LeXue QiZhong

GaoZhong ShuXue XuanXiu

2-2 2-3 4-5

学在七中 乐在其中

乐学七中

高中数学选修

2-2 2-3 4-5

策划 许 勇 曹杨可 魏 华

主编 张世永 陈中根 何毅章

电子科技大学出版社

乐学七中

高中数学选修 2–2 2–3 4–5

策划 许 勇 曹杨可 魏 华

主编 张世永 陈中根 何毅章

编委 陈中根 周莉莉 刘在廷 杜家忠
罗毕壬 何毅章 曹杨可 周建波
郭 虹 罗志英 税 洪 方廷刚
吴 雪 张世永 杜利超 夏 雪
巢中俊 林克富

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

乐学七中. 高中数学选修 2-2、2-3、4-5 / 张世永，陈中根，何毅章主编.
—成都：电子科技大学出版社，2014. 3
ISBN 978-7-5647-2185-5

Ⅰ. ①乐… Ⅱ. ①张…②陈…③何… Ⅲ. ①中学数学课－高中－教
学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 009095 号

乐学七中. 高中数学选修 2-2、2-3、4-5

许 勇 曹杨可 魏 华 策划

张世永 陈中根 何毅章 主编

出　　版：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）
策划编辑：罗　雅
责任编辑：罗　雅
主　　页：www .uestcp.com.cn
电子邮箱：ues tcp@uestcp.com.cn
发　　行：新华书店经销
印　　刷：四川煤田地质印刷厂
成品尺寸：205mm ×282mm　　印张 21　　字数 682　千字
版　　次：2014 年 3 月第一版
印　　次：2014 年 3 月第一次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5647-2185-5
定　　价：42.80　元

■　版权所有　侵权必究　■

◆ 本社发行部电话：028-83202463；本社邮购电话：028-83201495。
◆ 本书如有缺页、破损、装订错误，请寄回印刷厂调换。

前言

成都七中，作为一所百年名校，在校本教材的开发和利用上从未停止探索的步伐．2013年四川省迎来首次新课程高考，内容要求和题型结构已初步成型．经过三年一轮的教学实践，成都七中数学组对新课程高中数学教学进行了系统的反思和研究，形成了独特而完备的指导思想．为了将这一集体智慧渗透到学校的常规教学中，七中数学组群策群力、全员参与，编写了教学辅导同步用书《乐学七中》．该书既可以满足七中教育集团广大师生的日常教学需要，也可以作为兄弟学校师生了解成都七中课堂教学的一个窗口．

成都七中的数学教学一直坚持发挥学生的主体作用．孔子有云：知之者不如好之者，好之者不如乐之者．“乐学”是七中教师对学生主体更加积极的期许状态，学生的这一状态并非一蹴而就，而是需要耐心引导的．发现问题并解决问题所带来的成就感往往是学生“乐学”的内在动因，而数学教育中“怎样解题”则成为教师引导的关键所在．为了构建和完善“怎样解题”的引导平台，教辅用书的选择和使用贯穿了整个高中数学教学过程．

为了提高教学工作的有效性，由成都七中名优教师牵头，依托学校丰富的教育教学资源，七中数学组教师共同编写了教辅同步用书《乐学七中》，以供学校师生使用．该书有以下特点：

1.章节排布与成都七中实际教学进度一致，为教师的课堂教学与作业布置带来了便利，增加了该书的可操作性．

2.衔接内容和延拓专题一并刊出，弥补了教材内容与高考要求的脱节，为师生的教与学提供了必要的蓝本．

3.“课标要求”与“知识要点”言简意赅、点到为止，为教师讲解、学生冥思留下空间．

4.“典型例题”重视课本例题的使用和挖掘，源于教材，但不拘泥于教材．为了保证课堂训练的针对性和有效性，强调一讲一练，所选题目既能体现知识的内涵和外延，也能兼顾方法的呈现和过手．

5.“备选例题”一方面可作为教师授课的后备题库，另一方面也为学有余力者的拓展训练抛砖引玉．

6.“小结与反思”为培养学生的归纳辩证思维而留白．

7.“练习”遵循“紧扣课堂、难度适中、梯度呈现”的原则．

基于此，《乐学七中》作为高中数学教学同步辅导用书，有其独特的优势和推广价值．热忱欢迎兄弟学校师生参考或使用该书．

本书由陈中根、周莉莉、刘在廷、杜家忠、罗毕壬、何毅章负责编写导数部分；曹杨可、周建波负责编写复数部分；郭虹、罗志英、税洪负责编写不等式部分；方廷刚、张世永、吴雪负责编写数学归纳法及推理与证明，林克富负责编写复习小结和章末测试．

