浙大数学优辅

数学之美

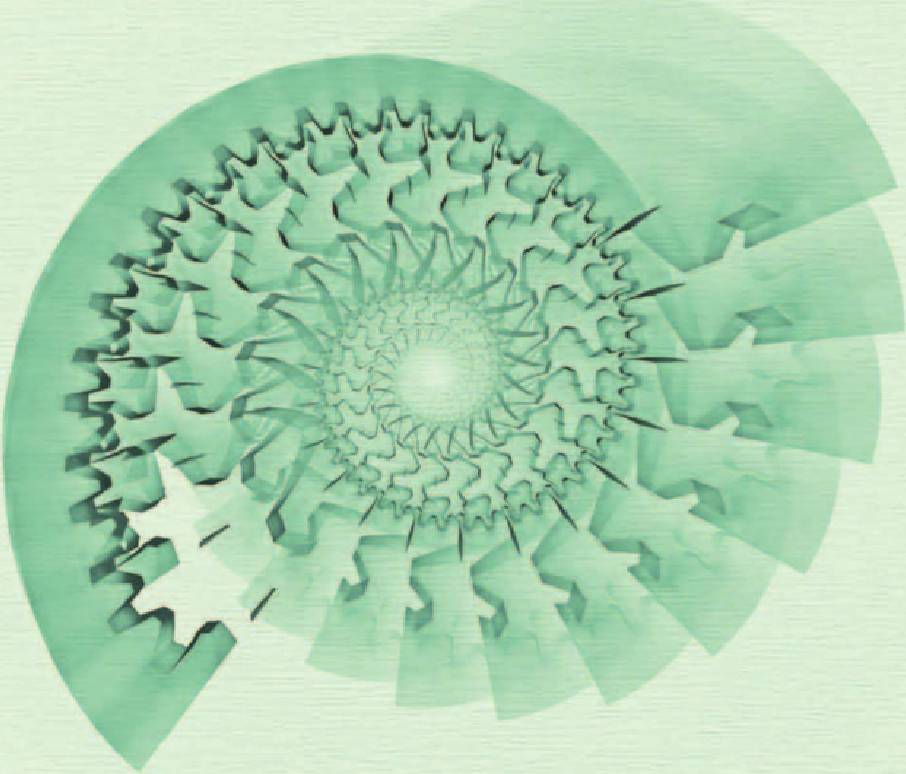
千万册畅销书作者最新力作

在广阔文化背景下同步培优

方法之美·思维之美·应用之美

带你发现数学之美

黄东坡智慧大讲堂



黄东坡◎著

七年级

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

黄东坡智慧大讲堂

带你发现数学之美

七年级

黄东坡　著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

黄东坡智慧大讲堂：带你发现数学之美. 七年级/黄东坡著. —杭州：浙江大学出版社，2017.3

ISBN 978-7-308-16526-6

Ⅰ. ①黄… Ⅱ. ①黄… Ⅲ. ①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 318338 号

黄东坡智慧大讲堂：带你发现数学之美　七年级

黄东坡　著

责任编辑　夏晓冬

责任校对　董　文

封面设计　林智广告

出版发行　浙江大学出版社

（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）

（网址：http://www.zjupress.com）

排　　版　杭州林智广告有限公司

印　　刷　杭州杭新印务有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16

印　　张　16.75

字　　数　347 千

版 印 次　2017 年 3 月第 1 版　2017 年 3 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-308-16526-6

定　　价　58.00 元

启迪与智慧,数学之美的激发

一

2013 年 9 月,十多万网友参加新浪网的一项调查,有 70%网友坦言:“在求学期间,曾经被数学伤害过.”

没有哪门学科如数学这样,能引发学习者爱与恨的火热情感.

抽象的符号,繁难的计算,枯燥的推理;浩瀚的题海,重复的训练,八股化的考试,数学正日益被“妖魔化”,从而导致许多人对这门学科总体上的逃避.

