

◆ “十三五” 高职高专规划教材 ◆

经济数学

JINGJI
SHUXUE

主编◎余健伟 钟 平



电子科技大学出版社

◆ “十三五” 高职高专规划教材 ◆

经济数学

JINGJI SHUXUE

主编◎余健伟 钟 平



电子科技大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

经济数学 / 余健伟, 钟平主编. —成都: 电子科技大学出版社, 2016.8

ISBN 978-7-5647-2685-0

I. ①经… II. ①余… ②钟… III. ①经济数学
IV. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 175775 号

经济数学

主 编 余健伟 钟 平

出 版: 电子科技大学出版社 (成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦 邮编: 610051)

策划编辑: 谢晓辉

责任编辑: 马 瑶 李 倩

主 页: www.uestcp.com.cn

电子邮箱: uestcp@uestcp.com.cn

发 行: 新华书店经销

印 刷: 金华市三彩印业有限公司

成品尺寸: 185mm×260mm 印张 16.75 字数 398 千字

版 次: 2016 年 8 月第一版

印 次: 2016 年 8 月第一次印刷

书 号: ISBN 978-7-5647-2685-0

定 价: 35.00 元

■ 版权所有 侵权必究 ■

◆ 本社发行部电话: 028-83202463; 本社邮购电话: 028-83201495。

◆ 本书如有缺页、破损、装订错误, 请寄回印刷厂调换。

经济数学编委会

主 编	余健伟	钟 平	
副主编	杨玉红	潘红艳	
主 审	李代绪		
编 委	冯秋芬	游美玲	沈毓赞
	袁文光	刘 敏	

前 言

本教材是根据经济、商贸、财会、管理类各专业学习与工作的专业特点，为他们解决实际问题提供数学基础、数学方法而开发编写的。它强调数学的应用性、工具性，在学数学的同时，更侧重于用数学。

本教材所学习的内容，涉及高等数学的一些基础知识，生产生活中特别是经济管理中常见的一些数学问题，如微积分、矩阵数表、线性规划问题等。其思想和方法广泛应用于生产和生活的各个领域，对学生的素质培养、知识迁移、专业学习和职业发展有着极其重要的作用。

随着科学技术的发展，时代的进步，教学手段的日益更新，高等数学的学习也进入了电脑时代。本教材将从一个全新的角度，展示一种更高效、实用的数学学习的方法。本教材在介绍高等数学和经济数学的一些基础知识和基本方法的同时，更借助于数学软件“MATLAB”和“几何画板”学习数学，将学生从数学的繁复演算和推导中解放出来，充分体验数学的博大精深、优雅精妙的内在之美。

本教材初稿作为长沙商贸旅游职业技术学院基础课部教改课程的校本教材，在近五年使用中，数易其稿，日趋完善。本教材作者是来自教学一线的教师，对高职高专学生的数学学习基础和学习能力有着充分的认识与了解，作者丰富的一线教学经验使本书具有实用、高效、精简的高职高专特色。全书既注重经济管理类高等数学基础知识的完备性、逻辑性，又兼顾高职高专学生接受能力、专业要求及学业上的可持续发展；强调数学基础知识、基础技能的教学，淡化数学技巧；强调数学的应用性、实践性，淡化数学的理论性。与时代的发展同步，将先进的计算机技术融入数学学习中，将数学实验的内容不着痕迹地植入教材，以此实现数学课程教学实用、够用、必需的原则，达到简化数学计算、培养应用能力、让学生学好数学更要用好数学的目的。

本教材由长沙商贸旅游职业技术学院基础课部教师集体编写，余健伟、钟平担任主编并统稿，杨玉红、潘红艳担任副主编，李代绪担任主审工作。具体编写分工如下：第1章由余健伟编写，第2章由钟平和袁文光编写，第3章由潘红艳和李代绪编写，第4章由杨玉红编写，第5章由游美玲和刘敏编写，第6章由冯秋芬编写，第7章由沈毓赟编写，部分习题解答的校正工作和附录资料的收集整理工作由袁文光和刘敏负责。本教材可作为高职高专财会类、经济类、商贸类及旅游类专业学生高等数学教学用书或参考补充教材。使用本教材建议教学时数为100~120课时。