由于编写时间紧，该书难免存在一些不足，恳请广大师生批评指正，以便今后修订时更加完善．

编　者

2014年4月

目录

第一章　导数及其应用

第二章　数系的扩充与复数的引入

第三章　不等式、推理与证明

练习册见附页

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一章

导数及其应用

§1.1.1～§1.1.2　导数的概念

一、课标要求

1. 了解平均变化率的概念；

2. 会求函数在某点附近的平均变化率；

3. 理解导数的概念.

二、知识要点

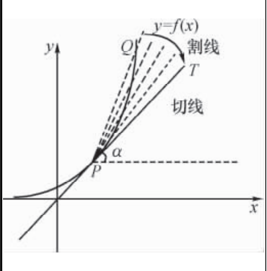
1. 曲线的割线与切线

(1)割线的斜率

设 $P(x_0,y_0)$,$Q(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$为曲线 C 上邻近的两点,过 P,Q 两点作割线,则割线 PQ 的斜率为$\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

(2)切线及切线的斜率

①曲线的切线

图示	文字叙述
	割线 PQ 绕着点 $P(x_0,y_0)$2 转动,当点 $Q(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$沿着曲线无限接近于 P 点,即________时,如果割线 PQ 无限趋近于一个极限位置 PT,则直线 PT 叫做曲线在点 P 处的切线

②切线的斜率

当________时,割线 PQ 的斜率的极限是曲线在点 P 处的切线斜率.

2. 瞬时速度

(1)平均速度

如果一物体在时刻 t_0 时位于 $s(t_0)$,在 $t_0+\Delta t$ 时位于 $s(t_0+\Delta t)$,则在这段时间内物体运动的平均速度________.

(2)瞬时速度

如果物体的运动规律是 $s=s(t)$,物体在时刻 t 的瞬时速度 v 是物体在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内,平均速度的极限,即________.

三、典型例题

例1　已知曲线 $y=\frac{1}{3}x^3$ 上一点 $P\left(2,\frac{8}{3}\right)$,求过点 P 的切线的斜率,并写出切线方程.

变式 1　已知曲线 $y=3x^2-x$,求曲线上一点 $A(1,2)$处的切线斜率.

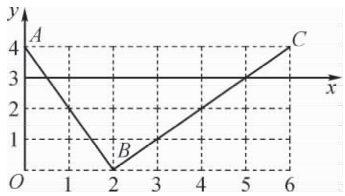
例2　设物体在 t s 内所经过的路程为 s,并且 $s=4t^3+2t^2-3t$,试求物体分别在运动开始及第 5 s 末时的瞬时速度.

变式 2　枪弹在枪筒中运动可以看作匀加速运动,如果它的加速度是 5.0×10^5 m^2/s,枪弹从枪口射出时所用时间为 1.6×10^{-3} s,求枪弹射出枪口时的瞬时速度.

例3 过点 $P(1,2)$ 作抛物线 $y=-3x^2+2$ 的切线，求此切线的方程.

四、备用例题

例1 如图所示，函数 $f(x)$ 的图象是折线段 ABC，其中 A,B,C 的坐标为 $(0,4)$，$(2,0)$，$(6,4)$，则 $f[f(0)]=$ ________；$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$ ________（用数字作答）.



例2 曲线 $y=-2x^2+x$ 在点 $(1,-1)$ 处的切线方程为________.

五、小结与反思

____

____

____

____

____

§1.1.3 导数的几何意义

一、课标要求

1. 了解平均变化率和割线斜率之间的关系；

2. 理解曲线的切线的概念，会用导数的几何意义解题.

二、知识要点

1. 导数及相关概念

(1)平均变化率

对函数 $y=f(x)$，若自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx，那么函数 y 相应的有增量________. 比值________就叫函数 $y=f(x)$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率，即________.

(2)函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数

如果当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 有________，则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并把这个________叫作函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数(或瞬时变化率)，记作________或________，即________.

(3)函数 $y=f(x)$ 的导数概念

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的________，对于开区间 (a,b) 内________的值 x_0，都对应着一个________$f'(x_0)$，这样就在开区间 (a,b) 内构成一个新的函数，那么我们把这一新函数叫做 $f(x)$ 在 (a,b) 内的导数，简称导数，记作 $f'(x)$ 或 y'，即________________. 函数 $y=f(x)$ 在点________处的导数 $f'(x_0)$ 等于函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值.

