浙大优学
进阶数学

高分之路拾级而上

光子数学丛书

中考数学

压轴题破解策略

林静　高海洋◎著

- 17套破题攻略阅尽题海经典
- 初中数学高手全解压轴好题

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

中考数学压轴题破解策略

林　静　高海洋　著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中考数学压轴题破解策略 / 林静,高海洋著. —杭州:浙江大学出版社,2016.11(2016.12 重印)
ISBN 978-7-308-16343-9

Ⅰ.①中… Ⅱ.①林… ②高… Ⅲ.①中学数学课—初中—题解—升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 256920 号

中考数学压轴题破解策略
林 静 高海洋 著

策　　划 陈海权(QQ:1010892859)
责任编辑 王同裕
责任校对 金佩雯 陈 宇
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷 杭州杭新印务有限公司
开　　本 889mm×1194mm 1/16
印　　张 8.5
字　　数 275 千
版 印 次 2016 年 11 月第 1 版 2016 年 12 月第 2 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-16343-9
定　　价 25.80 元

致读者
（中考数学高手进阶攻略）

中考中，高手取胜往往不在前面的基础题或中档题，而在“量少价高”的压轴题。每年都会有很多学生为压轴题犯愁，不知道从何下手，甚至有的学生表示题目读起来都费劲，更别说解题了，从而与高分失之交臂。前段时间读了兰琦（我们的教研负责人）编著的《高考数学压轴题的分析与解》，我们读后深有同感：“学生面对压轴题，要知道奔着哪个方向去思考，才能让解题变得更加得心应手。比起题海战术，更重要的是策略。”因而我们在写作时参考了兰琦一书的特点，并将这本书的书名确定为《中考数学压轴题破解策略》。我们多年从事中学数学教研方面的工作，尤其对几何教学深有研究（全书共有500幅我们自己的手绘图），写这本书时我们花了大量的时间对近三年全国中考压轴题做了一个梳理，摸清楚每道压轴题的本质，再对其进行分类汇总，然后将同类题型的解决方法形成套路，最终汇聚于17个破解攻略中，共30小节，每一小节做到破解策略、例题讲解、进阶训练一一对应，以此培养学生举一反三的能力。

使用这本书时，可先翻阅每小节前的破解策略，然而数学又不比其他学科，虽然套路满满，没有题目你也无处施展，所以攻略与例题更配。每一道例题都是从近三年全国中考题中精挑细选出来的，其解法与总结的破解策略相呼应，为有效地解决问题做了一个示范。同样，进阶训练中的题目也精选自中考题，通过例题深刻理解破解策略后，再来做练习能有的放矢、直击要害。在认真阅读、消化了这本书后，再遇到压轴题，你将不用再畏惧它了。

本书所有试题均选自历年全国中考题及模拟题，所总结的“破解策略”是我们在教学过程中的积累，在与同事的交流中，也得到很多收获，在这里特别感谢兰琦、苏明、张振等老师对本书做出的重要贡献。

当然，对于求知若渴、好学若饥的学子来说，一本书不足以满足全部的需求，我们也希望你能通过这本书无限学习下去，所以邀请你来“光子问答”（扫描封底二维码），那里有全国各地的大神牛人，定能让你收获更多解法精妙的好题，进阶为“数学高手”。

虽然我们秉着一丝不苟、认真负责的态度编写此书，但错漏之处在所难免。你在使用本书过程中若发现任何问题或者提出修改意见，均可与我们联系。

林　静　高海洋
邮箱：林　静 momokathy@aliyun.com，
高海洋 gogoyangyang@126.com

目 录

第一部分 代数部分

第一章 一元二次方程 …… (1)
第一节 一元二次方程的有理根 …… (1)
第二节 一元二次方程的整数根 …… (2)
第二章 函 数 …… (5)
第一节 函数与方程、不等式的关系 …… (5)
第二节 函数图象的公共点 …… (8)

第二部分 几何部分

第三章 图形操作 …… (11)
第一节 图形的分割与拼接 …… (11)
第二节 等分图形面积 …… (17)
第四章 线段最值 …… (20)
第一节 轴对称之最短路径 …… (20)
第二节 旋转之求线段最值 …… (24)
第三节 费马点 …… (27)
第五章 平 移 …… (31)
第一节 平移的性质 …… (31)
第二节 平移构造辅助线 …… (32)
第六章 轴对称 …… (36)
第一节 轴对称性质 …… (36)
第二节 翻折 …… (37)
第三节 翻折构造辅助线 …… (40)

