浙大优学
一题一课

刷百题不如解透一题

低年级同步课后提升 / 毕业班专题自主复习

一题一课
高中数学

YITI YIKE
GAOZHONG SHUXUE

高考
热点追踪

主　　编　惠红民
本册主编　刘喜荣

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

一题一课

高中数学(高考热点追踪)

主　　编　惠红民
本册主编　刘喜荣

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

一题一课. 高中数学. 高考热点追踪/惠红民主编.
—杭州:浙江大学出版社,2016.8
ISBN 978-7-308-15688-2

Ⅰ.①一… Ⅱ.①惠… Ⅲ.①中学数学课—高中—题解—升学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 054091 号

一题一课. 高中数学(高考热点追踪)
主编 惠红民

策　　划 陈海权(电子信箱:chess332@163.com)
责任编辑 夏晓冬
责任校对 金佩雯　陈　宇
封面设计 林智广告
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷 杭州日报报业集团盛元印务有限公司
开　　本 889mm×1194mm　1/16
印　　张 7.5
字　　数 294 千
版 印 次 2016 年 8 月第 1 版　2016 年 8 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-15688-2
定　　价 18.80 元

浙江大学出版社发行中心联系方式:0571—88925591;http://zjdxcbs.tmall.com

目　录

刷百题不如解透一题

"学习解题的最好方法之一就是研究例题"

解题，无疑是学好数学的最佳途径。于是，刷题风起，题海浪涌，一时间，必刷题、必做题、高频题、母题等，不一而足。以为刷题是学习数学的魔方，题海则是成就学霸的金丹！固然，学习数学离不开解题，但沉溺题海并不意味着能考好数学，不如通过分析典型例题的解题过程来学会解题更加简短有效。

"题不在多，但求精彩"

"千淘万漉虽辛苦，吹尽狂沙始到金。"直白地表达出我们在"一题一课"系列的"一题"即例题选取上的态度与倾向。每一道例题不仅体现对概念的理解与思考价值，还体现知识与方法的代表性；每一道例题不仅解析精到、解法充满活力，更通过思维拓展，借题发挥，探索其中的内在规律和方法，达成"做一题，通一类，会一片"的目标 。

"多刷题，不如多反思"

"学而不思则罔，思而不学则殆。"做题需要产生效果、追求效益。**种种经验表明：题不是刷的越多越好，如果缺乏解题反思，不但浪费时间，甚至误导学习。**因此，本书在写作体例与排版上都突出了反思的意义与重要性，反思的过程既是对数学知识和解题方法的理解与强化的过程，也是学生内化解题能力的过程。

"解题是一种实践性的技能，就像游泳、滑雪或弹钢琴一样，只能通过模仿、练习和钻研才能占为己有"

例题帮助学生理解并学会运用同步教材所学知识及技能，然后通过变式练习（一课一练）内化落实，既满足低年级同步自主学习，又满足毕业班专题自主复习。

如果您是学生，请加入"一题一课学习交流"QQ群(205743216)，我们一起学习、提高；如果您是老师，请加入"一题一课教师研讨"QQ群(529481589)，我们一起研讨、探索。

"学习的本质，不在于记住哪些知识，而在于它触发了你的思考。"学习数学的道路上，祝愿您学会思考，体会成功！刷百题不如解透一题，"一题一课"系列图书还有哪些分册，请看本书封底。

第一章　函数与导数

第 1 课　集合的运算和思想

1. 集合是高中数学的基础性概念之一，其语言规范严谨简洁，要注意规范表示，主动运用.

2. 进行集合的运算时，尽可能数形结合，包括运用数轴表示，Venn 图等.

3. 集合的概念及运算的试题多与函数、方程、不等式等知识结合；有时新定义一种运算，考查阅读和理解能力.

第 1 题　(1)下列各选项中的两个集合，能使得 $B\subseteq(A\cap B)$，$(A\cup B)\subseteq B$ 同时成立的是　　(　　)

A. $A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{12}{x}\in\mathbf{N},x\in\mathbf{N}\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{12}{x}\in\mathbf{N}\right\}$

B. $A=\{x|y=x^2+1\}$，$B=\{(x,y)|y=x^2+1\}$

C. $A=\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{s|s=t^2-2t,t\in\mathbf{R}\}$

D. $A=(1,2)$，$B=\{(1,2)\}$

(2)设 G 为非空集合，对于给定的运算⊗，若满足：

(ⅰ)对任意 $a,b\in G$，都有 $a\otimes b\in G$；

(ⅱ)存在 $e\in G$，使得对一切 $a\in G$，都有 $a\otimes e=e\otimes a=a$，

则称集合 G 关于运算⊗为"融洽集". 现给出下列集合和运算：

①集合 $G=\mathbf{N}$，运算⊗为整数的加法；

②集合 $G=\{$二次三项式$\}$，运算⊗为多项式的加法；

③集合 $G=\{$平面向量$\}$，运算⊗为平面向量的加法；

④集合 $G=\{$虚数$\}$，运算⊗为复数的乘法.

其中集合 G 关于运算⊗为"融洽集"的是______.(写出其中所有"融洽集"的序号)

【分析】　第(1)题的题干所给的两个关系式联结了集合运算的交集运算和并集运算，稍显复杂. 结合集合运算的概念和 Venn 图，可以得到 $A=B$. 接下来逐一检查各个选项. 首先需要分清楚构成集合的元素是什么，有什么特征，注意每一个细微的差别. 从元素的层面分析集合，把握集合，而不是被形式所迷惑或者干扰. 描述法表示集合的格式为 $\{x|p(x),x\in\mathbf{M}\}$，满足条件 p 且在集合 M 中的元素. 需要认真观察、运算，列出集合中的元素或化简集合中的条件. 例如选项 A 中，集合 A 要求元素是自然数，而集合 B 并没有这个要求.

第(2)题新定义了名词"融洽集"，定义本身就是"充要条件"，是最好的"判定定理"，定义给出了检查一个集合是否为"融洽集"的两个条件. 要留意定义中的"任意""存在""一切"这样的量词，准确领会定义. 具体运用定义解决问题时，一般是按照题目所给的顺序逐一检查. 各个命题之间不见得有必然的因果关系，但往往是由易到难，由熟悉到陌生，有时候前面命题的解决对于认识后面的问题有所提示.

【解析】　(1)首先化简题干所给的条件. 对于任意集合 A,B，一定有 $(A\cap B)\subseteq B$，结合已知条件 $B\subseteq(A\cap B)$，从而 $B=A\cap B\Leftrightarrow B\subseteq A$. 同理，由 $(A\cup B)\subseteq B$ 可知 $A\subseteq B$. 综上，题干中两个条件同时成立当且仅当集合 $A=B$.