2. 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义. 就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的________，其切线方程为 y ________________.

三、典型例题

例1 已知：$y=f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$，求 y' 及 $y'|_{x=1}$.

变式1 已知曲线 $y=\sqrt{2x^2+2}$ 上一点 $P(1,2)$，用导数的定义求过点 P 的切线的倾斜角.

例2 求双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $P\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 处的切线的斜率，并写出该切线的方程.

变式2 已知直线 $y=kx+1$ 与曲线 $y=x^3+ax+b$ 相切于点 $(1,3)$，则 b 的值为 ( )

A. 3 B. -3 C. 5 D. -5

例3　倒圆锥形容器高 8 m,底面半径为 4 m,今以每分钟 4 m^3 的速度把水注入容器,试问当水深为 5 m 时,水面上升的速度是多少?

四、备用例题

例1　若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=M$,则 $f'(x_0)=$ (　　)

A. M　　B. $-M$　　C. $\dfrac{1}{M}$　　D. $-\dfrac{1}{M}$

例2　若曲线 $y=2x^3$ 上某点切线的斜率为 6,求此点的坐标.

五、小结与反思

____

____

____

____

____

§1.2.1　几个常用函数的导数

一、课标要求

1. 利用导数的定义推导五种常见函数 $y=c$,$y=x$,$y=x^2$,$y=\dfrac{1}{x}$,$y=\sqrt{x}$的导数公式;

2. 运用五个公式求解其他函数的导数.

二、知识要点

1. 函数 $y=c$ 的导数________.

2. 函数 $y=x$ 的导数________.

3. 函数 $y=x^2$ 的导数________.

4. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$的导数________.

5. 函数 $y=\sqrt{x}$的导数________.

三、典型例题

例1　请用定义法计算函数 $f(x)=x^3$ 的导数.

变式 1　计算下列函数的导数:①$(x)'=$________;②$(x^2)'=$________;③$(x^3)'=$________;④$(x^{-1})'=$________.

根据上述结论可以得出:幂函数 $y=x^\alpha$,$\alpha\in Q$ 的导数 $(x^\alpha)'=$________.

例2　在同一平面直角坐标系中画出函数 $y=x$,$y=2x$,$y=3x$ 的图象,求它们的导数,并回答下列问题:

(1)从图象上看,它们的导数分别表示什么?

(2)这三个函数中,哪一个增加得最快?哪一个增加得最慢?

(3)函数 $y=kx(k\neq 0)$增(减)的快慢与什么有关?

变式 2　给出下列命题,其中正确的命题是________.(填序号)

①任何常数的导数都为零;②直线 $y=2x$ 上任一点处的切线方程是这条直线本身;③双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$上任意一点处的切线斜率都是负值;④函数 $y=2x$ 和函数 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$上函数值增长的速度一样快.

例3　已知曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$上一点 $P\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$,求过点 P 与此曲线相切的直线方程.

变式3 已知关于 t 的函数 $s=\sqrt[3]{t^2}$，求函数在 $t=8$ 时的导数.

四、备选例题

例1 下列结论中不正确的是 ( )

A. 若 $y=x^4$，$y'|_{x=2}=32$

B. 若 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$，$y'|_{x=2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. 若 $y=\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$，$y'|_{x=1}=-\frac{5}{2}$

D. 若 $y=4$，$y'|_{x=2}=0$

例2 画出函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象，描述它的变化情况，并求出曲线在点 $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程.

五、小结与反思

§1.2.2 基本初等函数的导数公式

一、课标要求

1. 熟练运用基本初等函数的导数公式；

2. 熟练运用导数的运算法则求函数的导数.

二、知识要点

1. 基本初等函数的导数公式：

函数	导数
$f(x)=c$（c 为常数）	
$f(x)=x^\alpha$（$\alpha\in\mathbf{Q}^*$）	
$f(x)=\sin x$	
$f(x)=\cos x$	
$f(x)=a^x$（$a>0,a\neq1$）	
$f(x)=\mathrm{e}^x$	
$f(x)=\log_a x$	
$f(x)=\ln x$	

2. 导数的运算法则：

(1) $[f(x)\pm g(x)]'=$________；

(2) $[f(x)\cdot g(x)]'=$________；

(3) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=$________；

(4) $[cf(x)]'=$________.