由于编者水平有限，书中不足之处在所难免，衷心欢迎广大教师和同学们批评指正。

编 者

2016年4月

目 录

第 1 章 基础知识	1
1.1 初等函数	1
1.1.1 基本初等函数	1
1.1.2 初等函数	1
1.1.3 分段函数	2
习题 1.1	3
1.2 常用经济函数	3
1.2.1 需求函数与供给函数	3
1.2.2 总成本函数	5
1.2.3 收入函数与利润函数	5
习题 1.2	6
1.3 MATLAB 的计算	6
1.3.1 MATLAB 简介	6
1.3.2 MATLAB 运算符号和常用函数	7
习题 1.3	9
1.4 用几何画板作函数的图像	9
1.4.1 几何画板简介	9
1.4.2 用几何画板作函数的图像	9
习题 1.4	11
复习题一	11
第 2 章 微分学及其应用	12
2.1 函数的极限	12
2.1.1 数列的极限	12
2.1.2 函数的极限	13
2.1.3 极限的运算	17
2.1.4 无穷小和无穷大	20
2.1.5 两个重要极限	23
习题 2.1	27
2.2 函数的连续性	28
2.2.1 函数在某一点的连续	28
2.2.2 连续函数及其运算	30
2.2.3 函数的间断点	31

2.2.4 闭区间上连续函数的性质	33
2.2.5 连续函数应用举例	35
习题 2.2	36
2.3 导数的概念和运算	37
2.3.1 导数的概念	37
2.3.2 导数的运算	41
习题 2.3	46
2.4 微分的概念与运算	47
2.4.1 微分	47
习题 2.4	52
2.5 导数的应用	52
2.5.1 洛必达法则	52
2.5.2 函数的单调性与曲线的凹凸性	55
2.5.3 函数的极值与最值	59
习题 2.5	63
2.6 导数在经济中的应用	63
2.6.1 需求价格弹性	64
2.6.2 边际与边际分析	65
习题 2.6	66
复习题二	67
第 3 章 积分学及其应用	70
3.1 不定积分	70
3.1.1 不定积分的概念	70
3.1.2 求不定积分的常用方法	73
3.1.3 用 MATLAB 求不定积分	79
3.1.4 不定积分的应用	79
习题 3.1	81
3.2 定积分	82
3.2.1 定积分的概念	82
3.2.2 定积分的计算	87
3.2.3 用 MATLAB 求定积分	89
习题 3.2	90
3.3 定积分的应用	91
3.3.1 用定积分求平面图形的面积	91
3.3.2 定积分在经济数学中的应用举例	93
习题 3.3	94
复习题三	95

第 4 章 微分方程	97
4.1 微分方程的概念	97
习题 4.1	98
4.2 微分方程的求解	98
4.2.1 可分离变量的微分方程	98
4.2.2 一阶线性微分方程	100
4.2.3 用 MATLAB 解微分方程	103
习题 4.2	104
4.3 微分方程的应用	104
习题 4.3	107
复习题四	107
第 5 章 多元函数微分学及其应用	109
5.1 多元函数的极限与连续	109
5.1.1 多元函数的概念	109
5.1.2 二元函数的极限	112
5.1.3 二元函数的连续性	114
习题 5.1	115
5.2 偏导数与全微分	115
5.2.1 偏导数的定义	115
5.2.2 偏导数的计算	116
5.2.3 高阶偏导数	117
5.2.4 全微分	118
5.2.5 全微分在近似计算中的应用	120
习题 5.2	120
5.3 多元函数的极值及其应用	121
5.3.1 二元函数的极值	121
5.3.2 二元函数的最值	122
5.3.3 条件极值及拉格朗日乘数法	124
习题 5.3	125
复习题五	126
第 6 章 线性代数	128
6.1 行列式及其运算	128
6.1.1 行列式的定义	128
6.1.2 行列式的性质	132
6.1.3 行列式的计算	134
6.1.4 克莱姆 (Cramer) 法则	137