考察选项 A，集合 A 中的元素要求是 12 的正整数因数，$A=\{1,2,3,4,6,12\}$，集合 B 对于元素的要求是使得 $\dfrac{12}{x}\in\mathbf{N}$，这时候的元素可以取正整数以外的实数，比如 0.1. 根据真子集的定义，集合 A 是集合 B 的真子集，用符号表示为 $A\subsetneqq B$.

选项 B 中，两个集合所研究的数学对象不同，一个是数集，一个是点集，"两"集合不相等.

选项 C 中，两个集合的代表元素实质上是一样的，都是实数，分别表示两个函数的值域，化简知 $A=B=[1,+\infty)$.

选项 D 中，A 为区间，B 为一个点构成的单元素集合，两者不相等. 正确答案为 C.

(2)①$G=\mathbf{N}$，⊗为整数的加法，满足对任意 $a,b\in G$，都有 $a\otimes b\in G$，且令 $e=0$，有 $a\otimes 0=0\otimes a=a$，所以①符合要求；

②$G=\{$二次三项式$\}$，⊗为多项式的加法，两个二次三项式相加得到的可能不是二次三项式，所以②不符合要求；

③$G=\{$平面向量$\}$，⊗为平面向量的加法，取 $e=\mathbf{0}$，满足要求，所以③符合要求；

④$G=\{$虚数$\}$，$\oplus$为复数的乘法，两个虚数相乘得到的可能是实数，所以④不符合要求，

这样 G 关于运算⊗为"融洽集"的有①③.

【经验分享】　(1)题目的化简意识. 化简题干中的条件使它呈现得更加简单、熟悉，化简各个选项，使集合中的元素呈现得更加直观，寻求形式上和本质上更多的共同点.

(2)新定义题型中，以集合语言等数学符号语言叙述一个新的概念或性质. 需要克服畏难情绪，要给自己一个积极的心理暗示. 按照题目的叙述顺序，也就是定义展开的顺序，认真读题. 试着寻找熟悉的语言背景或者知识背景，争取将题中的数学语言和某些生活事例或者熟悉的已学的数学知识联系起来，以期降低思维的抽象程度. 比如本题中联想实数运算的封闭性，以及数字 0、1 在实数运算中的某些特殊性质.

(3)对于集合的关系或者运算，要善于从元素的角度分析问题，落实"元素分析法". 在后面的一课一练的相关练习中，注意体会这一方法.

易错追踪

一课一练 1（答案及解析见 P74）

1. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$\complement_U(A\cup B)=\{1,2\}$，$A\cap(\complement_U B)=2\{2,4\}$，则集合 B 等于（　　）

A. $\{1,2,3,4\}$　　B. $\{1,2,3,4,5\}$

C. $\{5,6,7,8,9\}$　　D. $\{7,8,9\}$

2. 集合 $M=\{x|x^2-2x-3<0\}$，$N=\{x|x>a\}$，若 $M\subseteq N$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(-\infty,-1)$

C. $[3,+\infty)$　　D. $(3,+\infty)$

3. 已知全集为 $\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|2^x\geqslant 1\}$，$B=\{x|x^2-6x+8\leqslant 0\}$，则 $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B$ 等于（　　）

A. $\{x|x\leqslant 0\}$　　B. $\{x|2\leqslant x\leqslant 4\}$

C. $\{x|0\leqslant x<2$ 或 $x>4\}$　　D. $\{x|0\leqslant x<2$ 或 $x\geqslant 4\}$

4. 满足 $M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，且 $M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$ 的集合 M 的个数是（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

5. 设 A,B 是有限集，定义 $d(A,B)=\mathrm{card}(A\cup B)-\mathrm{card}(A\cap B)$，其中 $\mathrm{card}(A)$ 表示有限集 A 中的元素个数. 命题①：对任意有限集 A,B，“$A\neq B$”是“$d(A,B)>0$”的充分必要条件；命题②：对任意有限集 A,B,C，$d(A,C)\leqslant d(A,B)+d(B,C)$.（　　）

A. 命题①和命题②都成立

B. 命题①和命题②都不成立

C. 命题①成立，命题②不成立

D. 命题①不成立，命题②成立

6. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，用 U 的子集可表示由 0，1 组成的 6 位字符串，如$\{2,4\}$表示的是第 2 个字符为 1，第 4 个字符为 1，其余均为 0 的 6 位字符串 010100，并规定空集表示的字符串为 000000.

(1)若 $M=\{2,3,6\}$，则 $\complement_U M$ 表示的 6 位字符串为________；

(2)若 $A=\{1,3\}$，集合 $A\cup B$ 表示的字符串为 101001，则满足条件的集合 B 的个数是________.

7. 若集合 A 具有以下性质：①$0\in A$，$1\in A$；②若 $x,y\in A$，则 $x-y\in A$；且 $x\neq 0$ 时，$\dfrac{1}{x}\in A$，则称集合 A 是“完美集”. 给出以下结论：

①集合 $B=\{-1,0,1\}$是“完美集”；

②有理数集 $\mathbf{Q}$ 是“完美集”；

③设集合 A 是“完美集”，若 $x,y\in A$，则 $x+y\in A$；

④设集合 A 是“完美集”，若 $x,y\in A$，则必有 $xy\in A$；

⑤对任意的一个“完美集”A，若 $x,y\in A$，且 $x\neq 0$，则必有 $\dfrac{y}{x}\in A$.

其中正确结论的序号是____________________.

8. 已知：对于给定的 $q\in\mathbf{N}^*$ 及映射 $f:A\to B$，$B\subseteq\mathbf{N}^*$，若集合 $C\subseteq A$，且 C 中所有元素在 B 中对应的元素之和大于或等于 q，则称集合 C 为集合 A 的“好子集”. 对于 $q=3$，$A=\{a,b,c,d\}$，映射 $f:x\to 1$，$x\in A$，那么集合 A 的所有“好子集”的个数为________.

9. 设整数 $n\geqslant 3$，集合 $P=\{1,2,3,\cdots,n\}$，集合 A,B 是集合 P 的两个非空子集. 记 a_n 为所有满足集合 A 中的最大数小于集合 B 中的最小数的集合对(A,B)的个数.

(1)求 a_3；

(2)求 a_n.

10. 已知数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n,n\geqslant 3)$具有性质 P：$\forall i,j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$，$a_j+a_i$ 与 a_j-a_i 两数中至少有一个属于 A.

(1)分别判断数集$\{0,1,3\}$与数集$\{0,2,4,6\}$是否具有性质 P，说明理由；

(2)求证：$a_1+a_2+\cdots+a_n=\dfrac{n}{2}a_n$.

易错追踪

第2课 数学离不开逻辑

1. 命题及其关系、充分条件与必要条件的考查频度较高,从难度看,属于中等题或容易题. 但也要充分重视,做到万无一失.