简洁的语言, 精巧的构造, 严谨的结构; 代数的优雅, 几何的神韵, 清澈的理性,无数数学大师、科学巨匠因数学之美的牵引,而热爱数学赞美数学.

著名物理学家狄拉克曾说:“上帝创造世界时用了美的数学.”

哲学家、数学家罗素已言:“数学, 如果正确地看, 不但拥有真, 而且具有至高的美.”

二

数学之美突出地表现为:方法之美、思维之美、应用之美.

数学思想方法是数学知识的高度概括, 对数学知识有巨大的凝聚作用, 是联系知识的纽带,是实现由知识到能力的桥梁.数学发展的历史始终贯穿着两条主线:数学知识的发展和思想方法的创新.

思维,人类智慧之花最美的花朵.

数学是思维的学科,是锻炼思维的体操.数学存在与发展依据思维,而精湛的思维艺术又常借助数学彰显力量, 数学在训练人的思维深度、广度、完整度方面无与伦比,数学能使人们的思维综合为一种科学系统.

数学具有广泛的应用性,数学正昂首阔步地挺进、渗透一切领域.

哥白尼的日心说、牛顿的万有引力定律、爱因斯坦的相对论、无线电波的发

现、DNA 双螺旋结构的打开;图像压缩、信息加密、CT 扫描、谷歌大海捞针、人工智能、云计算、大数据,人类历史上每一项重大事件的背后都看得见数学的身影.

三

大美不言,大音无声.

著名画家吴冠中说:"今天的中国文盲不多了,但美盲却很多."

我们不缺少应试的技巧与高分,但缺乏以美启真的引领,缺少对"美是真理的光辉"的感悟.

与学习同步,与知识能力的发展同步,本书力求在广阔的数学文化背景中,展现数学之美,带你发现数学之美.

青风出袖,明月入怀.

如醉如痴,令人流连学习和探索的数学之路有别样的美景.

愿你在学习中能感受体悟到数学的和谐与秩序、美妙与美好、哲理与诗意.

愿数学之美能带给你启迪与智慧.

黄东坡

2017 年元月于武汉

在多彩的世界深情地抒写

在这个春光灿烂和风吹拂的下午，我们十几个黄东坡的铁杆粉丝聚在黄东坡的身边，一起翻阅他正在做校正的.带你发现数学之美.书稿，厚厚的书稿用智慧铺底，字字凝聚着心血，笔笔渗透了对数学文化充满激情的热爱，大家在发自内心的认同和敬佩中一起举杯庆祝黄东坡在著书立说、数学教学及羽毛球运动中齐头并进取得的成就，气氛热烈而欢乐，黄东坡在大家的心里，不只是朋友，已然变成一个偶像，伟岸地挺立着.

十几年来，目睹黄东坡前行的每一步，从“云中漫步”开始，到“绿杨芳草数学路”，再写“心行山川，笔耕沃野”，我用文字描述我眼睛看见的黄东坡，但是现在我发现，我的文字已经无法描述这位在中国的数学教育中占有重要地位的偶像，虽然他每次见到我们仍然满满地铺张着他那乐呵呵的招牌式笑容，激情飞扬地用最美的文字描述在他眼里万千色彩瑰丽奇美的数学，总是“未出庭院三五步，额头已到数学前”，每句话都在尽情表达他发自内心对数学的热爱，这种热爱的深刻已经不是我的文字能描摹的了.

