高等职业教育“十二五”规划教材

实用高等数学

SHIYONG GAODENG SHUXUE

李春生 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等职业教育“十二五”规划教材

实用高等数学

主　编　李春生

副主编　刘毛生　熊　云　李　彪

参　编　丁　京　吴根绍　李遂清　李平萍

王娜娜　刘　乐　柳　琴　吴启波

黄　保　易飞程　张曙亮　王晓影

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是在充分研究当前我国高职高专大众发展趋势下的教育现状后，从高职高专教育人才培养目标出发，以教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》为指导，认真分析、总结、吸收全国高职高专院校经济数学课程教学改革经验的基础上，优选了教学内容，适度降低了难度，精心安排了例题、习题，使理论体系具有科学性，系统完整、严密.

本书的特点是：遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，着重数学方法的介绍、淡化理论的推导和证明，取消繁杂的计算；注意内容与实用相结合，更注重实用性，以培养学生掌握基本运算和实际应用的能力. 特别适合高职高专学生的知识结构层次，便于学生理解和接受，特别是每章后的小结，在帮助学生理清本章知识结构、重点难点乃至学习技巧等方面，均起到画龙点睛的作用.

本书可作为高职院校的医药化工类专业、机电类专业、工程类专业、管理类专业、经济类专业、计算机类专业的教材，也可作为大专或成人教育学院、继续教育学院的学生及数学爱好者的学习用书.

图书在版编目(CIP)数据

实用高等数学 / 李春生主编. —北京：北京理工大学出版社，2016.6
ISBN 978-7-5682-2459-8

Ⅰ.①实…　Ⅱ.①李…　Ⅲ.①高等数学-高等职业教育-教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 135444 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京富达印务有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 14.75　　　责任编辑 / 江　立
字　　数 / 344 千字　　　文案编辑 / 江　立
版　　次 / 2016 年 6 月第 1 版　2016 年 6 月第 1 次印刷　　　责任校对 / 周瑞红
定　　价 / 32.00 元　　　责任印制 / 王美丽

前　言

“高等数学”是高等职业院校的重要基础课程,对培养学生的思维能力、创新精神、科学态度及分析问题的能力都起着重要的作用.为提高应用数学课的教学质量,全面提高学生解决实际问题的能力,编者本着打好基础,够用为度,服务专业,学以致用的原则,在认真总结多年教学经验的基础上,参考中外多种同类教材,编写了这本《实用高等数学》.

本书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、微分方程、级数、多元函数微积分,共9章.在编写过程中,力求做到以下几点.

(1)在内容上,以微积分理论为核心内容,以极限理论作为重要的基础工具.注意学习的“可持续发展”,对级数理论和微分方程等延伸理论加以介绍,为学习专业课打下基础,同时也为学生进一步深造提供必要的知识准备.

(2)在结构上,在保证知识科学性、系统性与严密性的前提下,对文科、理科学生进行兼顾,对基本概念和基本理论偏重描述,力求使用通俗易懂的语言.

(3)为了使学生能巩固所学的知识,书中每章、每节均配有一定数量难易适中的习题,并附有参考答案.

本书由李春生主编,刘毛生、熊云、李彪任副主编,丁京、吴根绍、李遂清、李平萍、王娜娜、刘乐、柳琴、吴启波、黄保、易飞程、张曙亮、王晓影参加编写.

由于编写时间仓促,加之水平有限,书中如有不足之处,敬请广大读者批评指正.

编　者

目　　录

第 1 章　函　　数

在客观世界中，有许多量不是孤立存在的，而是彼此关联、相互依赖的. 本章就是要研究和揭示客观世界中存在着的量与量之间的一种关系——函数关系. 而函数是微积分学研究的对象. 在中学里，我们已经学习过函数概念，在这里我们要从全新的视角来对它进行描述并重新分类. 本章先简要介绍函数的一般定义，然后着重讨论函数的特性、基本初等函数、复合函数、初等函数及几类常见的经济函数等.

1.1　函数的概念

1.1.1　函数的定义

在考察某种自然现象或社会现象时，往往会遇到几个变量，这些变量并不是孤立地变化的，而是存在着某种相互依赖的关系，为了说明这种关系，先看一个例子.