2. 简单的逻辑联结词和存在量词与全称量词恰当运用,尽显数学语言的严谨精确. 全(特)称命题的否定及其真假判断,是高考的热点.

第2题 (1)下列说法正确的是 ( )

A. 命题"$\forall x\in\mathbf{R}$, $e^x>0$"的否定是"$\exists x\in\mathbf{R}$, $e^x>0$"

B. 命题"已知 $x,y\in\mathbf{R}$,若 $x+y\neq 3$,则 $x\neq 2$ 或 $y\neq 1$"是真命题

C. "$x^2+2x\geqslant ax$ 在 $x\in[1,2]$ 上恒成立"的一个充分不必要条件是"$a\leqslant 4$"

D. 命题"若 $a=-1$,则函数 $f(x)=ax^2+2x-1$ 只有一个零点"的逆命题为真命题

(2)若集合$\{a,b,c,d\}=\{1,2,3,4\}$且下列四个关系中:①$a=1$;②$b\neq 1$;③$c=2$;④$d\neq 4$ 有且只有一个是正确的,则符合条件的有序数组(a,b,c,d)的个数是________.

【分析】 (1)各选项分别命制,综合考查此单元的基本概念. 选项A考查命题的否定,注意与否命题的区别. 首先改写量词,"任意"的否定形式是"存在",其次改写主语所满足的条件为原来条件的对立. 选项B复合命题判断真假时,要考虑逻辑连结词所对应的真值表. 选项C不等式恒成立问题往往转化为函数的最值问题,这时要注意不等式两边变量是独立取值还是相互依存. 充要条件的问题要分清楚谁是条件,谁是结论. 选项D命题的逆命题只需交换条件和结论.

(2)逻辑推理的同时,结合树状图直观地计数. 逐一考查四个关系,同时注意它们之间的联系,比如由集合中元素的互异性,$a=1\Rightarrow b\neq 1$. 本题间接考查命题的"且""或""非"等逻辑连结词和命题的真假.

【解析】 (1)选项A:"$\forall x\in\mathbf{R}$, $e^x>0$"的否定是"$\exists x_0\in\mathbf{R}$, $e^x\leqslant 0$",所以命题错误;选项B:该命题的逆否命题"$x=2$ 且 $y=1$ 时,$x+y=3$"是真命题;选项C:"$x^2+2x\geqslant ax$ 在 $x\in[1,2]$ 上恒成立"$\Leftrightarrow$"$\left(\dfrac{x^2+2x}{x}\right)_{\min}\geqslant a_{\max}$ 在 $x\in[1,2]$ 上恒成立",即充要条件为"$a\leqslant 3$",而 $a\leqslant 4$ 不能推出 $a\leqslant 3$,即"$a\leqslant 4$"不是"$a\leqslant 3$"的充分条件,所以命题错误;选项D:逆命题是"$f(x)=ax^2+2x-1$ 有一个零点时,$a=-1$",因为 $f(x)$ 有一个零点时,$a=-1$ 或 $a=0$;所以命题错误. 故选B.

(2)四个关系式中有且只有一个是正确的,逐一考查.

如果四个关系中唯一正确的是①,由集合中元素的互异性,如果①$a=1$ 成立,那么一定有 $b\neq 1$,从而①②都对,与已知条件矛盾,没有符合条件的有序数组(a,b,c,d);

如果四个关系中唯一正确的是②,那么其他三个都错,即有序数组(a,b,c,d)必须满足的条件是 $a\neq 1$, $b\neq 1$, $c\neq 2$, $d=2$,结合表格语言,先填写 $d=4$,接着推得1对应的只能是 c,于是有表1;

a	b	c	d
2	3	1	4
3	2	1	4

表1

a	b	c	d
2	1	4	3
3	1	4	2
4	1	3	2

表2

如果唯一正确的是③,那么其他三个都错,即有序数组(a,b,c,d)必须满足的条件是 $a\neq 1$, $b=1$, $c=2$, $d=4$. 显然,只能有$(3,1,2,4)$一种情况;

如果唯一正确的是④,那么其他三个都错,即有序数组(a,b,c,d)必须满足的条件是 $a\neq 1$, $b=1$, $c\neq 2$, $d\neq 4$. 先填写 b 的值. 其余三个数的取值,结合表格不难获得,见表2.

综上,符合条件的有序数组(a,b,c,d)共有6个.

【经验分享】 (1)全称命题的否定是特称命题,并且一真一假;原命题与逆否命题是同真同假,当一个命题中出现较多的否定词汇,命题的真假不易判断时,往往可以转化为判断原命题的逆否命题的真假,因为它们是等价命题. 另外,否命题和逆命题也是等价命题.

选项C中,q 的一个充分不必要条件是 p,那么 p 是 q 的充分不必要条件,即 $p\Rightarrow q$,且可写作"$q\nRightarrow p$". 要读准题目.

(2)学习概念的最终目的是为了运用它解决问题. 在实际问题中,灵活自如地运用逻辑知识进行高效的严谨的推理,是逻辑学习成果的检验. 本题中,如果罗列所有情况,一一检验,会很麻烦. 运用集合与逻辑的知识,可以完美地解决问题. 四个关系式,恰有一个成立,所以可以逐一考虑,各个击破. 同时注意四个式子之间的某些联系,适当简化讨论. 恰当运用表格,或者树状图的局部,可以使得有序数组(a,b,c,d)的罗列更加清楚. 总之,这个问题既考查怎么想,也考查怎样具体落实,问题的解决是数学语言、数学方法的较为综合的体现.

学习心得

一课一练 2(答案及解析见 P74)

1. 已知集合 $A=\{1,a\}$，集合 $B=\{1,2,3\}$，则“$a=3$”是“$A\subseteq B$”的　　(　　)

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 设集合 $A=\{x|x-2>0,x\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{x|x<0,x\in\mathbf{R}\}$，集合 $C=\{x|x(x-2)>0,x\in\mathbf{R}\}$，则“$x\in A\cup B$”是“$x\in C$”的　　(　　)

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{1}{2}<2^x<8,x\in\mathbf{R}\right.\right\}$，集合 $B=\{x|-1<x<m+1,x\in\mathbf{R}\}$，若“$x\in B$ 成立”的一个充分不必要条件是“$x\in A$”，则实数 m 的取值范围是________.