第七章　旋　转 …… (43)
第一节　旋转的性质 …… (43)
第二节　“Y”形模型 …… (45)
第三节　中心对称模型 …… (48)
第四节　共顶点模型 …… (52)
第五节　角含半角模型 …… (57)
第六节　对角互补模型 …… (62)

第三部分　代几综合

第八章　等腰三角形的存在性 …… (68)
第九章　直角三角形的存在性 …… (75)
第十章　平行四边形的存在性 …… (80)
第十一章　特殊平行四边形的存在性 …… (84)
第十二章　全等三角形的存在性 …… (88)
第十三章　相似三角形的存在性 …… (92)
第十四章　函数与线段 …… (97)
第十五章　函数与角 …… (103)
第十六章　函数与圆 …… (106)
第十七章　函数与面积 …… (109)

“进阶训练”参考答案 …… (115)

第一部分　代数部分

第一章　一元二次方程

一元二次方程是中学代数中最重要的内容之一，它是学习二次函数的基础，其中，求取一元二次方程的有理根和整数根在某些地区的中考中是较难的部分.

第一节　一元二次方程的有理根

破解策略

关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（a,b,c 为有理数）有有理根的条件为：

b^2-4ac 是一个有理数的平方.

解决一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（a,b,c 为有理数）的有理根问题时，一般的解题策略有：

（1）根据已知条件中的待定系数的取值范围，得到 b^2-4ac 的取值范围，筛选出其中为有理数的平方的数.

（2）先将方程的系数整数化，再求根的判别式并写成 $\Delta=M^2-t$（M 为关于待定系数的整式，t 为整数）的形式；设 $M^2-t=m^2$（m 为非负有理数），解不定方程 $(M+m)(M-m)=t$，求出待定系数的可能取值，并检验.

例题讲解

例 1　已知整数 m 满足 $6<m<20$，如果关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(2m-1)x+m-2=0$ 有有理根，求 m 的值及方程的根.

解　若原方程的根为有理数，

则 $\Delta=(2m-1)^2-4m(m-2)=4m+1$ 应为某个有理数的平方.

已知 $6<m<20$，所以 $25<4m+1<81$，

而 $4m+1$ 是奇数，从而 $4m+1=49$，

得 $m=12$，

所以原方程变为 $12x^2-23x+10=0$，

解得 $x_1=\frac{2}{3}$，$x_2=\frac{5}{4}$.

故 $m=12$ 时，方程有有理根，此时方程的根为 $x_1=\frac{2}{3}$，$x_2=\frac{5}{4}$.

例 2　设 m 是不为零的整数，关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(m-1)x+1=0$ 有有理根，求 m 的值.

解　若原方程的根为有理数，

则 $\Delta=(m-1)^2-4m=(m-3)^2-8$ 应为某个有理数的平方.

令 $(m-3)^2-8=n^2$（$n>0$），显然 n 也为整数，

所以$(m-3+n)(m-3-n)=8$.

由于$m-3+n>m-3-n$，并且$(m-3+n)+(m-3-n)=2(m-3)$是偶数，

所以$m-3+n$和$m-3-n$同奇偶，

所以$\begin{cases}m-3+n=4,\\m-3-n=2\end{cases}$或$\begin{cases}m-3+n=-2,\\m-3-n=-4.\end{cases}$

解得$\begin{cases}m_1=6,\\n_1=1;\end{cases}\begin{cases}m_2=0(舍),\\n_2=1.\end{cases}$

所以当$m=6$时，方程有两个有理根，分别为$x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=\dfrac{1}{3}$.

进阶训练

1.已知m为有理数，问k为何值时，关于x的方程$x^2-4mx+4x+3m^2-2m+4k=0$的根为有理数？

2.已知m为整数，关于x的方程$2x^2+mx-1=0$的两个根都大于-1且小于$\dfrac{3}{2}$，当方程的两个根均为有理数时，求m的值.

第二节　一元二次方程的整数根

破解策略

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$而言，方程的根为整数且必为有理数，所以有理根存在的条件是整数根存在的必要条件.

对于解决方程$ax^2+bx+c=0$的整数根问题，常见的方法有：利用判别式的取值范围、利用判别式是一个有理数的平方、利用根与系数的关系和利用因式分解.

