数学历年真题权威解析（试卷版）数学三

李永乐 王式安 季文铎 编著

北京理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学历年真题权威解析 ：试卷版. 数学三/李永乐,王式安，季文铎编著. 北京：北京理工大学出版社，2015.6(2016.6 重印)

ISBN 978－7－5682－0611－2

Ⅰ.①数… Ⅱ.①李…②王…③季… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－题解 Ⅳ.①O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 099937 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京汇祥印务有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1 / 16
印　　张 / 17
字　　数 / 406 千字
版　　次 / 2015 年 6 月第 1 版　2016 年 6 月第 2 次印刷
定　　价 / 46.80 元

责任编辑 / 陈莉华
文案编辑 / 陈莉华
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

绝密★启用前

考生编号	
姓　　名	

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学（三）

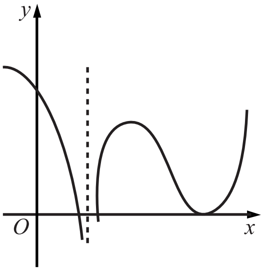
（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用黑色字迹签字笔或钢笔书写，涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题纸和试题册一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则



(A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

(B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点.

(C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点.

(D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

(2) 已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，则

(A) $f'_x-f'_y=0$.　　(B) $f'_x+f'_y=0$.

(C) $f'_x-f'_y=f$.　　(D) $f'_x+f'_y=f$.

(3) 设 $J_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy\,(i=1,2,3)$，其中 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，

$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant \sqrt{x}\}$，$D_3=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 1\}$，则

(A) $J_1<J_2<J_3$.　　(B) $J_3<J_1<J_2$.

(C) $J_2<J_3<J_1$.　　(D) $J_2<J_1<J_3$.

(4) 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$（$k$ 为常数）

(A) 绝对收敛.　　(B) 条件收敛.

(C) 发散.　　(D) 收敛性与 k 有关.

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　(D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(6) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1，2，则

(A) $a>1$.　　(B) $a<-2$.

(C) $-2<a<1$.　　(D) $a=1$ 或 $a=-2$.

(7) 设 A,B 为两个随机事件，且 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$，如果 $P(A\mid B)=1$，则

(A) $P(\overline{B}\mid\overline{A})=1$.　　(B) $P(A\mid\overline{B})=0$.

(C) $P(A\cup B)=1$.　　(D) $P(B\mid A)=1$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(1,4)$，则 $D(XY)=$

(A) 6.　　(B) 8.　　(C) 14.　　(D) 15.

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ ________.

(10) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$ ________.

(11) 设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz\Big|_{(0,1)}=$ ________.

(12) 设 $D=\{(x,y)\big|\ |x|\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant x\leqslant 1\}$ 则 $\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy=$ ________.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$ ________.

(14) 设袋中有红、白、黑球各 1 个，从中有放回地取球，每次取 1 个，直到三种颜色的球都取到时停止，则取球次数恰好为 4 的概率为________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$

(16)（本题满分 10 分）

设某商品最大需求量为 1200 件，该商品的需求函数 $Q=Q(p)$，需求弹性 $\eta=\dfrac{p}{120-p}(\eta>0)$，$p$ 为单价(万元).

(Ⅰ) 求需求函数的表达式；

(Ⅱ) 求 $p=100$ 万元时的边际收益，并说明其经济意义.

(17)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1 |t^2-x^2|\,\mathrm{d}t\,(x>0)$，求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

(18)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}-1$，求 $f(x)$.

(19)（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2a-2\end{bmatrix}$,且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解,

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(Ⅱ)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$,记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布,令 $U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y,\\ 0, & X>Y.\end{cases}$

(Ⅰ)写出(X,Y)的概率密度;

(Ⅱ)请问 U 与 X 是否相互独立?并说明理由;

(Ⅲ)求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$ 其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数,

X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本,令 $T=\max(X_1,X_2,X_3)$.

(Ⅰ)求 T 的概率密度;

(Ⅱ)确定 a,使得 $E(aT)=\theta$.

绝密★启用前

考生编号	
姓　　名	

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学（三）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用黑色字迹签字笔或钢笔书写，涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题纸和试题册一并装入试题袋中交回。

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 设$\{x_n\}$ 是数列,下列命题中不正确的是

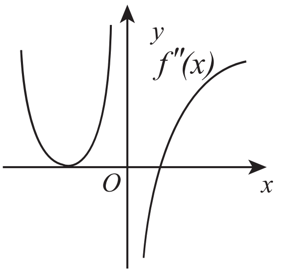
(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$.

(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$.

(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如图所示,则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为



(A)0. (B)1.

(C)2. (D)3.