4. 已知命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$mx^2+1\leqslant 0$，命题 q：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+mx+1>0$，若 $p\vee q$ 为假命题，则实数 m 的取值范围为　　(　　)

A. $m\geqslant 2$　　B. $m\leqslant -2$
C. $m\leqslant -2$ 或 $m\geqslant 2$　　D. $-2\leqslant m\leqslant 2$

5. 在一次跳伞训练中，甲、乙两位学员各跳一次. 设命题 p 是“甲降落在指定范围”，命题 q 是“乙降落在指定范围”，则命题“至少有一位学员没有降落在指定范围”可表示为　　(　　)

A. $(\neg p)\vee(\neg q)$　　B. $p\vee(\neg q)$
C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D. $p\vee q$

6. 下列命题正确的是　　(　　)

A. 命题“存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $e^{x_0}\leqslant 0$”的否定是“不存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $e^{x_0}>0$”
B. 命题“存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $x_0^2-1<0$”的否定是“任意 $x\in\mathbf{R}$，均有 $x^2-1>0$”
C. 命题“若 $x=3$，则 $x^2-2x-3=0$”的否命题是“若 $x\neq 3$，则 $x^2-2x-3\neq 0$”
D. 若命题“$p\vee q$”为假命题，则命题 p 与命题 q 必一真一假

7. 下列有关命题的说法中正确的是　　(　　)

A. 命题“若 $x^2=1$，则 $x=1$”的否命题为“若 $x^2=1$，则 $x\neq 1$”
B. “$x=-1$”是“$x^2-5x-6=0$”的必要而不充分条件
C. 命题“若 $x=y$，则 $\sin x=\sin y$”的逆否命题为真命题
D. 命题“$\exists x\in\mathbf{R}$ 使得 $x^2+x+1<0$”的否定是“$\forall x\in\mathbf{R}$ 均有 $x^2+x+1<0$”

8. 已知命题 p：设 $a,b\in\mathbf{R}$ 则“$a+b>4$”是“$a>2$ 且 $b>2$”的必要而不充分条件；
命题 q：“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $x_0^2-x_0>0$”的否定是“$\forall x\in\mathbf{R}$，均有 $x^2-x<0$”；
在命题①$p\wedge q$；②$(\neg p)\vee(\neg q)$；③$p\vee(\neg q)$；④$(\neg p)\vee q$ 中，真命题的序号是　　(　　)

A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

9. 已知集合 $A=\left\{y\left|y=x^2-\frac{3}{2}x+1,x\in\left[\frac{3}{4},2\right]\right.\right\}$，集合 $B=\{x|x+m^2\geqslant 1\}$. 命题 p：$x\in A$，命题 q：$x\in B$，并且命题 p 是命题 q 的充分条件，则实数 m 的取值范围为________.

10. 已知 $f(x)=m(x-2m)(x+m+3)$，$g(x)=2^x-2$. 若同时满足下列条件：
① $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)<0$ 或 $g(x)<0$；
② $\exists x\in(-\infty,-4)$，$f(x)g(x)<0$，
则 m 的取值范围是________.

11. 已知 $c>0$，且 $c\neq 1$，设命题 p：函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；命题 q：函数 $f(x)=x^2-2cx+1$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上为增函数，若“p 且 q”为假，“p 或 q”为真，求实数 c 的取值范围.

易错追踪

第3课 深挖函数的概念

1. 函数是高中数学的核心概念，可以从“变量说”“映射说”和“关系说”等几个层次不断加深理解.

2. 高考中常以基本初等函数为载体，与不等式结合考查函数的定义域、值域，解析式的求法以及分段函数的求值等问题.

3. 对于新定义的函数性质，也常以创新题目的形式出现.

第3题 (1)已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x+1|,-7\leqslant x\leqslant 0,\\ \ln x,e^{-2}\leqslant x\leqslant e,\end{cases}$ $g(x)=x^2-2x$，设 a 为实数，若存在实数 m，使 $f(m)-2g(a)=0$，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $[-1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

C. $[-1,3]$　　D. $(-\infty,3]$

(2)设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果 $\forall x\in D$，存在唯一的 $y\in D$，使 $\dfrac{f(x)+f(y)}{2}=c$（c 为常数）成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上的“均值”为 c. 已知四个函数：①$y=x^3(x\in\mathbf{R})$；②$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x(x\in\mathbf{R})$；③$y=\ln x(x\in(0,+\infty))$；④$y=2\sin x+1(x\in\mathbf{R})$.

上述四个函数中，满足在定义域上的“均值”为1的函数是________.（填上所有满足条件函数的序号）

【分析】 (1)$f(x)$ 是分段函数，分段求出函数值的变化范围，然后求并集，得出其值域 $[-2,6]$. 考察式子 $f(m)-2g(a)=0$，其中的两个函数的自变量采用不同字母，则意味着它们各自独立取值，所以只要解不等式 $2g(a)\in[-2,6]$ 即可.

(2)“如果 $\forall x\in D$，存在唯一的 $y\in D$，使 $\dfrac{f(x)+f(y)}{2}=c$（c 为常数）成立.”品读这个新定义，不难发现和函数的定义“对于任意 x，有唯一确定的 y 与之对应”有些类似. 受此启发，在各个具体的函数中考察对应关系是不是一一对应，以及函数值的分布范围.

【解析】 (1)当 $-7\leqslant x\leqslant 0$ 时，$f(x)=|x+1|\in[0,6]$，当 $e^{-2}\leqslant x\leqslant e$ 时，$f(x)=\ln x\in[-2,1]$，故 $f(x)\in[-2,6]$，所以只需要 $2g(a)\in[-2,6]$，即 $-1\leqslant a^2-2a\leqslant 3\Rightarrow -1\leqslant a\leqslant 3$.

(2)①对于函数 $y=x^3$，定义域为 $\mathbf{R}$，设 $x\in\mathbf{R}$，由 $\dfrac{x^3+y^3}{2}=1$，得 $y^3=2-x^3$，所以 $y=\sqrt[3]{2-x^3}\in\mathbf{R}$，所以函数 $y=x^3$ 是定义域上“均值”为1的函数；

②对于函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，定义域为 $\mathbf{R}$，设 $x\in\mathbf{R}$，由 $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^y}{2}=1$，得 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^y=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，当 $x=-2$ 时，$2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=-2$，不存在实数 y 的值，使 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^y=-2$，所以该函数不是定义域上“均值”为1的函数；

③对于函数 $y=\ln x$，定义域是 $(0,+\infty)$，设 $\dfrac{\ln x+\ln y}{2}=1$，得 $\ln y=2-\ln x$，则 $y=e^{2-\ln x}\in(0,+\infty)$，所以该函数是定义域上“均值”为1的函数；

④对于函数 $y=2\sin x+1$，定义域为 $\mathbf{R}$，设 $x\in\mathbf{R}$，由 $\dfrac{2\sin x+1+2\sin y+1}{2}=1$ 得 $\sin y=-\sin x$，因为 $-\sin x\in[-1,1]$，所以存在实数 y，使得 $\sin y=-\sin x$ 成立，但这时 y 的取值不唯一，所以函数 $y=2\sin x+1$ 不是定义域上“均值”为1的函数.

所以①③符合条件.