黄东坡在他的数学文化的传播中，把理想与现实，数学与跨学科，理论与课堂结合得相得益彰，开创了一个数学传播的新时代，完美表达数学世界的人文关怀.走进黄东坡的数学世界，就能感受到黄东坡在广阔的文化背景下，用肆意挥洒的文字展现的是数学思维之美、方法之美、应用之美，他用这些“举手可近月、前行若无山”的文字带领读者上通数学，下达课堂，把艰涩高冷的数学变成了孩子们的热爱.他的生命因数学而变得有意义，因着数学，他的内心深处始终春暖花开，始终豪情万丈，始终笑容满面；而数学也因为他成为更多孩子的热爱，启迪了更多孩子的心灵.我发现，我和偶像之间，隔着一块厚重的带着密码的门，即使给我钥匙，我也尚未找到开启的密码，但是这不影响我对偶像的敬重和崇拜，我敬重梵

高开启了用画笔表达奔放的感情的时代，我也敬重黄东坡深情地抒写出更容易让孩子们热爱的数学文化.

莫愁前路无知己,天下谁人不识君!

我们期待黄东坡老师赋予深情的更多更好的作品能够来到大家的面前.

魏　红

2017 年于北京

目录

CONTENTS

1 质数的孤独

数学文化巡礼

质数只能被1和自己整除，它在所有数字中是最迷惑人心，也是最"孤独的".

它的同伴在哪里？而它的同伴除了同样是"孤独的"之外，和它之间没有任何共同之处.

质数，令人如此着迷. 它那独特的性质和无穷的魅力，展现出魔幻般的奇异现象，并演绎出许多貌似简单却又至难探究的猜想，千百年来吸引着无数数学英才不懈探索和苦苦追寻.

古希腊数学家欧几里得、"数学英雄"欧拉、"业余数学家之王"费马、"数学王子"高斯……都曾痴迷于质数的无穷魅力.

费马猜想、哥德巴赫猜想、黎曼猜想、孪生质数猜想等印证着人们探索质数神秘表象背后潜藏的奥秘的坚持和寻找通往未知道路的努力.

质数神出鬼没，分布得极不规则，而且无穷无尽，怎样从自然数中把质数找出来？

公元前3世纪，古希腊数学家兼哲学家埃拉托色尼提出了一种筛选法，是针对自然数列中的自然数而实施的，用于求一定范围内的质数.

步骤如下：

(1)先把1删除；

(2)读取数列中当前最小的数2，再把2的倍数删除；

(3)读取数列中当前最小的数3，再把3的倍数删除；

(4)依次进行下去，直到把所求范围内的数均读取完.

这种造质数表的方法被称为"埃拉托色尼筛选法".

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			
		53						59	
61						67			
71		73						79	
		83						89	
						97			

蝉与质数

在北美洲的森林里，栖息着一种生命周期十分古怪的蝉类，这些蝉藏于地下长达 17 年，保持质数生命周期的蝉类遭遇天敌的机会要远远小于非质数生命周期的蝉类.

如图，100 年内，生命周期为 7 年的蝉类和生命周期为 6 年的蝉类遭遇天敌的情况.

1	2	3	4	5			8	9	10
11		13		15	16	17		19	20
	22	23		25	26	27		29	
31	32	33	34			37	38	39	40
41		43	44	45	46	47			50
51	52	53		55		57	58	59	
61	62		64	65		67	68	69	
71		73	74	75	76			79	80
81	82	83		85	86	87	88	89	
	92	93	94	95		97		99	100

意大利著名作家保罗·乔尔达诺曾写过畅销书《质数的孤独》，这是一本关于童年经历、爱与孤独的小说. 小说的男女主人公就像两个孪生质数，彼此相近却永远无法靠近，该书有力地表现了人性的孤独，并深刻剖析了造成这种孤独的原因.

数学智慧讲堂

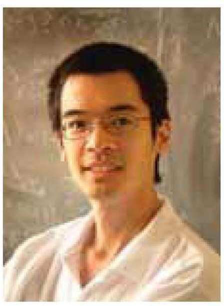
例 1 菲尔兹奖被誉为“数学界的诺贝尔奖”，只奖励 40 岁以下的数学家. 华人数学家丘成桐、陶哲轩分别于 1982 年、2006 年荣获此奖. 我们知道正整数中有无穷多个质数（素数），陶哲轩等证明了这样一个关于质数分布的奇妙定理：对任何正整数 k，存在无穷多组含有 k 个等间隔质数（素数）的数组. 例如当 $k=3$ 时，3，5，7 是间隔为 2 的 3 个质数；5，11，17 是间隔为 6 的 3 个质数；而______，______，______是间隔为 12 的 3 个质数.（由小到大排列，只写一组 3 个质数即可）

（《时代学习报》数学文化节试题）

分析与解 从简单的质数入手，可写两组：5，17，29 或 29，41，53.