(3) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x,x^2+y^2\leqslant 2y\}$,函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

(A)$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

(B)$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

(C)$2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(D)$2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(4) 下列级数中发散的是

(A)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$. (B)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

(C)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$. (D)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\d\\d^2\end{bmatrix}$,若集合 $\Omega=\{1,2\}$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为

(A)$a\notin\Omega,d\notin\Omega$. (B)$a\notin\Omega,d\in\Omega$.

(C)$a\in\Omega,d\notin\Omega$. (D)$a\in\Omega,d\in\Omega$.

(6) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$,若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$,则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为

(A)$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$. (B)$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

(C)$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$. (D)$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件,则

(A)$P(AB)\leqslant P(A)P(B)$. (B)$P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

(C)$P(AB)\leqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}$. (D)$P(AB)\geqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}$.

(8) 设总体 $X \sim B(m,\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 $E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=$

(A) $(m-1)n\theta(1-\theta)$.　　(B) $m(n-1)\theta(1-\theta)$.

(C) $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$.　　(D) $mn\theta(1-\theta)$.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$ ________.

(10) 设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2} xf(t)\mathrm{d}t$，若 $\varphi(1)=1$，$\varphi'(1)=5$，则 $f(1)=$ ________.

(11) 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,0)}=$ ________.

(12) 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3，则 $y(x)=$ ________.

(13) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$ ________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

(16)（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2, y\geqslant x^2\}$.

(17)（本题满分 10 分）

为了实现利润最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型，设 Q 为该商品的需求量，P 为价格，MC 为边际成本，η 为需求弹性（$\eta>0$）.

（Ⅰ）证明定价模型为 $P=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$；

（Ⅱ）若该商品的成本函数为 $C(Q)=1600+Q^2$，需求函数为 $Q=40-P$，试由（Ⅰ）中的定价模型确定此商品的价格.

(18)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式.

(19)(本题满分 10 分)

(Ⅰ) 设函数 $u(x)$,$v(x)$ 可导,利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

(Ⅱ) 设函数 $u_1(x)$,$u_2(x)$,$\cdots$,$u_n(x)$ 可导,$f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$,写出 $f(x)$ 的求导公式.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{O}$.

(Ⅰ) 求 a 的值;

(Ⅱ) 若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵,求 $\boldsymbol{X}$.

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(Ⅰ) 求 a,b 的值;

(Ⅱ) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x}\ln 2, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测,直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止,记 Y 为观测次数.

(Ⅰ) 求 Y 的概率分布;

(Ⅱ) 求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}, & \theta \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数,X_1,X_2,$\cdots$,X_n 为来自该总体的简单随机样本.

(Ⅰ) 求 θ 的矩估计量;

(Ⅱ) 求 θ 的最大似然估计量.

绝密★启用前

考生编号	
姓　　名	

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学（三）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用黑色字迹签字笔或钢笔书写，涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题纸和试题册一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，且 $a \neq 0$，则当 n 充分大时有

(A) $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$.　　(B) $|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$.

(C) $a_n > a - \dfrac{1}{n}$.　　(D) $a_n < a + \dfrac{1}{n}$.

(2) 下列曲线中有渐近线的是

(A) $y = x + \sin x$.　　(B) $y = x^2 + \sin x$.

(C) $y = x + \sin \dfrac{1}{x}$.　　(D) $y = x^2 + \sin \dfrac{1}{x}$.

(3) 设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. 当 $x \to 0$ 时，若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列选项中错误的是

(A) $a = 0$.　　(B) $b = 1$.　　(C) $c = 0$.　　(D) $d = \dfrac{1}{6}$.

(4) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上

(A) 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时，$f(x) \geqslant g(x)$.　　(B) 当 $f'(x) \geqslant 0$ 时，$f(x) \leqslant g(x)$.

(C) 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时，$f(x) \geqslant g(x)$.　　(D) 当 $f''(x) \geqslant 0$ 时，$f(x) \leqslant g(x)$.

(5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

(A) $(ad - bc)^2$.　　(B) $-(ad - bc)^2$.

(C) $a^2d^2 - b^2c^2$.　　(D) $b^2c^2 - a^2d^2$.

(6) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量，则对任意常数 k, l，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的

(A) 必要非充分条件.　　(B) 充分非必要条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分也非必要条件.

(7) 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B) = 0.5$，$P(A-B) = 0.3$，则 $P(B-A) =$

(A) 0.1.　　(B) 0.2.　　(C) 0.3.　　(D) 0.4.

(8) 设 X_1, X_2, X_3 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $S = \dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\,|X_3|}$ 服从的分布为

(A) $F(1,1)$.　　(B) $F(2,1)$.　　(C) $t(1)$.　　(D) $t(2)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) 设某商品的需求函数为 $Q = 40 - 2P$（P 为商品的价格），则该商品的边际收益为________.

(10) 设 D 是由曲线 $xy + 1 = 0$ 与直线 $y + x = 0$ 及 $y = 2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为________.