习题 6.1	138
6.2 矩阵及其运算	139
6.2.1 矩阵	140
6.2.2 矩阵的运算	142
6.2.3 逆矩阵	149
6.2.4 矩阵的初等变换	152
习题 6.2	156
6.3 线性方程组	158
6.3.1 高斯消元法	158
6.3.2 矩阵的秩	161
6.3.3 线性方程组解的讨论	162
习题 6.3	164
6.4 线性规划	165
6.4.1 线性规划问题的数学模型	165
6.4.2 线性规划问题的数学模型的一般形式	168
6.4.3 两个变量线性规划问题的图解法	169
6.4.4 用 MATLAB 解线性规划问题	172
习题 6.4	174
复习题六	176
第 7 章 概率统计基础	178
7.1 随机事件	178
7.1.1 随机现象	178
7.1.2 样本空间与随机事件	178
7.1.3 事件的关系与运算	179
7.1.4 事件的运算法则	181
习题 7.1	182
7.2 随机事件的概率	182
7.2.1 概率的统计定义	182
7.2.2 等可能概型 (古典概型)	184
习题 7.2	185
7.3 条件概率	185
7.3.1 条件概率	185
7.3.2 乘法公式	187
7.3.3 全概率公式	187
习题 7.3	189
7.4 事件的独立性	189
7.4.1 事件的独立性	189

7.4.2 伯努利概型	190
习题 7.4	191
7.5 随机变量及其分布函数	191
7.5.1 随机变量	191
7.5.2 随机变量的分布函数	192
习题 7.5	194
7.6 离散型随机变量及其概率分布	195
7.6.1 离散型随机变量及其分布律	195
7.6.2 几种重要的离散型随机变量及其分布律	197
习题 7.6	199
7.7 连续型随机变量及其概率分布	200
7.7.1 连续型随机变量及其概率密度	200
7.7.2 几种常见的连续型随机变量的分布	202
习题 7.7	207
7.8 数学期望	208
7.8.1 离散型随机变量的数学期望	208
7.8.2 连续型随机变量的数学期望	208
7.8.3 随机变量函数的数学期望	209
7.8.4 数学期望的性质	211
习题 7.8	211
7.9 方差	212
7.9.1 方差的定义	212
7.9.2 方差的性质	214
习题 7.9	215
7.10 一元线性回归分析	216
7.10.1 一元线性回归模型	216
7.10.2 参数 a, b 的估计	217
习题 7.10	219
复习题七	219
附录 1 常用数学公式	221
一、代数	221
二、三角公式	223
三、初等几何	224
四、导数和微分	225
五、不定积分	227
六、定积分	228

附录 2 基本初等函数的图像及性质	229
附录 3 常用 MATLAB 命令	232
一、管理命令和函数	232
二、操作符和特殊字符	232
三、三角函数	233
四、其他函数	233
五、矩阵	234
六、特殊变量和常数	235
七、时间和日期	235
八、X-Y 图形	235
九、MATLAB 编程语言	236
附录 4 标准正态分布表	237
参考答案	238
参考文献	256

第1章 基础知识

初等函数是在初等数学中所学习的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的基础上建立起来的概念,是今后我们学习微积分时的主要研究对象.本章将先建立初等函数的概念,介绍几个经济分析中的常见函数,然后学习数学软件“MATLAB”和“几何画板”的基本用法,为后面的学习提供基础.

1.1 初等函数

1.1.1 基本初等函数

1. 函数的定义

定义 1.1.1 设有两个变量 x 和 y , D 是非空数集,若对每一个 $x \in D$, 按照对应规则 f , 都有一个确定的实数 y 与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 称这个规则 f 为定义在 D 上的函数, 记作

$$y = f(x) \quad x \in D$$

其中, 称 x 为自变量, y 为因变量; D 为函数的定义域.

一般地, 我们把函数的定义域、值域、自变量与因变量的对应规则这三者称为构成函数的三要素.

2. 基本初等函数

通常, 我们把在初等数学中学习过的下列五种类型的函数, 称为基本初等函数.

幂函数: $y = x^\mu$ ($\mu \in \mathbf{R}$ 且 $\mu \neq 0$);

指数函数: $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$);

对数函数: $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$, 特别地, 当 $a = e$ 时, 记为 $y = \ln x$);

三角函数: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \csc x$;

反三角函数: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

例如, $y = \sqrt{x}$ 、 $y = \frac{1}{x}$ 、 $y = \log_2 x$ 等都是基本初等函数.

