Chen，Liu 等系统中，当系统的微分阶次为非整数时，原来的系统仍然

保持混沌状态，这样由分数阶微积分构建的混沌系统更能够反映自然界中的物理规律。谢德光等[43] 利用分数阶 Fourier 方法提取目标高分辨距离图像的时频特征，根据类可分性的方面来获取多种最优变换，利用主分量分析方法对距离图像的分数阶 Fourier 进行特征降维，并使用神经网络进行分类识别。蒲亦非、陈庆利等[44-45] 为了使仿生神经信号能比较正确地模仿实际生物神经冲动的波形特征，采用了分数阶微积分的 Riemann-Liouville 定义和三角波函数构造出了分数阶神经型脉冲振荡器，并利用该振荡器仿真了各种人体活动的生物神经信号。实验结果表明，分数阶神经型脉冲振荡器是一种可根据实际生物神经特性调整参数的分数维神经振荡器，其输出波形为非方波。此外，该模型能够很好地模型人类生理功能信号，从而为未来神经功能修复提供了一种技术支撑。

（6）分数阶微积分理论在图像处理中的应用。

分数阶微积分理论在图像底层处理中的应用是最近几年才引起学者关注的，到目前为止，已经取得了初步研究成果，主要包括图像增强、图像去噪、图像边缘提取、图像分割和图像奇异性检测等。图像处理中的整数阶微分算子，包括梯度算子和 Laplace 算子以及墨西哥帽算子等很多经典的图像处理算子都可以近似看作是 Rodieck 等[46] 提出的 DOG 感受野模型在理论上的仿真实现，分数阶微分算子则可以认为是 DOG 感受野模型的推广和延伸，基于分数阶微分理论的感受野模型较整数阶微积分理论更符合人类视觉特性。蒲亦非等[47-55] 认为选择适当阶次的分数阶微分算子在增强图像过程中可以大幅提升图像边缘和纹理细节，非线性地保留图像平滑区域的纹理信息。此外，汪成亮等[56] 提出了基于分数阶微积分基本定义的分数阶微分掩模算子，实现了分数阶微积分的快速、高效数值计算。杨柱中等[57-59] 根据分数阶微分算子具有“弱导数”性质的特点，利用分数阶梯度算子对含弱噪声的图像进行边缘检测，该方法能够有效地解决整数阶梯度算子对噪声敏感的问题，因此可以避开噪声的影响而准确地定位噪声图像的边缘。Mathieu B 等[60] 提出了分数阶微分的边缘检测算子，即分数阶鲁棒轮廓，法语简称 CRONE（Contour Robuste d’Ordre Non Entier）边缘检测器，说明了该检测器的分数阶微分阶次在 $1<v<2$ 时，能够有选择地检测出边缘；而在分数阶微分阶次在 $-1<v<1$ 时，该检测算子能够在边缘提取的过程中克服噪声的影响。在此基础上，李远禄等[61] 提出了基于分数阶差分的滤波器并将其应用到边缘检测，该模型将数据的平滑和差分有机结合，利用分数阶微积分基本理论，设计了可以通过调节微分阶次的差分滤波器，该滤波器可以解决传统算子边缘检测出现的边缘漂移问题，并且可以抑制部分噪声。汪凯宇、刘红毅等[62-63] 利用分数阶微积分具有的记忆特性，分别将分数阶样条小波应用到图像纹理的奇异性检查和图像融合中，较整数阶微积分取得了更好的仿真效果。Liu Jun 等[64] 提出了分数阶奇异值分解的人脸识别方法，该方法可以有效地缓解面部的变化，并且在脸部出现剧烈变化时，可以较传统的分类方法提高其分类的性能，为高层图像处理打下坚实的基础。左凯等[65] 将卡尔曼滤波和分数阶微积分理论相结

合，提出了二维分数阶卡尔曼滤波器，并成功应用到图像处理。白健等[66] 以 ROF 去噪模型为基础，将分数阶微积分理论和偏微分方程相结合，提出了基于分数阶偏微分方程的图像去噪模型，该方法可以解决传统低阶次整数阶偏微分方程去噪模型容易产生“阶梯效应”以及高阶次整数阶偏微分方程去噪模型去噪效果不佳的问题。此后，张军等[67-71] 将负指数 Sobolev 空间的多尺度图像建模与基于分数阶微积分的图像建模有效结合，提出了统一的基于分数阶多尺度变分图像去噪模型，并初步设计了该模型涉及参数的自适应选择方法。

综上所述，相信随着当今研究学科交叉和融合速度的不断加快，分数阶微积分理论必将有更加广阔的发展前景。

1.3　本书的主要内容

本书主要对分数阶微积分在数字图像的增强和去噪中的应用进行了比较系统的研究，归纳如下：

（1）系统地论述了连续子波变换数值实现中尺度采样间隔确定的基本理论。按照信号的最高数字频率等于或小于 π 的两种情况，论证了均匀点格采样时连续子波变换数值实现中 Morlet 母波以及偶对称或奇对称的各阶高斯函数导数解析母波的尺度采样间隔的最佳取值，并且特别分析了著名的墨西哥帽母波的尺度采样间隔的最佳取值；讨论了奇对称母波数值实现中同时所需的时间平移量；研究了偶对称或奇对称的各阶高斯函数导数解析母波的相应数字滤波器的波动情况，并对其波动性进行了研究；对连续子波变换数值实现中均匀点格采样的研究结论推广到二进点格采样和二进抽取采样两种情况。

（2）系统地论述了连续子波变换数值实现中信号时间和扫描时间之间的几何关系、连续子波变换数值实现中起始扫描时间的最佳取值范围。

（3）推导并研究了信号分数阶微积分的 5 种数值算法实现算法。首先推导并比较了信号分数阶微分的幂级数数值算法、Fourier 级数数值算法，并将这两种算法与经典的基于 Grümwald-Letnikov 定义的数值算法相比较；然后，推导出具有较高精度和计算速度的基于子波变换的分数阶微积分快速数值算法；最后，以计算精度为代价进一步提高计算速度，推导出基于子波变换的快速工程算法。

（4）推导了 3 种 1/2 分数阶演算的模拟分抗电路；分析和比较了我们提出的 3 种 1/2 阶模拟分抗电路与国际上经典的 1/2 阶树型模拟分抗电路之间的优劣，论述了网格型 1/2 阶递归模拟分抗电路在电路结构上是这 4 种 1/2 阶分抗电路中最优的一种；在此基础上，论述了一种实现任意分数阶演算的递归模拟分抗电路模型，并以任意分数阶递归网格型模拟分抗电路模型为例进行了分析。在分析 1/2 阶网格型模拟分抗电路自相似特点的基础上，提出主值分抗电路的概念；论述了 1/2 阶网格型主值分抗电路与 T 型、