【经验分享】 中学阶段里函数概念的核心是一种对应法则和一种关系. 如本例题所示，阅读、领会、生成、揭示一种法则，并且根据法则进行必要的运算，是解决函数问题的根本方法. 所选题目形式新颖，但是考查内容中规中矩. 解题时需要认真读题，必要时反复品味关键词句，力争和熟悉的某个（些）性质建立哪怕是微弱的联系.

除了教材上的几种基本初等函数以外，高考中常常涉及一些比较著名的函数，如符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$；取整函数 $f(x)=[x]$，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数；狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1,x\in\mathbf{Q},\\0,x\notin\mathbf{Q},\end{cases}$ 这是近年来的考查热点之一.

学习心得

一课一练3(答案及解析见 P75)

1. 设 $f(x)=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}1,x\text{ 为有理数},\\0,x\text{ 为无理数},\end{cases}$ 则 $f(g(\pi))$ 的值为（　　）

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. π

2. 函数 $f(x)=\dfrac{\ln(2+x-x^2)}{|x|-x}$ 的定义域为（　　）

A. $(-1,2)$　　B. $(-1,0)\cup(0,2)$

C. $(-1,0)$　　D. $(0,2)$

3. 某学校要召开学生代表大会，规定各班每 10 人推选一名代表，当各班人数除以 10 的余数大于 6 时再增选一名代表. 那么，各班可推选代表人数 y 与该班人数 x 之间的函数关系用取整函数 $y=[x]$（$[x]$ 表示不大于 x 的最大整数）可以表示为（　　）

A. $y=\left[\dfrac{x}{10}\right]$　　B. $y=\left[\dfrac{x+3}{10}\right]$

C. $y=\left[\dfrac{x+4}{10}\right]$　　D. $y=\left[\dfrac{x+5}{10}\right]$

4. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，且 $0<f(-1)=f(-2)=f(-3)\leqslant 3$，则（　　）

A. $c\leqslant 3$　　B. $3<c\leqslant 6$

C. $6<c\leqslant 9$　　D. $c>9$

5. 对于函数 $f(x)$，若存在区间 $A=[m,n]$，使得 $\{y|y=f(x),x\in A\}=A$，则称函数 $f(x)$ 为"可等域函数"，区间 A 为函数 $f(x)$ 的一个"可等域区间". 下列函数中存在唯一"可等域区间"的"可等域函数"为（　　）

A. $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$　　B. $f(x)=2x^2-1$

C. $f(x)=2^x+1$　　D. $f(x)=\log_2(2x-2)$

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-6x+6,x\geqslant 0,\\3x+4,x<0,\end{cases}$ 若互不相等的实数 x_1,x_2,x_3 满足 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，则 $x_2+x_3=$________；$x_1+x_2+x_3$ 的取值范围是________.

7. 定义：$[x]$（$x\in\mathbf{R}$）表示不超过 x 的最大整数，例如 $[1.5]=1$，$[-0.5]=-1$. 给出下列结论：

①函数 $y=[\sin x]$ 是奇函数；

②函数 $y=[\sin x]$ 是周期为 2π 的周期函数；

③函数 $y=[\sin x]-\cos x$ 不存在零点；

④函数 $y=[\sin x]+[\cos x]$ 的值域是 $\{-2,-1,0,1\}$.

其中正确的是________.（填上所有正确命题的编号）

8. 已知实数 $a\neq 0$，函数 $f(x)=\begin{cases}2x+a,x<1,\\-x-2a,x\geqslant 1,\end{cases}$ 若 $f(1-a)=f(1+a)$，则 $a=$________.

9. 已知 $f(x)=\dfrac{bx+1}{2x+a}$，其中 a,b 为常数，且 $ab\neq 2$，若 $f(x)\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)=k$ 为常数，则 $k=$________.

10. 已知 x 为实数，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[1.2]=1$，$[-1.2]=-2$，$[1]=1$. 对于函数 $f(x)$，若存在 $m\in\mathbf{R}$ 且 $m\notin\mathbf{Z}$ 使得 $f(m)=f([m])$，则称函数 $f(x)$ 是"Ω 函数". 判断函数 $f(x)=x^2-\dfrac{1}{3}x$，$g(x)=\sin\pi x$ 是否是"Ω 函数".

11. 行驶中的汽车在刹车时由于惯性作用，要继续往前滑行一段距离才能停下，这段距离叫作刹车距离. 在某种路面上，某种型号汽车的刹车距离 y（米）与汽车的车速 x（千米/时）满足下列关系：$y=\dfrac{x^2}{200}+mx+n$（m,n 是常数）. 如图 3-1 是根据多次实验数据绘制的刹车距离 y（米）与汽车的车速 x（千米/时）的关系图.

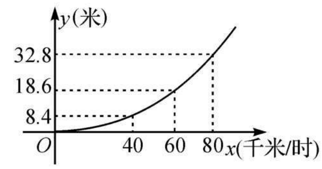


图 3-1

(1)求出 y 关于 x 的函数表达式；

(2)如果要求刹车距离不超过 25.2 米，求行驶的最大速度.

易错追踪

第 4 课　善用函数的图象

函数的图象是函数的表示法之一.图象生动直观地表现出函数的性质,把图象和解析式结合起来是研究函数问题的一个有力的方法.高考的基本要求包括以下几点:

(1)对于基本的函数,须熟知它们的图象;

(2)能够结合解析式和图象变换的有关知识,画出不太复杂的函数的图象;

(3)熟知函数的性质在图象中的直观反映,会读取图中的有用信息;

(4)能主动自觉地寻求图象并借此解决问题.

第 4 题　(1)已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+c}$ 的图象如图 4-1 所示,则 a,b,c 的大小关系是　　(　　)

A. $a>b>c$

B. $c>a>b$

C. $b>a>c$

D. $a>c>b$

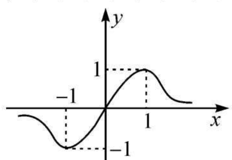


图 4-1

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}, x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right), \\ 2^{x-1}, x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right), \end{cases}$ 若存在 x_1,x_2,当 $0\leqslant x_1<x_2<2$ 时,$f(x_1)=f(x_2)$,则 $x_1f(x_2)$ 的取值范围是________.

【分析】　(1)中的函数不是基本初等函数,对于字母 a,b,c 的几何意义缺乏直观认识,难以直接比较大小.但是解析式形式给定,根据图象的特殊点、对称性、单调性、值域、渐进性等等综合考虑,应能求出各个字母的取值,进而比较其大小.

(2)中的函数由两段基本初等函数拼接而成.观察图象,包括单调性、各段的区间端点处的函数值等,对照解析式,准确地列出条件,应能把 x_1,x_2 互相表示,以其中一个为元,同时注意该元的取值范围,建立函数关系式来求值域,即为所求的取值范围.