我们今后研究的函数, 都是由基本初等函数或常数构成的, 一些常见的基本初等函数的定义域、值域、图像及性质可以在本书的附录 2 中查阅.

1.1.2 初等函数

1. 复合函数

定义 1.1.2 如果 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, u 是 x 的函数 $u = g(x)$, D 是表示使得函数

$y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 都有定义的 x 的值的集合, 当变量 x 任取 D 中的一个数时, 都有唯一确定的 y 与之对应, 则称 y 是 x 的**复合函数**, 记作 $y=f[g(x)]$, 其中 x 称为自变量, u 称为**中间变量**.

注意 函数 $u=g(x)$ 的值域应在函数 $y=f(u)$ 的定义域之内, 否则不能构成复合函数.

例如, 下列函数可以构成复合函数: 由 $y=\sin u$, $u=2x+1$, 复合得函数 $y=\sin(2x+1)$; 把函数 $y=\sqrt{u}$, $u=-x^2-1$ 复合后将得到: $y=\sqrt{-x^2-1}$, 它的定义域为空集, 不可以构成复合函数.

为了研究的方便, 我们常常把一个比较复杂的函数分解成几个简单函数, 把它看成由若干个基本初等函数或简单函数复合而成. 要熟练地分解复合函数, 必须把基本初等函数的形式记住.

例 1.1.1 指出下列函数的复合过程:

- (1) $y=\sin^2 x$; (2) $y=\sin x^2$;
(3) $y=\sqrt{3^x-2}$; (4) $y=\ln \arcsin^3(x-1)$.

解 (1) 函数 $y=\sin^2 x=(\sin x)^2$ 由函数 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成.

(2) 函数 $y=\sin(x^2)$ 由函数 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 复合而成.

(3) 函数 $y=\sqrt{3^x-2}$ 由函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=3^x-2$ 复合而成.

(4) 函数 $y=\ln \arcsin^3(x-1)$ 由函数 $y=\ln u$, $u=v^3$ 和 $v=\arcsin w$, $w=x-1$ 复合而成.

从上例中的第 (1) 和 (2) 中可以看出, 同样的两个基本初等函数, 由于复合的顺序不同, 所得到的复合函数也不同.

2. 初等函数

定义 1.1.3 由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算或有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数, 称为**初等函数**.

例如, $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sin^2 x$, $y=\sqrt{\cot \frac{x}{2}}$ 等都是初等函数.

1.1.3 分段函数

如果函数不能用一个解析式表示, 在定义域的不同范围有不同的解析式, 那么, 这样的函数称为**分段函数**. 例如, **符号函数** (图 1.1.1)

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

一般情况下, 分段函数不一定是初等函数, 有些特殊分段函数, 可以用一个式子表示, 因而也是初等函数. 例如, **绝对值函数** (图 1.1.2)

$$y=\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

这个函数可以写成 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ ，它由两个幂函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2$ 复合而成，所以它是一个复合函数，也就是一个初等函数。

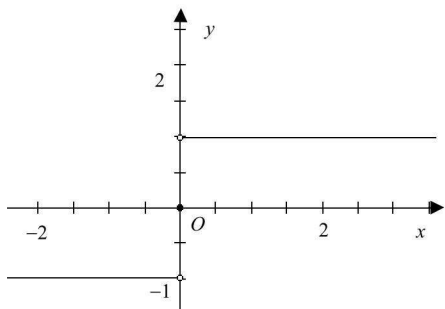


图 1.1.1

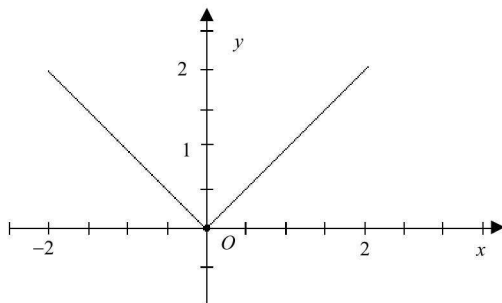


图 1.1.2

习 题 1.1

1. 写出下列函数复合后的结果：

(1) $y = \arctan u$, $u = 2x + 1$;

(2) $y = \sqrt{u}$, $u = \sin v$, $v = x^2$;

(3) $y = u^3$, $u = \ln(x^2 + 1)$.

2. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y = \cot 2x$;

(2) $y = \ln \tan x$;

(3) $y = \cos^2(3x)$.

3. 若分段函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq -2 \\ -x + 3, & -2 < x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$.

(1) 作出这个函数的图像；

(2) 求 $f(-3)$, $f(0)$, $f(e)$ 的值.

1.2 常用经济函数

用数学方法来分析经济变量间的关系，常常出现在经济分析中，这就要求我们首先找出各经济变量间的函数关系，建立经济数学的模型。本节将介绍几个常用的经济函数。

1.2.1 需求函数与供给函数

1. 需求函数、价格函数

经济活动中，对商品的需求量影响最大的莫过于价格了，为简化问题的分析，我们

常常将问题理想化,只考虑价格 P 对商品的需求量 Q 的影响,而忽略其他有可能影响商品的需求量 Q 的因素,如地域、气候、交通、消费水平等.

通常,将商品的需求量 Q 与价格 P 之间的函数关系称为需求函数,记为

$$Q = f(P).$$

按市场的一般规律,需求量随价格的增加而减少,是一个减函数.

企业管理和经济学中常见的需求函数类型有

线性需求函数: $Q = b - aP$ ($a, b > 0$).

指数需求函数: $Q = Ae^{-bP}$ ($A, b > 0$).

需求函数的反函数称之为价格函数,记为

$$P = f^{-1}(Q).$$

一般情况下,价格函数也是一个减函数,当需求(购买)量增加时,价格下降.

2. 供给函数

影响市场中商品供给量的因素有很多,如该商品的原料供应、生产成本、生产能力等等,在市场经济规律的作用下,影响商品供给量的重要因素是商品价格,若记商品的供给量为 Q , P 是商品的价格,则商品的供给量是价格的函数,称其为供给函数,记为

$$Q = Q(P).$$

一般地,与需求函数的情况相反,商品的供给量随商品的价格上涨而增加,供给函数是一个增函数.

需求函数与供给函数反映了市场的变化规律,把某一商品的需求函数与供给函数的图像画在同一坐标系中,它们必然相交于一点 $M(P_0, Q_0)$,如图 1.2.1 所示,这个点是该商品的市场需求与供给达到平衡时的状态量,称为平衡点, P_0 称为均衡价格, Q_0 称为均衡商品量.

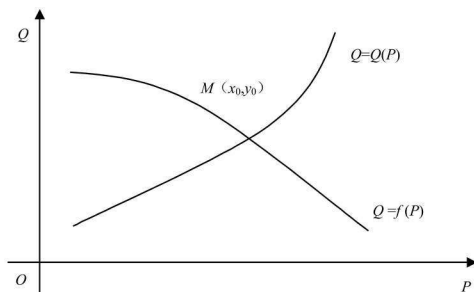


图 1.2.1

例 1.2.1 已知某商品的供给函数是 $Q = 4P - 5$, 需求函数是 $Q = -6P + 45$, 试求该商品在市场平衡状态下的均衡价格与均衡商品量.

解 解方程组

$$\begin{cases} Q = 4P - 5 \\ Q = -6P + 45 \end{cases}$$

得市场均衡价格 $P=5$, 均衡商品量 $Q=15$.

1.2.2 总成本函数

成本是生产者用于生产商品的费用. 在经济活动中, 生产某一商品的总成本 C 包括两部分, 其一是由场地费、折旧费、人员工资及其他固定费用所组成的部分, 称为**固定成本**, 常用 C_0 表示; 其二是随生产商品数量变化而产生费用的部分, 称为**可变成本**, 又称**变动成本**, 常用 C_1 表示.

生产 q 个商品所产生的可变成本 C_1 与固定成本 C_0 之和, 称为**总成本函数**, 记为 $C = C(q)$, 即

$$C = C(q) = C_0 + C_1 = C_0 + C_1(q).$$

生产 q 个商品的**平均成本**用 $\bar{C}$ 表示, 平均成本函数为

$$\bar{C} = \bar{C}(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

一般情况下, 总成本函数是一个单调递增函数, 平均成本函数是一个单调递减函数. 随着生产商品数量的增加, 总成本越来越大, 平均成本越来越小.