【例 1-1】　生产某种产品的固定成本为 7 000 元，每生产一件产品，成本增加 100 元，那么该种产品的总成本 y 与产量 x 的关系可用下面的式子给出

$$y=100x+7\ 000.$$

当产量 x 取任何一个合理的值时，成本 y 有确定的值和它对应，我们说成本 y 是产量 x 的函数.

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值，变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$. 这里 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**或函数，f 是**函数符号**，它表示 y 与 x 的对应规则，有时函数符号也可以用其他字母表示，如：$y=g(x)$，$y=\varphi(x)$等. D **为定义域**.

函数的**几何意义**：设函数 $y=f(x)$，定义域是 D，对 $\forall x\in D$，y 按照一定法则，总有确定的数值与之对应得到 $y=f(x)$，在 xOy 面上得点(x,y). 当 x 遍取 D 中一切实数，就得到点集 P，即

$$P=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}.$$

1.1.2　函数的定义域

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定；另一种是对抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域，通常有下面几种情况：

(1)分式的分母不能为零；

(2)偶次根式，被开方数必须为非负；

(3)对数式中的真数要大于零；

(4)三角函数、反三角函数要考虑各自的定义域.

在求解函数定义域的过程中，还要使用本章所介绍的一些数学基本知识，且要求解不等式或不等式组.

【例 1-2】 求下列函数的定义域：

(1)$f(x)=\dfrac{3}{5x^2+2x}$；　　(2)$f(x)=\sqrt{9-x^2}$；

(3)$f(x)=\lg(4x-3)$；　　(4)$f(x)=\arcsin(2x-1)$.

解

(1)在分式$\dfrac{3}{5x^2+2x}$中，分母不能为零，所以 $5x^2+2x\neq0$，解得 $x\neq\dfrac{-2}{5}$且 $x\neq0$，即定义域为

$$\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right)\cup\left(-\frac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty).$$

(2)在偶次根式中，被开方式必须大于等于零，所以有 $9-x^2\geqslant0$，解得 $-3\leqslant x\leqslant3$，即定义域为 $[-3,3]$.

(3)在对数式中，真数必须大于零，所以有 $4x-3>0$，解得其定义域$\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

(4)反正弦的式子的绝对值必须小于等于 1，所以有 $-1\leqslant2x-1\leqslant1$，解得 $0\leqslant x\leqslant1$，即定义域$[0,1]$.

1.1.3　函数值

当自变量 x 在定义域内取定某确定值 x_0 时，因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$求出的对应值 y_0 叫做当 $x=x_0$ 时的**函数值**，记作$y\big|_{x=x_0}$或 $f(x_0)$.

函数值的全体 $Z=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$为**函数值域**.

【例 1-3】 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求：$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(-x)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f(x+1)$，$f(x^3)$.

解

$$f(0)=\frac{1-0}{1+0}=1,f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1},f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{2+x},f(x^3)=\frac{1-x^3}{1+x^3}.$$

通过对函数的定义和以上各例题的分析讨论不难发现，确定一个函数，起决定作用的因素是：(1)对应法则 f；(2)定义域 D_f.

两个函数的对应法则 f 和定义域 D_f 都相同，那么这两个函数就相同；否则不相同.

【例 1-4】 下列各对函数是否相同？为什么？

(1)$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2)$f(x)=3\ln x$，$g(x)=\ln x^3$.

解

(1)不相同. $f(-1)=-1, g(-1)=1$,两个函数对应法则不同,所以不相同.

(2)相同. 定义域均为$(0,+\infty)$,对应法则也相同,所以相同.

1.1.4　函数的表示方法

函数的表示方法一般有解析法、表格法和图像法.

1. 解析法

解析法是用数学表达式来表示函数的方法,它是最常用的一种函数表示方法.

【例 1-5】　$y=3x^2$ 是一个用解析式子表示的函数.

当 x 在实数集 **R** 之间取任意值时,由公式可以确定唯一的 y 值.

分段函数:在自变量的不同变化范围中,对应法则用几个不同式子来表示的函数称为分段函数. 分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数,而不是几个函数,对于自变量 x 在定义域内的某个值,分段函数 y 只能确定唯一的值.

注意:　分段函数是其定义域上的一个函数,而不是多个函数.

【例 1-6】　$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$(见图 1-1),它就是分段函数.

2. 表格法

表格法是用表格来表示自变量与函数值的对应关系的方法.