需要注意的是要看清楚题中说的是方程有整数根还是方程的根为整数.

1.利用判别式的取值范围解题的步骤

(1)讨论二次项系数的情况，当$a\neq0$时，求出判别式；

(2)根据已知条件得待定系数的取值范围，再求出判别式的取值范围，筛选出其中为有理数的平方的数；

(3)求出待定系数的可能取值，并检验.

2.利用判别式是一个有理数的平方解题的步骤

(1)讨论二次项系数的情况，当$a\neq0$时，将方程的系数整数化，求出判别式；

(2)将判别式写成$\Delta=M^2-t$(M为关于待定系数的整式，t为整数)的形式，设$M^2-t=m^2$(m为非负有理数)；

(3)可得$(M+m)(M-m)=t$，解此不定方程；

(4)求出待定系数的可能取值，并检验.

3. 利用根与系数的关系解题的步骤

(1)讨论二次项系数的情况,当 $a\neq0$ 时,利用根与系数的关系求出两根的和与积;

(2)将两根的和与积的代数式写成一个整式与一个分式的和(类似于分离常量)的形式;

(3)由分式的结果一定为整数,根据整除的性质得到分式的分母一定是分子的约数,或者由根与系数的关系得到关于 x_1,x_2 的因式乘积为整数,从而求出待定系数的可能取值;

(4)将待定系数的可能取值代入原方程检验并确定结果.

4. 利用因式分解解题的步骤

(1)讨论二次项系数的情况,当 $a\neq0$ 时,将方程化为 $(m_1x+n_1)(m_2x+n_2)=0$ 的形式;

(2)求出方程的两根 $x_1=-\dfrac{n_1}{m_1}$ 和 $x_2=-\dfrac{n_2}{m_2}$;

(3)利用分离常量的方法,将 $-\dfrac{n_1}{m_1}$,$-\dfrac{n_2}{m_2}$ 变成一个常数与一个分式的和;

(4)根据整除的性质,得到分式的分母一定是分子的约数,从而求出待定系数的可能取值;

(5)将待定系数的可能取值代入原方程检验并确定结果.

在“利用根与系数的关系解题”和“利用因式分解解题”的过程中都提到了分离常量,所谓分离常量就是从分式中化出一个常数,例如:

①$\dfrac{m-2}{m+1}=\dfrac{m+1-3}{m+1}=\dfrac{m+1}{m+1}-\dfrac{3}{m+1}=1-\dfrac{3}{m+1}$;

②$\dfrac{-m-2}{m+1}=\dfrac{-m-1-1}{m+1}=\dfrac{-(m+1)}{m+1}-\dfrac{1}{m+1}=-1-\dfrac{1}{m+1}$;

③$\dfrac{2m+3}{m+1}=\dfrac{2m+2+1}{m+1}=\dfrac{2(m+1)}{m+1}+\dfrac{1}{m+1}=2+\dfrac{1}{m+1}$;

④$\dfrac{-3m-1}{m+1}=\dfrac{-3m-3+2}{m+1}=\dfrac{-3(m+1)}{m+1}+\dfrac{2}{m+1}=-3+\dfrac{2}{m+1}$.

在第一节“一元二次方程的有理根”破解策略中已举例介绍了前两种方法,现举例讲解后两种方法.

例题讲解

例 1　已知关于 x 的方程 $rx^2+(r+2)x+r-1=0$ 有且只有整数根.

(1)若 r 为整数,求 r 的值;

(2)若 r 为有理数,求 r 的值.

解　当 $r=0$ 时,原方程无整数根;

当 $r\neq0$ 时,由根与系数的关系可得

$x_1+x_2=-\dfrac{r+2}{r}=-1-\dfrac{2}{r}$,

$x_1x_2=\dfrac{r-1}{r}=1-\dfrac{1}{r}$.

(1)因为 x_1,x_2 都是整数,所以 x_1+x_2 和 x_1x_2 均为整数,从而 $\dfrac{2}{r}$,$\dfrac{1}{r}$ 为整数. 而 r 为整数,所以 $r=\pm1$.

当 $r=-1$ 时,原方程的解不为整数,不符合条件;

当 $r=1$ 时,原方程的解为 $x_1=0,x_2=-3$.