与本例相关的著名孪生质数猜想：

是否存在无限多个质数 P，使得 $P+2$ 也是质数？如 3，5；5，7；11，13；17，19；…



陶哲轩，2008 年 11 月 20 日美国《探索》杂志上，20 位 40 岁以下的科学家被冠以“最具智慧的头脑”称号，华裔澳大利亚人陶哲轩名列第一. 13 岁获得国际数学奥林匹克竞赛的金牌，24 岁被评为终身教授，2006 年获得菲尔兹奖，时年 31 岁. 广泛的兴趣、丰富的知识储备、深刻的洞察力以及能敏锐地发现那些陌生的问题同自己最擅长领域的本质关系，是他最大的特色.

例 2 证明：质数有无穷多个.

分析与解 古希腊著名数学家欧几里得（公元前 330 年—公元前 275 年）在其不朽名著《几何原本》中汇总了几何学及数论，并证明了“质数有无穷多个”.

欧几里得认为：假设质数是有限的，只有 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 这 n 个，那么，其余所有自然数都是这 n 个质数的乘积，都为合数，即其他的所有自然数都能被 P_1 或 P_2…或 P_n 整除.

但 $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdots P_n + 1$ 无法被 P_1 或 P_2…或 P_n 整除，与上述假设矛盾.

故原假设不成立，从而证明了质数有无穷多个.

例 3　梅森质数

1644 年，17 世纪法国数学家马林·梅森在其著作中断言：当 $n\leqslant 257$ 时，只有 $n=2,3,5,7,13,17,19,31,67,127,257$ 时，2^n-1 才是质数.

2016 年 1 月 7 日，美国人柯蒂斯·库珀用“互联网梅森质数大搜索”的分布式计算方法发现了第 49 个梅森质数：$2^{74207281}-1$，这是已知的最大质数，有 22338618 位.

1903 年，在纽约一次学术会议上，大家要求著名数学家科尔教授作报告. 科尔走上讲台后，在黑板上计算了 $2^{67}-1$，然后又计算了 $193707721\times 761838257287$，两式计算结果完全相同. 科尔一个字也没说，微笑着回到座位上. 顿时，全场响起了热烈的掌声.

科尔虽然一字未说，但他将 $2^{67}-1$ 表示成了两个大于 1 的自然数之积，清楚地证明了 $2^{67}-1$ 不是质数这一问题，澄清了 200 多年来人们认为 $2^{67}-1$ 是质数这个错误的结论.

也许，这是有史以来最简短的一次学术报告了.

马林·梅森（1588—1648），法国天主教会修道士，在哲学、数学等领域造诣颇深，曾与费马、伽利略、帕斯卡、笛卡尔等人频繁通信交流，交往广泛的梅森成为欧洲科学家之间的桥梁和“信息交换站”.

例 4　最多能找到多少个两两不相等的正整数，使其中任意三个数的和为质数？说明你的理由.

（北京大学自主招生试题）

分析与解　因要求使其中任意三个数的和都是质数，故可将正整数按模 3 分类：$3k,3k+1,3k+2$，k 为正整数，由此展开讨论.

若三类数各取一个：$3a,3b+1,3c+2$，则 $3a+3b+1+3c+2=3(a+b+c+1)$，这三个数的和不是质数，故三类数中至多可以取到两类.