三、典型例题

例1 计算下列函数的导数：

(1) $(x^{\frac{1}{3}})'=$________；

(2) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)'=$________；

(3) $(\log_4 x)'=$________；

(4) $(5\cos x)'=$________.

变式1 计算下列函数的导数：

(1) $(x\sqrt{x})'=$________；

(2) $(\sin x)'\cdot(\cos x)'=$________；

(3) $\left(\frac{x^5+\sqrt{x}+\sin x}{x^2}\right)'=$________；

(4) $(x|x|)'=$________.

例2 曲线 $y=x^3-x+3$ 在点(1,3)处的切线方程为________.

变式2 若曲线 $y=kx+x^2$ 在 $x=1$ 处的切线平行于 x 轴，则 $k=$________.

例3 已知函数 $f(x)=ax^3-bx^2-2x+c$（a,b 均为正数），若 $f(x)$ 的图象过坐标原点，且在 $x=-1$ 处的导数值为 0，求 $y=8^a+4^b+c$ 的最小值.

变式 3　(2012·江西改编)设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内有导数,且$f(e^x)=x+e^x$,则$f'(2)=$________.

四、备选例题

例1　设$a>0$,$f(x)=ax^2+bx+c$,曲线$y=f(x)$在点$P(x_0,f(x_0))$处切线的倾斜角的取值范围为$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$,则$P$到曲线$y=f(x)$对称轴距离的取值范围为　(　　)

A. $\left[0,\frac{1}{a}\right]$　　B. $\left[0,\frac{1}{2a}\right]$

C. $\left[0,\left|\frac{b}{2a}\right|\right]$　　D. $\left[0,\left|\frac{b-1}{2a}\right|\right]$

例2　已知函数$f(x)=\frac{e^x}{1+ax^2}$,其中a为正实数,若$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$,求实数$a$的值,并计算使$f'(x)=0$成立的其它$x$的值.

五、小结与反思

____

____

____

____

____

§1.2.3　函数的导数公式综合应用

一、典型例题

例1　求下列函数的导数:

(1)$y=x\left(x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)$;(2)$y=\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}$;

(3)$y=(x+2a)(x-a)^2$.

变式 1　设$f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$,求$f'(0)$.

例2　(2012·福建改编)已知函数$f(x)=e^x+ax^2-ex(a\in R)$.

(Ⅰ)若曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线平行于x轴,求函数$f'(x)$的单调区间;

(Ⅱ)在(Ⅰ)条件下试确定b的取值范围,使得对任意$x\in(-1,3)$有$f'(x)>-x+b$ Ĭ　立.

变式 2　(2012·陕西理改编)设函数$f(x)=xe^x$,则使得$f'(x)<0$的x的取值范围是________.

例3　(2012·广东理改编)设$a<1$,$A=\{x\in\mathbf{R}\mid x>0\}$,

$B=\{x\in\mathbf{R}\mid 2x^2-3(1+a)x+6a>0\}$,$D=A\cap B$.

(1)求集合D(用区间表示);

(2)若函数$f(x)=2x^3-3(1+a)x^2+6ax$,求$f'(x)=0$在D内的解.

变式 3　设$f(x)=x\ln x$,若$f'(t)<2$,则t的取值范围　(　　)

A. $t<1$　　B. $0<t<e$

C. $-1<t<e^2-1$　　D. $t<e$

二、备选例题

例1 (2012·大纲理改编)设函数$f(x)=ax+\cos x$，$x\in[0,\pi]$，解不等式$f'(x)>0$.

例2 一质点在x轴上运动，其运动规律为$x=e^t\sin(t+\varphi)$(ω,φ为常数)，试求$t=\frac{1}{2}$时，质点运动的速度v.

三、小结与反思

§1.3.1 函数的单调性与导数

一、课标要求

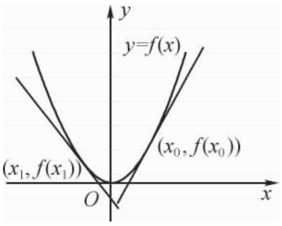
1. 了解可导函数的单调性与其导数的关系；

2. 能利用导数研究函数的单调性，会求函数的单调区间.

二、知识要点

1. 函数的单调性与其导数的正负的关系.

观察图象，探讨函数的单调性与其导数正负的关系.



导数$f'(x_0)$表示函数$f(x)$在点(x_0,y_0)处的切线的斜率.