综上可得,整数 $r=1$.

(2)因为 $4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1=4-\dfrac{4}{r}+2+\dfrac{4}{r}+1=7$,

所以$(2x_1-1)(2x_2-1)=7$.

因为 x_1,x_2 都是整数，所以 $2x_1-1$ 和 $2x_2-1$ 也为整数，

则有$\begin{cases}2x_1-1=1,\\2x_2-1=7\end{cases}$或$\begin{cases}2x_1-1=-1,\\2x_2-1=-7.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_1=1,\\x_2=4\end{cases}$或$\begin{cases}x_1=0,\\x_2=-3.\end{cases}$

所以 $r=-\frac{1}{3}$或 1.

经检验，$r=-\frac{1}{3}$或 1 均符合题意.

例 2　在平面直角坐标系中，我们不妨将横坐标、纵坐标均为整数的点称之为“中国结”. 若二次函数 $y=(k^2-3k+2)x^2+(2k^2-4k+1)x+k^2-k$（$k$ 为常数）的图象与 x 轴相交得到两个不同的“中国结”，试问该函数的图象与 x 轴所围成的平面图形中（含边界），一共包含有多少个“中国结”？

解　令 $y=0$，即$(k^2-3k+2)x^2+(2k^2-4k+1)x+k^2-k=0$，

因式分解，得$[(k-1)x+k][(k-2)x+k-1]=0$.

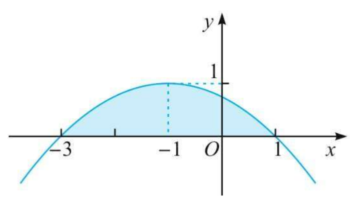
解得 $x_1=-\frac{k}{k-1}=-1-\frac{1}{k-1}$，

$x_2=-\frac{k-1}{k-2}=-1-\frac{1}{k-2}$.

由题意可得 x_1,x_2 均为整数，所以可得 $k=\frac{3}{2}$，

从而二次函数表达式为 $y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}(x+1)^2+1$.

二次函数图象如下图，则该函数的图象与 x 轴所围成的平面图形中（含边界），一共包含 6 个“中国结”，分别为：$(-3,0)$，$(-2,0)$，$(-1,0)$，$(-1,1)$，$(0,0)$，$(1,0)$.



进阶训练

1. 已知关于 x 的方程 $x^2-2(2m-3)x+4m^2-14m+8=0(m>0)$ 有两个不相等的实数根，若 $12<m<40$，且方程的两个根为整数，求整数 m 的值.

2. 已知方程$(k^2-1)x^2-3(3k-1)x+18=0$ 有正整数根，求整数 k 的值.

3. 求使关于 x 的方程$(a+1)x^2-(a^2+1)x+2a^2-6=0$ 的根均为整数的所有整数 a.

第二章 函 数

第一节 函数与方程、不等式的关系

破解策略

1. 函数与方程的关系

(1)关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的解⇔抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与 x 轴交点的横坐标的值；

(2)关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=mx+n(am\neq0)$ 的解⇔抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与直线 $y=mx+n(m\neq0)$ 交点的横坐标的值.

2. 函数与不等式的关系

(1)关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq0)$ 的解集⇔抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 位于 x 轴上方的所有点的横坐标的值；

(2)关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0(a\neq0)$ 的解集⇔抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 位于 x 轴下方的所有点的横坐标的值；

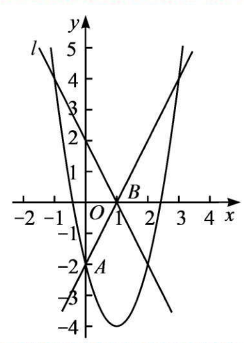
(3)关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>mx+n(ma\neq0)$ 的解集⇔抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 位于直线 $y=mx+n(m\neq0)$ 上方的所有点的横坐标的值；

(4)关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<mx+n(ma\neq0)$ 的解集⇔抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 位于直线 $y=mx+n(m\neq0)$ 下方的所有点的横坐标的值.

例题讲解

例 1 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=mx^2-2mx-2(m\neq0)$ 与 y 轴交于点 A，其对称轴与 x 轴交于点 B. 若该抛物线在 $-2<x<-1$ 这一段位于直线 l：$y=-2x+2$ 的上方，并且在 $2<x<3$ 这一段位于直线 AB 的下方，求该抛物线的表达式.