另外，若某一类数 $3k+i(i=0,1,2)$ 至少取到 3 个：$3a+i,3b+i,3c+i(i=0,1,2)$，则 $3a+i+3b+i+3c+i=3(a+b+c+i)(i=0,1,2)$，这三个数的和不是质数，故每类数中至多只能取 2 个.

综上所述，至多有 $2\times 2=4$ 个两两不等的正整数，使得任意三个数的和都是质数，例如 1,3,7,9.

质数为何与众不同？为什么要研究质数？

寻找最大质数，犹如物理学家寻找更小的基本粒子，天文学家在不断追寻不为人知的星体.这种单纯为满足求知欲的好奇心，正是人类突破知识领域的动力.

今天，人们已认识到：互联网交易的安全性是建立在“分解出大整数的约数（质数）是极其困难的问题”这一基础上的.

素数是人类追寻知识过程中最无奈的谜题. 怎样才能预测下一个素数？有何公式可以生成素数？在素数表面的噪音之下潜藏着意料之外的和谐. 1859 年，德国数学家黎曼提出一个关于这首“神秘乐曲”的大胆预言，这个预言的答案将在电子商务、量子力学和计算机科学等领域产生革命性的影响.

质数并不孤独.

2013 年 4 月 17 日，张益唐在《数学年刊》上投稿证明了“存在无数多个质数对 (p,q)，其中每一对中的质数之差，即 p 和 q 的距离不超过七千万”.

令人遗憾的是，尽管人类早在 2500 多年前就发现了质数，但时至今日仍未能完全揭开笼罩在质数上的神秘面纱. 欧拉曾感叹：“世界上有许多人类智慧无法解释的奥秘，看一眼质数表就会发现，它是如此毫无秩序，毫无规则可言.”

张益唐，1955 年生于上海，1978 年考入北京大学数学系. 他的证明在推动解决孪生素数猜想的道路上迈出了一大步，分别获得瑞典 2014 年度罗夫·肖克奖、美国麦克阿瑟天才奖.“我的心很平静，我不大关心金钱和荣誉，我喜欢静下来做自己想做的事情.”

数学之美探寻

1. **截尾质数**　73939133 这个数具有相当迷人的性质，不只是因为它是质数，还因为把最末位数字依序“截尾”后，余下的数仍是质数. 如：73939133，7393913，739391，73939，7393，739，73，7. 具有这样性质的数叫“截尾质数”.

更巧的是，它也是具有这种性质的最大数，总共有 83 个数具有这样的性质.

在 100 以内的质数中，最大的截尾质数是______.

（《时代学习报》数学文化节试题）

2. 若两位自然数 $\overline{ab}$ 是质数，且交换数字后的两位数 $\overline{ba}$ 也是质数，则称 $\overline{ab}$ 为“绝对质数”. 于是两位数中的所有“绝对质数”的乘积的个位数字是(　　)

A. 1　　B. 3　　C. 7　　D. 9

（“希望杯”邀请赛试题）

3. 埃拉托色尼筛选法是世界上最古老的一种求质数的方法. 在以后的几千年中，数学家又发明了一些找质数的方法. 1934 年，也就是埃拉托色尼筛选法问世两千多年后，一位年轻的印度学生辛答拉姆创造了如图所示的一个数表. 这种找质数的方法被称为“辛答拉姆筛法”.

你能发现其中质数的排列规律吗？

4	7	10	13	16	19…
7	12	17	22	27	32…
10	17	24	31	38	45…
13	22	31	40	49	58…
16	27	38	49	60	71…
…					

4. 若一个质数的各位数码经任意排列后仍然是质数，则称它是一个“绝对质数”. 例如 2，3，5，7，11，13(31)，17(71)，37(73)，79(97)，113(131，311)，199(919，991)，337(373，733)，…都是绝对质数. 求证：绝对质数的各位数码不能同时出现数码 1，3，7 与 9.

（青少年国际城市邀请赛试题）

参考答案

1. 79.