在$x=x_0$处，$f'(x_0)>0$，切线是“左下右上”式的，这时，函数$f(x)$在x_0附近单调递增；

在$x=x_1$处，$f'(x_0)<0$，切线是“左上右下”式的，这时，函数$f(x)$在x_1附近单调递减.

【结论】

一般地，函数的单调性与其导函数的正负有如下关系：

在某个区间(a,b)内，如果________，那么函数$y=f(x)$在这个区间内单调递增；如果$f'(x)<0$，那么函数$y=f(x)$在这个区间内________.

特别的，如果在某个区间内恒有$f'(x)=0$，那么函数$y=f(x)$在这个区间内是常函数.

2. 求函数$f(x)$单调区间的步骤：

(1)确定函数$y=f(x)$的定义域.

(2)求导数$y'=f'(x)$.

(3)解不等式________，解集在定义域内的部分为增区间；解不等式________，解集在定义域内的部分为减区间.

三、典型例题

例1 解答下列各题：

(1)求证：函数$y=x+\frac{1}{x^2+1}+4$在其定义域内是增函数；

(2)讨论函数$f(x)=3x-x^3+1$的单调性；

(3)求函数$y=x^3+x^2-5$的单调区间.

变式1 求下列函数的单调区间：

(1)$f(x)=x^2-2x+4$；

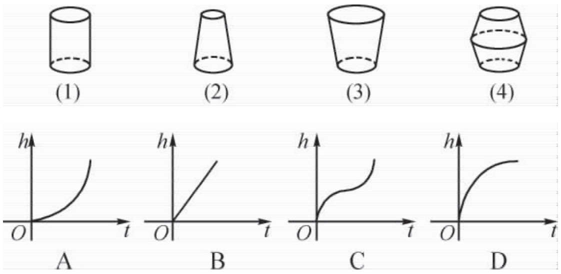
(2)$f(x)=3x-x^3$；

(3)$f(x)=e^x-x$；

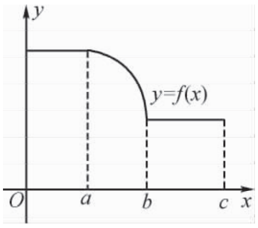
(4)$f(x)=x+\cos x,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

例2 水以恒速(即单位时间内注入水的体积相同)注入下面四种底面积相同的容器中，请分别找出与各容器对应的水的高度h与时间t的函数关系图象.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com



变式 2　函数 $y=f(x)$的图象如图，试画出导函数$f'(x)$图象的大致形状.



例3　已知 $a>0$，函数$f(x)=x^3-ax$ 在$[1,+\infty)$上是增函数，则 a 的最大值是　　(　　)

A. 0　　　　B. 1

C. 2　　　　D. 3

变式 3　函数$f(x)=x^2-2ax$ 在$(-\infty,3]$单调递减，则 a 的取值范围是________.

四、备选例题

例1　(1)已知函数$f(x)$与 $g(x)$均为闭区间$[a,b]$上的可导函数，且$f'(x)>g'(x)$，$f(a)=g(a)$. 证明：当 $x\in[a,b]$时，$f(x)>g(x)$；

(2)设 $x>0$，不等式：$x>\ln(1+x)$.

例2　(1)设$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上可导，且$f'(x)>g'(x)$，则当$a<x<b$时　　(　　)

A. $f(x)>g(x)$

B. $f(x)<g(x)$

C. $f(x)+g(a)>g(x)+f(a)$

D. $f(x)+g(b)>g(x)+f(b)$

(2)求函数$f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$的单调区间.

五、小结与反思

____

____

____

____

____

§1.3.2　函数的极值与导数

一、课标要求

1. 理解极大值、极小值的概念；

2. 能够运用判别极大值、极小值的方法来求函数的极值；

3. 掌握求可导函数的极值的步骤.

二、知识要点

1. 函数极值的概念.

函数 $y=f(x)$在点 $x=a$ 的函数值 $f(a)$比它在点 $x=a$ 附近的其他点的函数值都小，$f'(a)=0$；且在点 $x=a$ 附近的左侧$f'(x)<0$，右侧$f'(x)>0$. 我们把点 a 叫做函数$y=f(x)$的________，$f(a)$叫做函数 $y'=f(x)$的________.