(11) 设 $\int_0^a x e^{2x} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}$，则 $a =$ ________.

(12) 二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \left(\dfrac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right) \mathrm{d}x =$ ________.

(13) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1，则 a 的取值范围是________.

(14) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，若 $E\left(c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\theta^2$，则 $c=$ ________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分 10 分)

设平面内区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$，计算

$$\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy.$$

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有连续导数，且 $z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+e^x\cos y)e^x.$$

若 $f(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$. 证明：

(Ⅰ) $0\leqslant\int_a^x g(t)dt\leqslant x-a$，$x\in[a,b]$；

(Ⅱ) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt}f(x)dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)dx$.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系；

(Ⅱ) 求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$ 相似.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$,在给定 $X=i$ 的条件下,随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$.

(Ⅰ) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(Ⅱ) 求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X,Y 的概率分布相同,X 的概率分布为 $P\{X=0\}=\dfrac{1}{3}$,$P\{X=1\}=\dfrac{2}{3}$,且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{1}{2}$.

(Ⅰ) 求 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ) 求 $P\{X+Y\leqslant 1\}$.

绝密★启用前

考生编号	
姓　　名	

2013年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用黑色字迹签字笔或钢笔书写，涂写部分必须使用2B铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题纸和试题册一并装入试题袋中交回。

一、选择题:1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 当 $x \to 0$ 时,用"$o(x)$"表示比 x 高阶的无穷小,则下列式子中错误的是

(A)$x \cdot o(x^2) = o(x^3)$.　　(B)$o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$.

(C)$o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$.　　(D)$o(x) + o(x^2) = o(x^2)$.

(2) 函数 $f(x) = \dfrac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(3) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 位于第 k 象限的部分,记 $I_k = \iint\limits_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(k = 1,$

$2,3,4)$,则

(A)$I_1 > 0$.　　(B) $I_2 > 0$.　　(C) $I_3 > 0$.　　(B) $I_4 > 0$.

(4) 设$\{a_n\}$为正项数列,下列选项正确的是

(A) 若 $a_n > a_{n+1}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛,则 $a_n > a_{n+1}$.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则存在常数 $p > 1$,使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在.

(D) 若存在常数 $p > 1$,使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵,若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$,且 $\boldsymbol{B}$ 可逆,则

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价.

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

(6) 矩阵$\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$相似的充分必要条件为

(A)$a = 0, b = 2$.　　(B)$a = 0$,b 为任意常数.

(C)$a = 2, b = 0$.　　(D)$a = 2$,b 为任意常数.

(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量,且 $X_1 \sim N(0,1)$,$X_2 \sim N(0,2^2)$,$X_3 \sim N(5,3^2)$,$p_i = P\{-2 \leqslant X_i \leqslant 2\}(i = 1,2,3)$,则

(A)$p_1 > p_2 > p_3$.　　(B)$p_2 > p_1 > p_3$.

(C)$p_3 > p_1 > p_2$.　　(D)$p_1 > p_3 > p_2$.

(8) 设随机变量 X 和 Y 相互独立,且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X + Y = 2\} =$

(A) $\dfrac{1}{12}$.　　(B) $\dfrac{1}{8}$.　　(C) $\dfrac{1}{6}$.　　(D) $\dfrac{1}{2}$.

二、填空题：$9\sim14$ **小题，每小题** 4 **分，共** 24 **分．**

(9) 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点$(1,0)$处有公共切线，则$\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right)=$ ________．

(10) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程$(z+y)^x=xy$ 确定，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ ________．

(11) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$ ________．

(12) 微分方程 $y''-y'+\dfrac{1}{4}y=0$ 的通解为 $y=$ ________．

(13) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$ 则 $|\boldsymbol{A}|=$ ________．

(14) 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，则 $E(X\mathrm{e}^{2X})=$ ________．

三、解答题：$15\sim23$ **小题，共** 94 **分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

(15)（本题满分 10 分）

当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x$ 与 ax^n 为等价无穷小量，求 n 与 a 的值．

(16)（本题满分 10 分）

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$、直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x，V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求 a 的值．

(17)（本题满分 10 分）

设平面区域 D 由直线 $x=3y$，$y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成，计算$\displaystyle\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

(18)（本题满分 10 分）

设生产某产品的固定成本为 60000 元，可变成本为 20 元 / 件，价格函数为 $P=60-\dfrac{Q}{1\,000}$，（P 是单价，单位：元；Q 是销量，单位：件），已知产销平衡，求：

（Ⅰ）该商品的边际利润；

（Ⅱ）当 $P=50$ 时的边际利润，并解释其经济意义；

（Ⅲ）使得利润最大的定价 P．

(19)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上可导，$f(0)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$，证明：

（Ⅰ）存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$；

（Ⅱ）对（Ⅰ）中的 a，存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{1}{a}$．

(20)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a\\1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1\\1&b\end{bmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$．