1.2.3 收入函数与利润函数

1. 收入函数

生产者出售一定数量的产品所得收入 R 是销售量 q 的函数, 称为**收入函数**, 记为 $R = R(q)$. 一般地, 若所售产品的销售单价为 p , 销售量为 q , 则有

$$R = R(q) = pq.$$

显然, 收入 R 随着销售量 q 的增加而增加, 收入函数是一个单调递增的函数.

2. 利润函数

生产 q 件产品的利润 L 是在收入 R 中扣除总成本 C 后的部分, 它是产品数量 q 的函数, 称为**利润函数**, 记为 $L = L(q)$, 即

$$L = L(q) = R(q) - C(q).$$

例 1.2.2 已知生产某种商品的固定成本为 2400 元, 每生产一个商品, 成本增加 20 元, 每个产品的销售单价为 35 元. 试求:

- (1) 该商品的总成本函数, 并计算生产 200 个该商品时的总成本和平均成本;
- (2) 该商品的收入函数, 并计算销售 200 个该商品时所得的收入;
- (3) 该商品的利润函数, 并计算销售 200 个该商品时所得的利润;
- (4) 销售该商品所得利润为 0 时, 销售量为多少?

解 (1) 生产 q 个该商品时, 其总成本函数为

$$C = C(q) = C_0 + C_1 = 2400 + 20q \quad (\text{元})$$

生产 200 个该商品时的总成本和平均成本分别为

$$C(200) = 2400 + 20 \times 200 = 6400 \quad (\text{元})$$

$$\bar{C}(200) = \frac{C(q)}{q} = \frac{6400}{200} = 32 \text{ (元/个)}$$

(2) 该商品的收入函数及销售 200 个该商品时所得的收入分别为

$$R = R(q) = 35q \text{ (元)}$$

$$R(200) = 35 \times 200 = 7000 \text{ (元)}$$

(3) 该商品的利润函数及销售 200 个该商品时所得的利润分别为

$$L = L(q) = R(q) - C(q) = 35q - (2400 + 20q) = 15q - 2400 \text{ (元)}$$

$$L(200) = R(200) - C(200) = 7000 - 6400 = 600 \text{ (元)}$$

(4) 若销售该商品所得利润为 0, 则有

$$L(q) = 15q - 2400 = 0$$

$$q = 160 \text{ (个)}$$

这就是说, 当销售该商品 160 个时, 企业可以保持收支平衡, 不盈不亏.

一般地, 当利润函数 $L(q) = 0$ 时, 此时的生产或销售活动, 称为无盈亏生产或销售, 此时的生产量或销售量, 通常称为无盈亏点, 或称保本点.

习 题 1.2

1. 六一儿童节前, 某儿童商店以进价 80 元/件购进一批童装, 根据以往资料测算出该童装的需求函数为 $Q = 360 - 2P$, 其中 Q 为销售量 (单位: 件), P 为单价 (单位: 元/件), 试建立该批童装的收入函数和利润函数.

2. 生产某产品的固定成本为 620 元, 生产每件产品还需要另外耗费各种材料及工时折合约为 12 元, 产品的出厂价是每件 16 元.

(1) 求成本函数;

(2) 求利润函数;

(3) 产量至少达到多少时, 企业才能保证不亏本?

1.3 MATLAB 的计算

1.3.1 MATLAB 简介

MATLAB 是 “Matrix Laboratory” 的缩写, 意为 “矩阵实验室”, 是目前很流行的科学计算软件.

信息技术、计算机技术发展到今天, 科学计算在各个领域得到了广泛的应用. 美国 MathWork 软件公司推出的 MATLAB 软件, 为人们提供了一个方便的数值计算平台.

MATLAB 是一个交互式的系统, 系统提供了大量的矩阵及其他运算函数, 可以方便地进行一些很复杂的计算, 而且运算效率极高. MATLAB 命令和数学中的符号、公式非常接近, 可读性强, 容易掌握, 还可利用它所提供的编程语言进行编程, 完成特定的工