类似地，函数 $y=f(x)$在点 $x=b$ 的函数值 $f(b)$比它在点 $x=b$ 附近的其他点的函数值都大，$f'(b)=0$；且在点 $x=b$ 附近的左侧$f'(x)>0$，右侧$f'(x)<0$. 我们把点 b 叫做函数 $y=f(x)$的________，$f(b)$叫做函数 $y=f(x)$的________.

极大值点、极小值点统称为极值点，极大值和极小值统称为________.

【说明】对函数的极值的理解

(1)“附近”：说明极值反映的是在某点附近的大小情况，是函数的一个局部性质，是仅对某一点的左右两侧邻域而言的.

(2)“左侧”“右侧”：说明函数在极值点 x_0 左、右两侧函数均有意义，所以极值点不可能是定义域的端点.

(3)函数$f(x)$在其定义域上的极值点可能不止一个，也可能没有. 函数的极大值与极小值没有必然的大小关系，函数的一个极小值也不一定比极大值小(见教材 P_{27}图

1.3－11 中 c 和 f 点).

(4)极值点是数(即方程 $f'(x)=0$ 的根),不是点.极值是相应的函数值.

2. 求函数极值的方法.

(1)确定函数的定义区间,求导数 $f'(x)$.

(2)求方程 $f'(x)=0$ 的根.

(3)用函数的导数为 0 的点,顺次将函数的定义区间分成若干小开区间,并列成表格.检查 $f'(x)$ 在方程根左右的值的符号,如果"左正右负",那么 $f(x)$ 在这个根处取得极大值;如果"左负右正",那么 $f(x)$ 在这个根处取得极小值;如果"左右同号",那么 $f(x)$ 在这个根处无极值.

3. "$f'(x_0)=0$"与"x_0 是函数 $y=f(x)$ 的极值点"的关系.

$f'(x_0)=0$ 时,若在 x_0 两侧 $f'(x)$ 符号相同,则 x_0 不是函数的极值点(如:函数 $y=x^3$,$f'(0)=0$,由图象知 0 不是函数 $y=x^3$ 的极值点).反过来,所有的极值点都是 $f'(x)=0$ 的根.

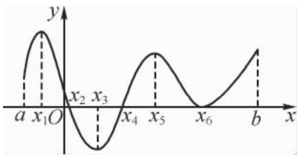
因此,若 $f(x)$ 为可导函数,则"$f'(x_0)=0$"是"x_0 是函数 $y=f(x)$ 的极值点"的________.

三、典型例题

例1 求下列函数的极值:

(1)$f(x)=-x(x-1)^2$;(2)$f(x)=x\ln x$.

变式1 如图,根据图象回答问题:



(1)若图是函数 $y=f(x)$ 的图象,指出哪些是函数 $y=f(x)$ 的极大值点,哪些是极小值点.

(2)若图是函数 $y=f'(x)$ 的图象,指出哪些是函数 $y=f(x)$ 的极大值点,哪些是极小值点.

例2 设函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象与 y 轴的交点为 P,且其图象在点 P 处的切线方程为 $12x-y-4=0$.若函数在 $x=2$ 处取得极值 0,求该函数的解式.

变式2 (1)已知函数 $f(x)=x^3-3ax^2+2bx$ 在点 $x=1$ 处有极小值 -1,则实数 $a=$________,$b=$________.

(2)已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2-3x$ 在 $x=\pm1$ 处取得极值,则求 $f(x)=$________,$f(1)$ 是函数 $f(x)$ 的________.(填极大值或极小值)

例3 设函数 $f(x)=x^3-3ax^2-24a^2x+b$ 有极大值 S 和极小值 T,且 $S>0$,$T<0$,$S=T+4$.

(1)求实数 a 的值;(2)求实数 b 的取值范围.

变式3 设函数 $f(x)=x(x-1)(x-a)$,$(a>1)$.

(1)求导数 $f'(x)$;(2)证明 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1,x_2;(3)若(2)中 $x_1<x_2$,判断 x_1,x_2 分别是极大值点还是极小值点.

四、备选例题

例1 若函数 $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x+1}$ 在 $x=1$ 处取极值,则 $a=$________.

例2　已知函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$在$x=1$处有极值10,求a,b的值.

五、小结与反思

---

§1.3.3　函数的最大(小)值与导数(一)

一、课标要求

1. 理解函数的最大值和最小值的概念;

2. 掌握可导函数在闭区间上所有点(包括端点)处的函数中的最大(或最小)值必有的充分条件;

3. 掌握用导数求函数的极值及最值的方法和步骤.