【解析】　(1)由定义在 **R** 上的奇函数,知 $f(0)=0$,$b=0$,由题给的点坐标知 $f(1)=1$,即 $\dfrac{a}{1+c}=1$.另一方面,由函数定义域为 **R** 知,$c>0$,从而一定有 $a>0$,当 $x>0$ 时,$f(x)=\dfrac{ax}{x^2+c}=\dfrac{a}{x+\dfrac{c}{x}}\leqslant\dfrac{a}{2\sqrt{c}}=1$,由以上两式可以解出 $a=2,c=1$.

于是,$a>c>b$.

对于函数 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$,结合性质作出图象加以对比.符合题意.

以上也可以由函数的单调性和极值加以分析.由图象可得,函数在 $x=1$ 处取得极大值,从而 $f'(1)=0$.

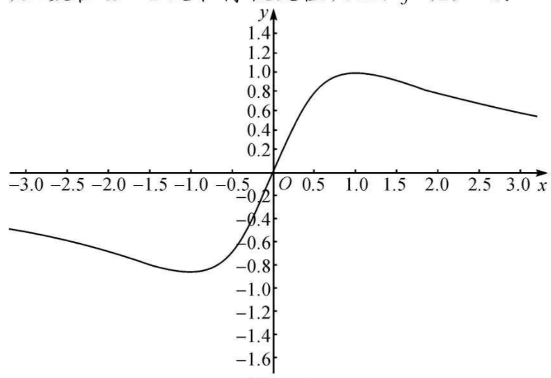


图 4-2

由 $f(x)=\dfrac{ax}{x^2+c}$ 可得 $f'(x)=\dfrac{-ax^2+ac}{(x^2+c)^2}$,所以 $f'(1)=\dfrac{a(c-1)}{(1+c)^2}=0$,结合前式,所以 $c=1,a=2$.

(2)如图 4-3,结合题给条件和图象,容易知道:

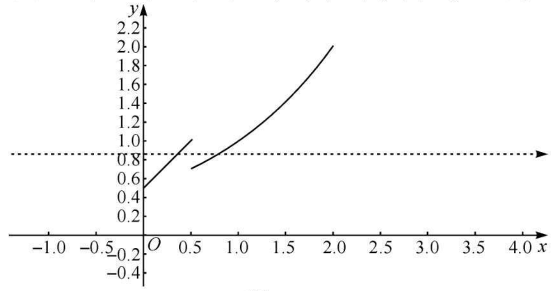


图 4-3

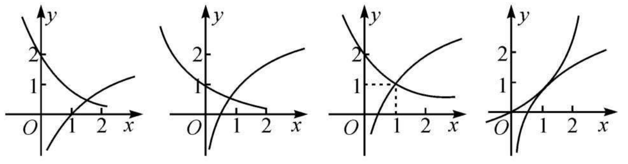
$\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\leqslant x_1<\dfrac{1}{2}$,$\dfrac{1}{2}\leqslant x_2<1$,$x_1+\dfrac{1}{2}=2^{x_2-1}$,于是 $x_1f(x_2)=x_12^{x_2-1}=x_1\left(x_1+\dfrac{1}{2}\right)$,$\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\leqslant x_1<\dfrac{1}{2}$,转化为关于 x_1 的二次函数在给定区间上的值域问题,易得 $x_1f(x_2)$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{2-\sqrt{2}}{4},\dfrac{1}{2}\right)$.

【经验分享】　结合图象分析是解决函数问题的一种有效途径.第(1)题,要全面把握图象所提供的确切信息,联系函数解析式,得出代数表达形式来进行运算.第(2)题,题目中的隐含条件较多,如果脱离图象,只是由解析式来列代数表达式,比较盲目,比如对于变量准确范围的确定,并不容易.需要有自觉运用函数图象的意识和习惯.画图和用图,两手都要硬.

学习心得

一课一练 4(答案及解析见 P76)

1. 函数 $f(x)=1+\log_2 x$ 与 $g(x)=2^{1-x}$ 在同一直角坐标系中的图象大致是 (　　)

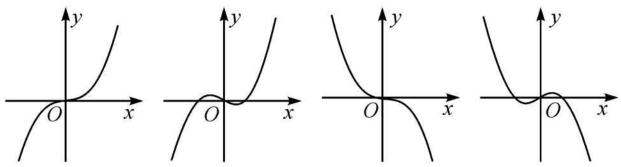


A　　B　　C　　D

2. 将函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后,得到一个偶函数的图象,则 φ 的一个可能取值为 (　　)

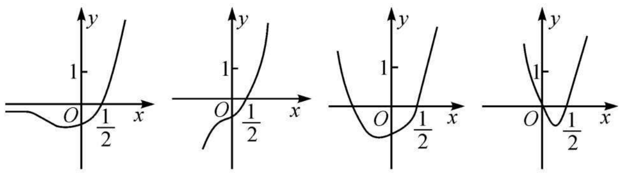
A. $\frac{3\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. 0　　D. $-\frac{\pi}{4}$

3. 函数 $f(x)=x-\sin x$ 的大致图象是 (　　)



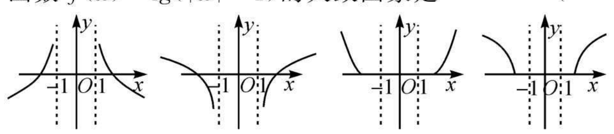
A　　B　　C　　D

4. 函数 $y=(2x-1)e^x$ 的大致图象是 (　　)



A　　B　　C　　D

5. 函数 $f(x)=\lg(|x|-1)$ 的大致图象是 (　　)



A　　B　　C　　D

6. 如图 4-4,把周长为 1 的圆的圆心 C 放在 y 轴上,顶点 $A(0,1)$,一动点 M 从点 A 开始按逆时针方向绕圆运动一周,记走过的弧长 $\overset{\frown}{AM}=x$,直线 AM 与 x 轴交于点 $N(t,0)$,则函数 $t=f(x)$ 的大致图象为 (　　)

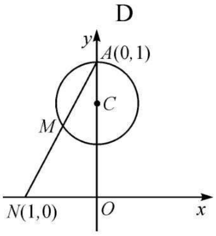
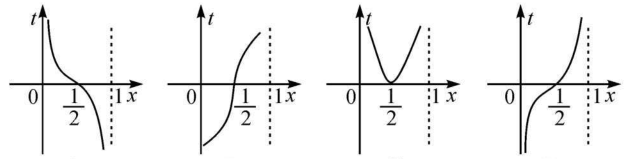


图 4-4



A　　B　　C　　D

7. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图 4-5 所示,则函数 $y=\log_{0.5}f(x)$ 的大致图象是 (　　)