【例 1-7】　某商店一年中各月份毛线的销售量(单位:10^2kg)的关系如表 1-1(各月份毛线销售量)所示,这是用表格表示的函数,当自变量 x 取 1 到 12 之间的任意一个整数时,从表格中可以查到 y 的一个对应值,例如 x 取 6,从表中可以看到它对应的 y 值是 5,即 2 月份毛线销售量为 500kg.

表 1-1

月份　x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 $y/10^2$kg	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

3. 图像法

图像法是用坐标平面上的图形来表示函数关系的方法.

如果很难找到一个解析式准确地表示两个变量之间的关系,通常用某坐标系中的一条曲线来表示两个变量 x 与 y 之间的对应关系(见图 1-2).

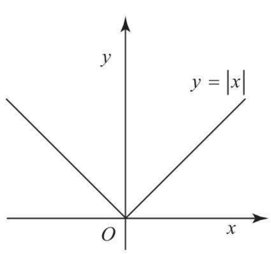

图 1-1

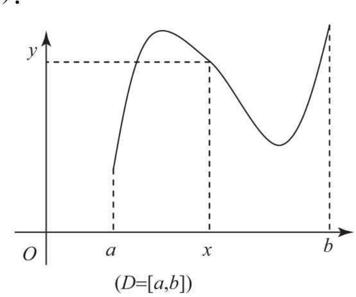

图 1-2

习题 1.1

1. 选择题.

(1)函数 $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$的定义域是(　　).

A. $(-1,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $[-1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

(2)函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$的定义域是(　　).

A. $(1,+\infty)$　　B. $(0,1)\cup(1,+\infty)$

C. $(0,2)\cup(2,+\infty)$　　D. $(1,2)\cup(2,+\infty)$

(3)函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-2}$的定义域是(　　).

A. $(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

C. $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

(4)下列各函数对中,(　　)中的两个函数相等.

A. $f(x)=\ln x^2,g(x)=2\ln x$　　B. $f(x)=\ln x^3,g(x)=3\ln x$

C. $f(x)=(\sqrt{x})^2,g(x)=x$　　D. $f(x)=\sqrt{x^2},g(x)=x$

(5)若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},\ 0<x\leqslant 1\\ \ln x,1<x\leqslant \mathrm{e}\end{cases}$,则 $f(x)$的定义域是(　　)

A. $(0,\ 1]$　　B. $(1,\ \mathrm{e})$　　C. $(0,\mathrm{e}]$　　D. $[0,\ \mathrm{e}]$

2. 求下列函数的定义域:

(1)$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$;(2)$y=\log_a \arcsin x$.

3. 设函数 $f(x)=\arcsin x$,求下列函数值:

$f(0),f(-1),f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),f(2)$.

4. 下列函数是否相同,为什么?

(1)$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$, $g(x)=x-1$;(2)$f(x)=\dfrac{x}{x}$, $g(x)=x^0$.

1.2　函数的特性

1.2.1　函数的有界性

定义 2　设函数 $y=f(x)$在区间 I 内有定义,如果存在一个正数 M,对于所有的 $x\in I$ 对应的函数值 $f(x)$都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $y=f(x)$在区间 I 内有界.如果这样的 M 不存在,则称函数 $y=f(x)$在区间 I 内无界.

函数 $y=f(x)$在区间 I 上有界的几何意义是:曲线 $y=f(x)$在区间 I 上被界定在两条平

行线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

【例 1-8】 函数 $f(x)=\sin x$,在$(-\infty,+\infty)$内有界,因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,有 $|\sin x|\leqslant 1$,因此 $f(x)=\sin x$ 是在$(-\infty,+\infty)$内的有界函数.

函数 $y=f(x)$的有界性与区间 I 密切相关.

自测 1 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$和$(1,+\infty)$内的有界性.

1.2.2 函数的奇偶性

定义 3 如果函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称,且对于任何 $x\in D$,有

$$f(-x)=f(x)(\text{或 } f(-x)=-f(x)),$$

则称 $y=f(x)$为 D 上的**偶函数**(或**奇函数**).

偶函数的图形关于 y 轴对称(见图 1-3),奇函数的图形关于原点对称(见图 1-4).