二、知识要点

1. 在闭区间$[a,b]$上连续的函数必有最大值和最小值. 这里有两层意思:

(1)给定函数的区间必须是闭区间,$f(x)$在开区间上虽然连续但不能保证有最大值或最小值;

(2)在闭区间上的每一点必须连续,即在闭区间上有间断点也不能保证$f(x)$有最大值和最小值.

2. 极值与最值.

注意区分函数的极值和函数的最值的联系与区别. 函数的极值是函数的局部性质,函数的最值是函数在指定区间上的整体性质.

3. 掌握在闭区间$[a,b]$上连续、在(a,b)上可导的函数最值求解的方法.

其步骤一般如下:

(1)如果$f(x)$在(a,b)上有极值点,

第一步:求$f'(x)$,并据此求解$f(x)$的极值;第二步:求端点函数值$f(a)$,$f(b)$;

第三步:只需将$f(x)$的各极值与$f(a)$,$f(b)$比较,其中最大的一个是最大值,最小的一个是最小值.

(2)如果$f(x)$在(a,b)上没有极值点,则$f(x)$的最值在区间$[a,b]$上一致单调,其最值在区间的端点取得.

三、典型例题

例1　求下列函数在指定区间内的最值:

(1)$f(x)=2x-\sqrt{4-x}\,(-5\leqslant x\leqslant 3)$;

(2)$f(x)=4x^2(x^2-2)\,(-2\leqslant x\leqslant 2)$.

变式1　当$x=$________时函数$f(x)=\ln(x+1)-x$取得最大值________;函数$f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}\left(-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\right)$的最大值为________,最小值为________.

例2　已知函数$f(x)=-x^3+3x^2+9x+a$在区间$[-2,2]$上的最大值为20,求它在该区间上的最小值.

变式2　函数$y=\ln x-x$在$x\in(0,\mathrm{e}]$上的最大值为________.

例3　已知$a\in\mathbf{R}$,函数$f(x)=x^2|x-a|$,求函数$y=f(x)$在区间$[1,2]$上的最小值.

变式3 已知$f(x)=ax-\ln x, x\in(0,e]$，其中 e 是自然常数，$a\in\mathbf{R}$. 问：是否存在实数 a，使$f(x)$的最小值是3，若存在，求出 a 的值；若不存在，说明理由.

四、备选例题

例1 已知函数$f(x)=ax^3+x^2+bx$(其中常数 $a,b\in\mathbf{R}$)，$g(x)=f(x)+f'(x)$是奇函数.

(1)求$f(x)$的表达式；

(2)讨论 $g(x)$的单调性，并求 $g(x)$在区间$[1,2]$上的最大值和最小值.

例2 已知函数 $f(x)=x^2+\ln x$.

(1)求函数 $f(x)$在$[1,e]$上的最大值和最小值；

(2)求证：当 $x\in(1,+\infty)$时，函数 $f(x)$的图象在 $g(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$ 的下方.

五、小结与反思

§1.3.3 函数的最大(小)值与导数(二)

一、课标要求

函数最值的应用.

二、知识要点

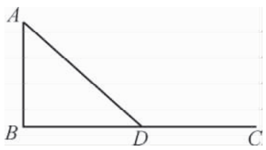
1. 一般地，如果目标函数在开区间的定义域内有最大(小)值，且在该区间内只有唯一极值点，那么这个极值点就是函数值的最大(小)值；

2. 导数是最重要的中学数学工具之一，辐射中学数学其他分支，如函数、三角函数、数列、向量、解几何、立体几何等. 要注意ī　、总结并积累相关方法，养成自觉使用导数解决相关问题的习惯.

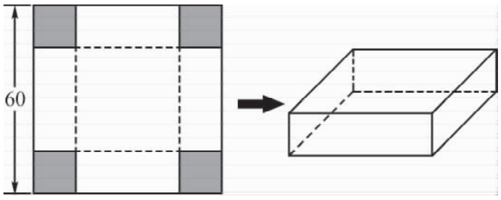
三、典型例题

例1 某工厂生产某种产品，已知该产品的月生产量 x(t)与每吨产品的价格 p(元/t)之间的关系式为 $p=24\,200-\frac{1}{5}x^2$，且生产 xt 的成本为$R=500\,00+200x$(元). 问该厂每月生产多少吨产品才能使利润达到最大？最大利润是多少？(利润=收入-成本)

变式1 设工厂 A 到铁路的垂直距离为 20 km(如图)，垂足为点 B. 铁路上距离 B 点 100 km 的地方有一个原料供应站 C. 现要从 BC 之间某处 D 向工厂修一条公路，使得原料供应站 C 到工厂 A 所需费用最省. 若每公里的铁路运费与公路运费之比为 3∶5，试问 D 应选在何处？



例2 如图,在边长为 60 cm 的正方形铁片的四角上切去相等的正方形,再把它的边沿虚线折起,做成一个无盖的方底箱子,箱子边长是多少时,箱子的容积最大?最大容积是多少?