解 如图，因为抛物线对称轴为 $x=1$，且直线 l 与直线 AB 关于对称轴对称，
所以抛物线在 $-1<x<0$ 这一段位于直线 l 的下方，
又因为抛物线在 $-2<x<-1$ 这一段位于直线 l 的上方，
所以抛物线与直线 l 的一个交点的横坐标为 -1.
当 $x=-1$ 时，$y=-2\times(-1)+2=4$，则抛物线过点 $(-1,4)$，
将 $(-1,4)$ 代入抛物线表达式，得 $m+2m-2=4$，则 $m=2$，
所以抛物线的表达式为 $y=2x^2-4x-2$.



例 2 在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 $P(a,b)$ 和点 $Q(a,b')$，给出如下定义：

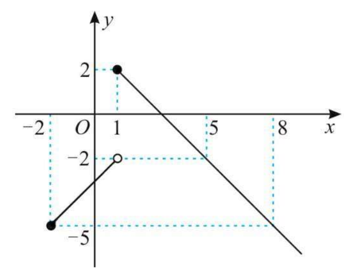
若 $b'=\begin{cases}b, & a\geqslant1;\\-b, & a<1,\end{cases}$ 则称点 Q 为点 P 的限变点.

例如，点 $(2,3)$ 的限变点的坐标是 $(2,3)$，点 $(-2,5)$ 的限变点的坐标是 $(-2,-5)$.

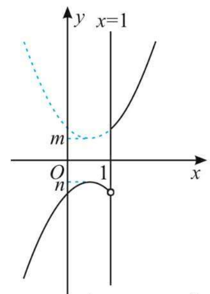
(1)若点 P 在函数 $y=-x+3(-2\leqslant x\leqslant k,k>-2)$ 的图象上，其限变点 Q 的纵坐标 b' 的取值范围是 $-5\leqslant b'\leqslant2$，求 k 的取值范围.

(2)若点 P 在关于 x 的二次函数 $y=x^2-2tx+t^2+t$ 的图象上，其限变点 Q 的纵坐标 b' 的取值范围是 $b'\geqslant m$ 或 $b'<n$，其中 $m>n$. 令 $s=m-n$，求 s 关于 t 的函数表达式及 s 的取值范围.

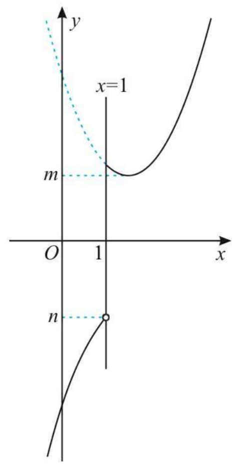
解　(1)依题意，$y=-x+3(x\geqslant-2)$图象上的点 P 的限变点必在函数
$y=\begin{cases}-x+3, & x\geqslant1;\\ x-3, & -2\leqslant x<1\end{cases}$的图象上.



如图，显然 $b'\leqslant2$.
当 $x=1$ 时，b'取最大值 2，
当 $b'=-2$ 时，$-2=-x+3$，则 $x=5$.
当 $b'=-5$ 时，$-5=x-3$ 或 $-5=-x+3$，则 $x=-2$ 或 $x=8$.
因为 $-5\leqslant b'\leqslant2$，结合图象，可得 k 的取值范围是 $5\leqslant k\leqslant8$.
(2)因为 $y=x^2-2tx+t^2+t=(x-t)^2+t$，
所以顶点坐标为(t,t).
①若 $t<1$，当 $x<1$ 时，点 P 的纵坐标 b 满足 $b\geqslant t$，则 $b'\leqslant-t$，与题意不符.



②若 $t\geqslant1$，当 $x\geqslant1$ 时，点 P 的纵坐标 b 满足 $b\geqslant t$，则 $b'\geqslant t$，即 $m=t$；
当 $x<1$ 时，点 P 的纵坐标 b 满足 $b>t^2-t+1$，则 $b'<-t^2+t-1$，即 $n=-t^2+t-1$.



所以 $s=m-n=t+t^2-t+1=t^2+1$.
所以 s 关于 t 的函数表达式为 $s=t^2+1(t\geqslant1)$.
当 $t=1$ 时，s 取最小值 2.
所以 s 的取值范围是 $s\geqslant2$.