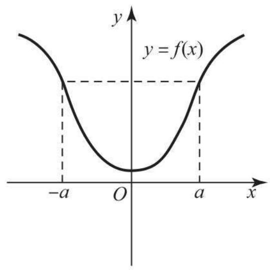

图 1-3

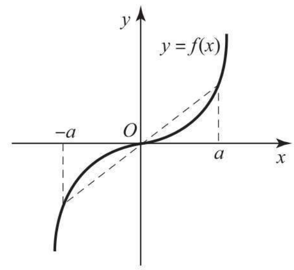

图 1-4

【例 1-9】 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=3x^4-5x^2+7$;

(2) $f(x)=2x^2+\sin x$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^{x})(a>0,a\neq 1)$.

解 由定义:

(1)因为 $f(-x)=3(-x)^4-5(-x)^2+7=3x^4-5x^2+7=f(x)$,所以其为偶函数;

(2)因为 $f(-x)=2(-x)^2+\sin(-x)=2x^2-\sin x\neq f(x)$,

同样可以得到 $f(-x)\neq -f(x)$,所以函数既非奇函数,也非偶函数;

(3)因为 $f(-x)=\dfrac{1}{2}(a^{-(-x)}-a^{-x})=-f(x)$,所以其为奇函数.

1.2.3 函数的单调性

定义 4 设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,区间 $I\subset D$. 对于任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)<f(x_2)(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$为该区间 I 上的**单调递增函数**(或**单调递减函数**). 单调递增函数与单调递减函数统称为**单调函数**.

从几何上看,单调递增的函数曲线是沿 x 轴的正向逐渐上升的(见图 1-5),而单调递减的函数曲线是沿 x 轴的正向逐渐下降的(见图 1-6).

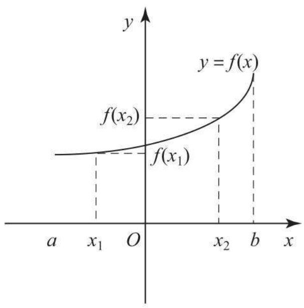

图 1-5

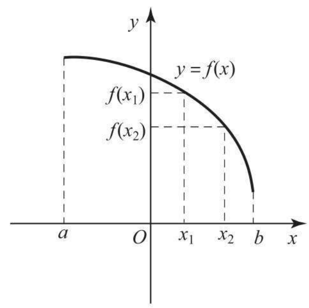

图 1-6

【例 1-10】 函数 $f(x)=x^2$ 在区间$(0,+\infty)$上单调递增,在区间$(-\infty,0)$上单调递减.

1.2.4 函数的周期性

定义 5 设有函数 $y=f(x)$,其定义域为 D,若存在不为零的实数 l,使得对于任意 $x\in D$,$x+l\in D$,恒有 $f(x+l)=f(x)$,则称 $f(x)$为以 l 为周期的**周期函数**.

【例 1-11】 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 的周期为 2π. $y=\cos 4x$ 的周期为$\dfrac{\pi}{2}$.

习题 1.2

1. 选择题.

(1)下列函数中为偶函数的是(　　).

A. $y=x\sin x$　　B. $y=e^x-e^{-x}$　　C. $y=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$　　D. $y=x^2-x$

(2)下列函数中,图形关于原点对称是(　　).

A. $y=\sin x^2$　　B. $y=\sqrt[3]{x}-x$　　C. $y=x^3+1$　　D. $y=e^{-x}+1$

(3)设函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,则函数 $f(x)-f(-x)$的图形是关于(　　)对称.

A. $y=x$　　B. x 轴　　C. y 轴　　D. 坐标原点

(4)下列函数在其定义域内为无界函数的是(　　).

A. $y=\sin x$　　B. $y=\cos x$　　C. $y=\lg x$　　D. $y=\operatorname{arccot} x$

(5)下列函数在其定义域内为单调函数的是(　　).

A. $y=\sin x$　　B. $y=\cos x$　　C. $y=\lg x$　　D. $y=x^2+1$

(6)下列函数为周期函数的是(　　).

A. $y=\sin x^3$　　B. $y=x\cos x$　　C. $y=\sin 2x$　　D. $y=x^2\sin x$

2. 设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,试证 $f(x)$是奇函数.

3. 设 $f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$,试证 $f(x)-f(-x)$是奇函数.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -3\leqslant x\leqslant 0\\ -x^2, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$,的奇偶性、周期性、单调性和有界性.

5. 证明:当函数 $y=f(x)$以 T 为周期时,函数 $y=f(ax)(a>0)$的周期为$\dfrac{T}{a}$.