2. B　两位数中的绝对质数有 11,13,17,31,37,71,73,79,97. 要求乘积的个位数字,就是求 $1 \times 3 \times 7 \times 1 \times 7 \times 1 \times 3 \times 9 \times 7$ 的个位数字.

3. 显然,第一行(最上边一行)和第一列(最左边一列)中的数是相同的,在这一行(列)中,从第 2 个数起,每一个数与前面相邻的一个数相差 3,例如 $7-4=10-7=13-10=16-13=\cdots=3$;第二行(列)中,从第 2 个数起,每一个数与前面相邻的一个数相差 5;第三行(列)相差 7;第四行(列)相差 9;第五行(列)相差 11.

在这个数表中,随便找一个自然数 M,那么 $2M+1$ 一定不是质数. 例如,$M=4$,$2M+1=2\times4+1=9$,9 不是质数;$M=17$,$2\times17+1=35$,35 也不是质数. 而这个数表中没有的自然数 M,则 $2M+1$ 一定是质数. 比如,$M=5$ 不在数表中,$2\times5+1=11$,11 是质数,$M=8$,$2\times8+1=17$,17 也是质数.

4. 正难则反. 假设一个绝对质数同时含有数字 1,3,7,9,由此导出矛盾,这是解题的关键.

一个绝对质数如果同时含有数字 1,3,7,9,则在这个质数的十进制表示中,不可能含有数字 0,2,4,5,6,8,否则,通过适当排列后,这个数能被 2 或 5 整除.

设 N 是一个同时含有数字 1,3,7,9 的绝对质数.

因为 $k_0=7931$,$k_1=1793$,$k_2=9137$,$k_3=7913$,$k_4=7193$,$k_5=1937$,$k_6=7139$,被 7 除所得的余数分别是 0,1,2,3,4,5,6,所以,如下 7 个正整数:

$N_0=\overline{C_1\cdots C_{n-4}7931}=L\cdot10^4+k_0$,

$N_1=\overline{C_1\cdots C_{n-4}1793}=L\cdot10^4+k_1$,

…

$N_6=\overline{C_1\cdots C_{n-4}7139}=L\cdot10^4+k_6$,

其中一定有一个能被 7 整除,这个数就不是质数,矛盾.

故原假设不成立,即绝对质数的各位数码不能同时出现数码 1,3,7,9.

2 斐波那契数列

数学文化巡礼

斐波那契(1170—1250)是欧洲数学复兴的先驱，是13世纪最著名的意大利数学家. 他在青少年时期游历许多国家，学习了许多国家的数学知识并在回国后整理研究，于1202年写成名著《算盘书》.此书把阿拉伯数字介绍到欧洲，为阿拉伯数字在欧洲的流行起到了重要作用，是欧洲数学在经历漫长黑夜之后走向复兴的号角.

斐波那契在1228年的修订版中记载着有趣且后来成为著名问题的“兔子繁殖问题”.

兔子在出生两个月后就具有生殖能力，设有一对兔子每个月都生一对兔子，生出来的兔子在出生两个月之后，每个月也可以生一对兔子. 那么，从一对小兔开始，满一年可繁殖多少对兔子?

按这种规律，可得每个月的兔子数构成一个数列：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144…

这是《算盘书》中最著名的一道趣题，随后广泛流传于世界各地.

后人发现斐波那契数列揭示了自然界中的增长模式，广泛存在于动植物中，许多花朵的花瓣数、部分植物叶序等都与这一数列存在着关联. 这一数列被称为斐波那契数列，容易看出斐波那契数列$\{F_n\}$满足$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.

斐波那契数列从第3项开始，每一项都等于前两项之和.

所谓递推，就是在归纳的基础上，发现每一步与前一步或前几步之间的联系，更容易发现规律或证明通过归纳所猜测的规律的正确性.

《算盘书》改变了欧洲数学的整个面貌，成为欧洲各民族通用的“百科全书”，被作为教材使用了200多年.