例 3　已知抛物线 $y=x^2+(2m+1)x+m(m-3)$（m 为常数，$-1\leqslant m\leqslant4$），$A(-m-1,y_1)$，$B\left(\frac{m}{2},y_2\right)$，$C(-m,y_3)$是抛物线上不同的三点，将抛物线的对称轴绕坐标原点 O 逆时针旋转 90°得到直线 a，过抛物线顶点 P 作 $PH\perp a$ 于 H，当 $1<PH\leqslant6$ 时，试比较 y_1,y_2,y_3 之间的大小.

解　因为顶点坐标为$\left(-\frac{2m+1}{2},-\frac{16m+1}{4}\right)$，

所以 $PH=\left|\frac{12m-1}{4}\right|$.

因为 $1<PH\leqslant 6$，$-1\leqslant m\leqslant 4$，

所以当 $\frac{12m-1}{4}>0$ 时，解得 $\frac{5}{12}<m\leqslant\frac{25}{12}$，

所以当 $\frac{12m-1}{4}<0$ 时，解得 $-1\leqslant m<-\frac{1}{4}$，

因为点 $A(-m-1,y_1)$ 在抛物线上，所以 $y_1=-4m$，

因为点 $C(-m,y_3)$ 在抛物线上，所以 $y_3=-4m$，

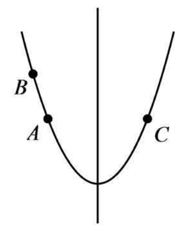
所以 $y_1=y_3$，

①若 $\frac{m}{2}<-m-1$，则有 $m<-\frac{2}{3}$，因为 $-1\leqslant m<-\frac{1}{4}$，

所以 $-1\leqslant m<-\frac{2}{3}$，

此时，在对称轴的左侧，y 随 x 的增大而减小，如图①，

所以 $y_2>y_1=y_3$；



图①

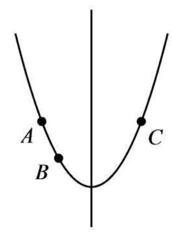
②若 $\frac{m}{2}=-m-1$，则 A 与 B 重合，此种情况不合题意，故舍去；

③若 $\frac{m}{2}>-m-1$，且 $\frac{m}{2}\leqslant-\frac{2m+1}{2}$ 时，有 $-\frac{2}{3}<m\leqslant-\frac{1}{3}$，

因为 $-1\leqslant m<-\frac{1}{4}$，所以 $-\frac{2}{3}<m\leqslant-\frac{1}{3}$，

此时，在对称轴的左侧，y 随 x 的增大而减小，如图②，

所以 $y_1=y_3>y_2$；



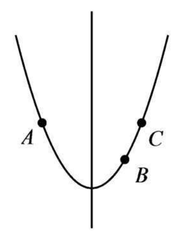
图②

④若 $-\frac{2m+1}{2}\leqslant\frac{m}{2}<-m$，有 $-\frac{1}{3}\leqslant m<0$，

因为 $-1\leqslant m<-\frac{1}{4}$，所以 $-\frac{1}{3}\leqslant m<-\frac{1}{4}$，

此时，在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而增大，如图③，

所以 $y_2<y_3=y_1$；



图③

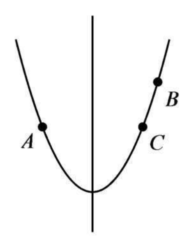
⑤若 $\frac{m}{2}=-m$，则 B 与 C 重合，此种情况不合题意，故舍去；

⑥若 $\frac{m}{2}>-m$，有 $m>0$，

因为 $\frac{5}{12}<m\leqslant\frac{25}{12}$，所以 $\frac{5}{12}<m\leqslant\frac{25}{12}$，

此时，在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而增大，如图④，

所以 $y_2>y_3=y_1$.



图④

综上可得，当 $-1\leqslant m<-\frac{2}{3}$ 或 $\frac{5}{12}<m\leqslant\frac{25}{12}$ 时，有 $y_2>y_3=y_1$；

当 $-\frac{2}{3}<m<-\frac{1}{4}$ 时，有 $y_2<y_3=y_1$.