变式 2 要做一个底面为长方形的带盖的箱子,其体积为 72 cm^3,其底面两邻边长之比为 1∶2,则它的长为________,宽为________,高为________时,可使表面积最小.

例3 求椭圆$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的经过点 $A(-b,0)$的最大弦长.

变式 3 过椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$上的点 $M(x_0,y_0)$引椭圆的切线,此切线与 x、y 轴分别交于点 A、B,点 O 为坐标原点,求 $\triangle AOB$ 面积的最小值.

四、备选例题

例1 已知函数$f(x)=\frac{a\ln x}{x+1}+\frac{b}{x}$,曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $x+2y-3=0$.(Ⅰ)求 a、b 的值;

(Ⅱ)如果当 $x>0$,且 $x\neq1$ 时,$f(x)>\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x}$,求 k 的取值范围.

例2 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $f(x)$在 $x=2$ 时取得极值,求 a 的值;

(2)求 $f(x)$的单调区间;

(3)求证:当 $x>1$ 时,$\frac{1}{2}x^2+\ln x<\frac{2}{3}x^3$.

五、小结与反思

§1.3.3　函数的最大(小)值与导数(三)

一、课标要求

函数最值的应用.

二、知识要点

1. 对于给定函数的图象,要能从图象的左右、上下分布范围、变化趋势、对称性等方面研究函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性、特殊点,注意图象与函数解式中参数的关系.(即特征量的几何意义)

2. 函数图象形象地显示了函数的性质,为研究数量关系问题提供了“形”的直观性,它是探求解题途径,获得问题结果的重要工具.利用函数图象可以研究方程(或不等式)的解的情况.

3. 证明一个函数图象 C 关于某一点 A(或某一条直线 l)对称,只需证明 C 上任意一点关于点 A(或直线 l)的对称点也在 C 上.

三、典型例题

例1 已知两个函数 $f(x)=8x^2+16x-k$,$g(x)=2x^3+5x^2+4x$,其中 k 为常数.

(1)对任意 $x\in[-3,3]$都有 $f(x)\leqslant g(x)$,求 k 的取值范围;

(2)对任意的 $x_1\in[-3,3]$，$x_2\in[-3,3]$都有 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$，求 k 的取值范围.

变式1 已知函数$f(x)=x^3+ax^2+x+1$，$a\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)讨论函数$f(x)$的单调区间；

(Ⅱ)设函数$f(x)$在区间$\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$内是减函数，求$\alpha$的取值范围.

例2 求证：$x>\ln(1+x)(x>0)$.

变式2 求证：$\ln x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}(x-1)^2\geqslant1+\frac{2}{3}(1-x)^3$.

例3 已知函数$f(x)=e^x-kx$，$x\in\mathbf{R}$.(1)若 $k=e$，试确定$f(x)$的单调区间；

(2)若 $k>0$，且对于任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(|x|)>0$ 恒成立，试确定实数 k 的取值范围；

变式3 已知函数 $f(x)=e^x-kx$，$x\in\mathbf{R}$. 函数 $F(x)=f(x)+f(-x)$，求证：$F(1)\cdot F(2)\cdots F(n)>(e^{n+1}+2)^{\frac{n}{2}}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

四、备选例题

例1 设$f(x)=\frac{e^x}{1+ax^2}$，其中 a 为正实数.

(1)当 $a=\frac{4}{3}$时，求$f(x)$的极值点；

(2)若$f(x)$为 $\mathbf{R}$ 上的单调函数，求 a 的取值范围.

例2 已知 $f(x)$满足 $f(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)x+\frac{1}{2}x^2$. 求 $f(x)$的单调区间.

五、小结与反思

§1.4 生活中的优化问题

一、课标要求

1. 使利润最大、用料最省、效率最高等优化问题，体会导数在解决实际问题中的作用；

2. 利用导数求函数最值的方法. 用导数方法求函数最

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com