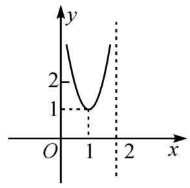
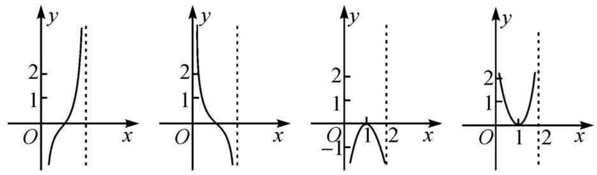


图 4-5



A　　B　　C　　D

8. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图 4-6 所示,在区间 $[a,b]$ 上可找到 $n(n\geqslant 2)$ 个不同的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,使得 $\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\frac{f(x_n)}{x_n}$,则 n 的取值范围为 (　　)

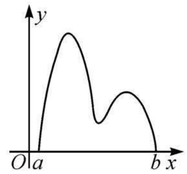


图 4-6

A. $\{2,3\}$　　B. $\{2,3,4\}$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{3,4,5\}$

9. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 3 的函数,当 $x\in[0,3)$ 时,$f(x)=\left|x^2-2x+\frac{1}{2}\right|$,$y=f(x)-a$ 在区间 $[-3,4]$ 上有 10 个零点(互不相同),则实数 a 的取值范围是________.

10. 已知 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$,$f(x+2)=f(x)$,$x\in[0,1]$ 时 $f(x)=1-|2x-1|$. 定义:$f_1(x)=f(x)$,$f_2(x)=f(f_1(x))$,$\cdots$,$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$,$n\geqslant 2$,$n\in\mathbf{N}$,则 $f_3(x)=\frac{9}{8(x-1)}$ 在 $[-1,3]$ 内所有不等实根的和为________.

易错追踪

第5课　活用函数的性质

1.基本初等函数的性质必须熟记于心.

2.单调性是解决很多函数问题，如零点、值域、最值等的重要推理依据.

3.函数的奇偶性、周期性、单调性的综合应用是高考的热点之一.

第5题　(1)若关于 x 的函数 $f(x)=\dfrac{tx^2+2x+t^2+\sin x}{x^2+t}(t>0)$ 的最大值为 M，最小值为 N，且 $M+N=4$，则实数 $t=$________.

(2)已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数 $f(x)$ 是奇函数，且满足 $f(x-2)=-f(x)$，在 $[0,1]$ 上的最大值为2，有下列命题：

①$f(x)$是一个周期函数；

②$f(x)$的图象关于直线 $x=2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 对称；

③$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的最小值是 -2；

④$f(x)$在区间 $[-1,1]$ 上单调递增，

其中所有真命题的序号为________.

【分析】　(1)粗略地看，此题是与最值有关的问题，从而可能会想到结合单调性求最值，陷入运算的泥潭.仔细分析，可以通过图象的对称性轻松解决，当然是基于对解析式的敏锐观察和精准把握.(2)涉及抽象函数的性质，需要认真辨析.注意分析自变量取某两个具有联系的值的时候，函数值之间的关系.不妨画示意图进行估计，并结合对称性、周期性、单调性的概念得出结论的一般性.在理解的基础上可以适当加以记忆，熟知某些常用结论.

【解析】　(1) $f(x)=\dfrac{tx^2+2x+t^2+\sin x}{x^2+t}=t+\dfrac{2x+\sin x}{x^2+t}$.

记 $g(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x^2+t}$，则有 $\forall x\in\mathbf{R}$，$g(-x)=-g(x)$，即函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称，从而函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,t)$ 成中心对称图形.

由中心对称的代数形式可知 $\forall x\in D$，$f(-x)+f(x)=2t$，若 $\exists x_0\in D$，$f(x_0)=M$，则必有 $-x_0\in D$，$f(-x_0)=N$，所以 $M+N=2t$，由题意 $M+N=4$，所以 $4=2t$，$t=2$.

(2)①由 $f(x-2)=-f(x)\Rightarrow f(x-4)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期函数，4是一个周期；②$f(4k+2-x)=f(2-x)=-f(x-2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 对称；(类似可证 $f(x)$ 的图象关于点 $(2k,0)(k\in\mathbf{Z})$ 对称)；③$f(x)$在 $[0,1]$ 上的最大值为2，则在 $[-1,0]$ 上的最小值为 -2，又 $f(x-2)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上的最大值为2，最小值为 -2，由①得 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值是 -2；④函数在 $[0,1]$ 上的最大值为2，此最大值可以是在区间内部某点取得，可以结合概念，兼顾前面已有的结论，联系熟悉的正弦型函数构造反例，例如 $f(x)=2\sin\dfrac{5\pi x}{2}$，在区间 $[-1,1]$ 上并不是单调函数.同时可见，4不是函数的最小正周期.

综上，正确答案的序号为①②③.

【经验分享】　(1)概念层面，对于函数概念的深刻理解往往能带来解题思路的重要突破，解题针对性和效率大增.所以，数学学习离不开领悟，特别是对于概念的领悟.

(2)运算层面，对于函数解析式的变形源于对式子结构的仔细观察，同时，对于基本初等函数的性质，以及奇偶性常见结论的熟练掌握，为运算提供了方向，保证了思路的通畅.

(3)第二问中的几个命题很好地将函数的对称性和周期性之间的联系揭示出来.一些有用的结论是应该知道的：

如果一个函数的图象有两条垂直于 x 轴的对称轴，那么这个函数是周期函数；

如果一个函数的图象在 x 轴上有两个对称中心，那么这个函数是周期函数；

如果一个函数的图象有一条垂直于 x 轴的对称轴和一个对称中心，那么这个函数是周期函数.

由相邻对称轴(中心)之间的距离可以计算周期.

以上结论在实际解题中，可以把三角函数的图象作为模型进行记忆.

学习心得

一课一练 5(答案及解析见 P77)

1. “$a\leqslant 0$”是“函数 $f(x)=|(ax-1)x|$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递增”的　(　　)

A. 充分而不必要条件　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　D. 既不充分也不必要条件

2. 若函数 $f(x)$,$g(x)$分别是定义在 **R** 上的偶函数、奇函数,且满足 $f(x)-g(x)=e^x$,其中 $e\approx 2.718$,则有　(　　)

A. $g(-2)<g(-1)<f(0)$　B. $g(-2)<f(0)<g(-1)$

C. $f(0)<g(-1)<g(-2)$　D. $g(-1)<f(0)<g(-2)$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(1-3a)x+10a, x\leqslant 7,\\ a^{x-7}, x>7,\end{cases}$ 若 $f(x)$是定义域上的递减函数,则(1)函数图象与直线 $y=m(m>0)$有________个交点;(2)实数 a 的取值范围为________.

4. 定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x+3)=-f(x)$,且 $f(1)=2$,则 $f(2015)+f(2016)=$________.

5. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x-1}+a$ 为奇函数,则函数 $f(x)$在$[1,3]$上的值域为________.

6. 已知 $a\geqslant 0$,若函数 $f(x)=x^2-5|x-a|+2a$ 在$[0,3]$上是单调函数,则实数 a 的取值范围为________.

7. 已知函数 $f(x)=x^3-3x+1$,对于任意的实数 x,$f(h+x)+f(h-x)=2k$,那么常数 h,k 的值分别为________.

8. 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,如果存在非零常数 T,对于任意 $x\in D$,都有 $f(x+T)=T\cdot f(x)$,则称函数 $y=f(x)$是“似周期函数”,非零常数 T 为函数 $y=f(x)$的“似周期”.现有下面四个关于“似周期函数”的命题:

①如果“似周期函数”$y=f(x)$的“似周期”为-1,那么它是周期为 2 的周期函数;

②函数 $f(x)=x$ 是“似周期函数”;

③函数 $f(x)=2^{-x}$是“似周期函数”;

④如果函数 $f(x)=\cos\omega x$ 是“似周期函数”,那么“$\omega=k\pi,k\in \mathbf{Z}$”.

其中是真命题的序号是________.(写出所有满足条件的命题序号)

9. 已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$满足“对于区间$(0,+\infty)$上的任意 a,b,都有 $f(a+b)>f(b)$成立”.

(1)求 $f(0)$的值,并指出 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$上的单调性;

(2)用增函数的定义证明:函数 $f(x)$是$(-\infty,0)$上的增函数;

(3)判断 $f(x)$是否为 **R** 上的增函数,如果是,请给出证明;如果不是,请举出反例.

10. 已知实数 $a>0$,函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}+a\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$.

(1)当 $a=1$ 时,求 $f(x)$的最小值;

(2)当 $a=1$ 时,判断 $f(x)$的单调性,并说明理由;

(3)求实数 a 的范围,使得对于区间$\left[-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right]$上的任意三个实数 r,s,t,都存在以 $f(r)$,$f(s)$,$f(t)$为边长的三角形.

易错追踪

第6课　从函数视角看方程

函数思想是用运动和变化的思想分析和研究数学问题,方程思想是分析变量间的等量关系,并以此解决数学问题.两者密切相关,方程问题常可以转化为函数问题加以解决:

(1)解方程就是求函数的零点;

(2)方程解的问题可以转化为函数与坐标轴的交点问题,也可以转化为函数与 x 轴的交点问题;

(3)方程有解,当且仅当属于函数的值域;

(4)函数零点存在性定理.

第6题　设定义在 $(0,+\infty)$ 上的单调函数 $f(x)$,对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 都有 $f[f(x)-\log_2 x]=6$.若 x_0 是方程 $f(x)-\dfrac{1}{x\ln 2}=4$ 的一个解,且 $x_0\in(a,a+1)(a\in\mathbf{N}^*)$,则实数 a 等于　(　　)

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

【分析】 由函数 $f(x)$ 单调,得出一一对应,从而有唯一的实数 m 使得 $f(m)=6$,即 $f(x)-\log_2 x=m$,其中 m 是一个常数,而且 m 对于外层函数是自变量的一个取值,而函数 $f(x)$ 定义在 $(0,+\infty)$ 上,所以 m 是正数.之后可以通过赋值,求出 m 的值.至此,$f(x)$ 的解析式居然求出来了.后半部分,方程的解可以转化为函数的零点来具体解决.

【解析】 设 $f(m)=6$,则由 $f[f(x)-\log_2 x]=6$ 可得 $f(x)-\log_2 x=m$,整理可得 $f(x)=\log_2 x+m$,则 $f(m)=\log_2 m+m=6$,解得 $m=4$,所以 $f(x)=\log_2 x+4$.由已知,$\log_2 x+4-\dfrac{1}{x\ln 2}=4$,即 $\log_2 x-\dfrac{1}{x\ln 2}=0$.

方法一:设 $g(x)=\log_2 x-\dfrac{1}{x\ln 2}$,由 $g(1)=-\dfrac{1}{\ln 2}<0$,$g(2)=1-\dfrac{1}{2\ln 2}>0$,$g(3)=\log_2 3-\dfrac{1}{3\ln 2}>0$,且求导可知,$g(x)$ 是增函数,可得 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上存在零点,即方程 $f(x)-\dfrac{1}{x\ln 2}=4$ 的解在区间 $(1,2)$ 内,所以 $a=1$.故选D.

方法二:解方程 $\log_2 x-\dfrac{1}{x\ln 2}=0$,可以观察对数的底数和真数,运用换底公式,$\dfrac{\ln x}{\ln 2}-\dfrac{1}{x\ln 2}=0$,稍加变形得到 $\ln x=\dfrac{1}{x}$,画两个函数图象,易得有唯一交点,且其横坐标在区间 $(1,2)$ 内.

【经验分享】 在解决零点问题时,可以转化为方程的求解,或者多个函数图象的交点的横坐标.这时,对于解的个数要时刻予以关注,防止丢解或者增解.

题目中多次用到函数的单调性,它像一只看不见的手,引导并决定着问题的解决过程中逻辑思维的严谨性,我们一起来剖析一下.第一次是隐性使用,即由函数单调得出一一对应,从而有 $f(x)-\log_2 x=m$,其中 m 是一个正的常数.这是解决整个问题的一个切入点.

其次,$f(m)=\log_2 m+m$,这是关于 m 的一个增函数,这一点保证了 m 的解是唯一的.

问题的后半部分,引入函数 $g(x)=\log_2 x-\dfrac{1}{x\ln 2}$,由对数函数的基本性质和对于解析式的观察分析,得出函数的单调性,并用它解决问题.

也可以这么做,为了解方程 $\log_2 x-\dfrac{1}{x\ln 2}=0$,即 $\dfrac{\ln x}{\ln 2}-\dfrac{1}{x\ln 2}=0$,即 $\ln x=\dfrac{1}{x}$,从而将问题最终转化为熟悉的基本函数的问题:基本初等函数的图象、函数与方程、函数的零点.在画两个函数图象时,两个函数各自的单调性是解的唯一性的保证.或者考察函数 $h(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}$,得到一个单调递增函数,这一点可以由函数的性质简单分析,两个递增函数的和显然是增函数,或者顺手求导,都不是难事,$h'(x)=(\ln x)'-(x^{-1})'=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$,在定义域上显然有 $h'(x)>0\Rightarrow h(x)$ 是增函数.另一方面,灵活自如的对数变形,为问题最终的顺利解决提供了运算层面的保证.

函数零点存在性定理是零点存在的一个充分条件,而不是必要条件;判断零点个数还要根据函数的单调性、对称性或结合函数图象.

通过这个小小的例题可以品味,函数与方程如此紧密地结合在一起.

学习心得