进阶训练

1. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个不同的实数根 $m,n(m<n)$，方程 $x^2+ax+b=1$ 有两个不同的实数根 $p,q(p<q)$，则 m,n,p,q 的大小关系为 ( )

A. $m<p<q<n$　　B. $p<m<n<q$

C. $m<p<n<q$　　D. $p<m<q<n$

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，$P(n,0)$ 是 x 轴上的一个动点，过点 P 作垂直于 x 轴的直线交一次函数 $y=kx+b$ 的图象于点 M，交二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象于点 N. 若只有当 $-2<n<2$ 时，点 M 位

于点 N 的上方，求这个一次函数的表达式.

3. 已知函数 $y_1=ax^2+bx$，$y_2=ax+b(ab\neq0)$在同一平面直角坐标系中，若函数 y_2 的图象经过 y_1 图象的顶点，当 $1<x<\frac{3}{2}$ 时，比较 y_1，y_2 的大小.

第二节 函数图象的公共点

破解策略

根据公共点的个数，求待定系数的取值范围的一般步骤为：

(1)画图.

(2)确定待定系数所在位置，明确图象的变化趋势.

例如：

①直线 $y=2x+b$，其中待定系数是 b，则直线 $y=2x+b$ 与直线 $y=2x$ 是平行或重合的；

②直线 $y=kx-1$，其中待定系数是 k，则直线 $y=kx-1$ 是绕着固定点$(0,-1)$旋转的；

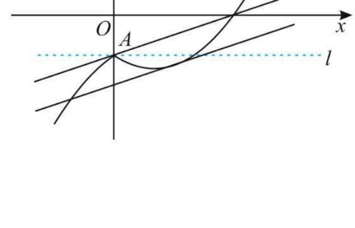
③抛物线 $y=ax^2+5$，其中待定系数是 a，则该抛物线的顶点是固定的，开口大小和方向是变化的；

④抛物线 $y=x^2+bx+c$，其中待定系数是 b，c，则可将一般式化为顶点式，再将抛物线 $y=x^2$ 上下左右平移得到.

(3)找临界点.

例题讲解

例 1 若二次函数 $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$ 的图象与 y 轴的交点为 A，过 A 作直线 $l\parallel x$ 轴，将抛物线在 y 轴左侧部分沿直线 l 翻折，其余部分保持不变，得到一个新图象，直线 $y=\frac{1}{3}x+b$ 与新图象只有一个公共点 $P(x_0,y_0)$，且 $y_0\leqslant7$，求 b 的取值范围.



分析 如图，当直线 $y=\frac{1}{3}x+b$ 经过点$(0,-1)$时，与新图象有两个交点；当直线与原抛物线只有一个交点时，则与新图象有两个交点.

解 将$(0,-1)$代入 $y=\frac{1}{3}x+b$，得 $b=-1$，

因为 $y_0\leqslant7$，所以$\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1=7$ 时，

解得 $x_1=6$，$x_2=-4$.

将(6,7)代入 $y=\frac{1}{3}x+b$，得 $b=5$，所以 $-1<b\leqslant 5$.

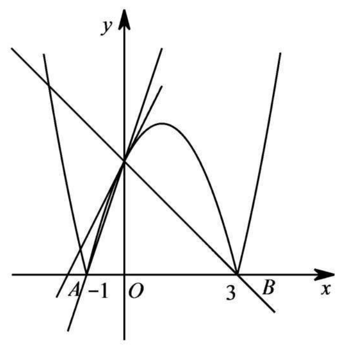
因为 $\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1=\frac{1}{3}x+b$，

所以 $\Delta=9+4(3+3b)=0$，即 $b=-\frac{7}{4}$.

综上可得，当 $-1<b\leqslant 5$ 或 $b<-\frac{7}{4}$ 时，直线与新图象只有一个公共点.

例 2　若二次函数 $y=-x^2+2x+3$ 的图象与 x 轴交于 A，B 两点，将此图象在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折，其余部分保持不变，得到一个新图象，直线 $y=kx+3$ 与新图象恰有三个公共点时，求 k 的值.

分析　如图，因为直线 $y=kx+3$ 是绕着点(0,3)旋转的，所以直线 $y=kx+3$ 经过点 $A(-1,0)$ 时，经过点 $B(3,0)$ 时，与 $y=-x^2+2x+3(-1\leqslant x\leqslant 3)$ 只有一个公共点时，这三种情况下与新图象恰有三个公共点.



解　将(−1,0)代入直线表达式得 $k=3$，

将(3,0)代入直线表达式得 $k=-1$.

当抛物线与直线只有一个交点时，则 $kx+3=-x^2+2x+3$，

所以 $\Delta=(k-2)^2=0$，即 $k=2$.

综上可得，当 $k=-1$，2 或 3 时，直线 $y=kx+3$ 与新图象恰有三个公共点.

例 3　已知抛物线 L：$y=-\frac{1}{2}(x-t)(x-t+4)$（常数 $t>0$）与双曲线 $y=\frac{6}{x}$ 有个交点的横坐标为 x_0，且满足 $4\leqslant x_0\leqslant 6$，通过 L 位置随 t 变化的过程，求出 t 的取值范围.

解　如图，双曲线在 $4\leqslant x_0\leqslant 6$ 时，$1\leqslant y_0\leqslant\frac{3}{2}$，所以 L 与双曲线在点 $C\left(4,\frac{3}{2}\right)$，$D(6,1)$ 之间的一段有个交点，因为抛物线与 x 轴的两个交点为 $(t,0)$，$(t-4,0)(t-4<t)$，所以 $(t,0)$ 在 $(t-4,0)$ 的右侧.

由 $\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x-t)(x-t+4)$，$x=4$，得 $t_1=5$，$t_2=7$，

由 $1=-\frac{1}{2}(x-t)(x-t+4)$，$x=6$，得 $t_3=8-\sqrt{2}$，$t_4=8+\sqrt{2}$.

因为 $5<8-\sqrt{2}<7<8+\sqrt{2}$，

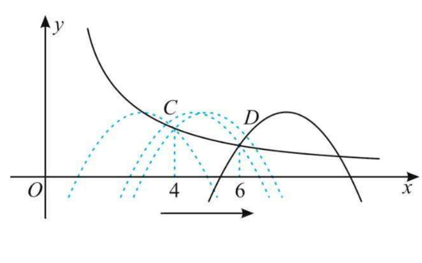
所以当 $t=5$ 时，L 右侧过点 C；

当 $t=8-\sqrt{2}$ 时，L 右侧过点 D.

当 $t=7$ 时，L 左侧过点 C；

当 $t=8+\sqrt{2}$ 时，L 左侧过点 D.

所以 $5\leqslant t\leqslant 8-\sqrt{2}$ 或 $7\leqslant t\leqslant 8+\sqrt{2}$.



例 4　在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 C_1：$y=x^2-2x-3$ 向上平移 n 个单位，得到抛物线 C_2. 若当 $0\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$ 时，抛物线 C_2 与 x 轴只有一个公共点，结合函数图象，求 n 的取值范围.

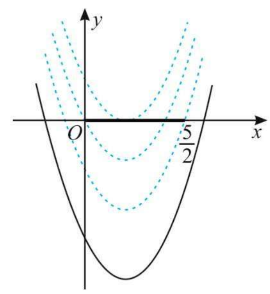
解　由题意可得 $C_2: y=x^2-2x-3+n$.

如图，当抛物线 C_2 经过点 $\left(\frac{5}{2},0\right)$ 时，$n=\frac{7}{4}$；

当抛物线 C_2 经过点 $(0,0)$ 时，$n=3$；

当抛物线 C_2 与 x 轴只有一个交点时，$n=4$.

结合图象，n 的取值范围是 $\frac{7}{4}\leqslant n<3$ 或 $n=4$.



进阶训练

1. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-x+2$ 与 y 轴交于点 A，顶点为 B，点 C 与点 A 关于抛物线的对称轴对称. 点 D 在抛物线上，且点 D 的横坐标为 4. 将抛物线在点 A，D 之间的部分(包含点 A，D)记为图象 G，若图象 G 向下平移 $t(t>0)$ 个单位后与直线 BC 只有一个公共点，求 t 的取值范围.

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 在抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-x-4$ 上，过点 P 作 y 轴的垂线 l，垂足为 $D(0,d)$. 将抛物线在直线 l 上方的部分沿直线 l 翻折，图象的其余部分保持不变，得到一个新图象 G. 当图象 G 与直线 $y=\frac{1}{2}x-2$ 只有两个公共点时，求 d 的取值范围.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 的坐标为 $(3,2)$，点 B 的坐标为 $(-1,2)$，若抛物线 $y=ax^2(a\neq 0)$ 与线段 AB 恰有一个公共点，结合函数的图象，求 a 的取值范围.