浙大优学
一题一课

刷百题不如解透一题

低年级同步课后提升 / 毕业班专题自主复习

一题一课
初中数学

YITI YIKE
CHUZHONG SHUXUE

第三册

主　　编　惠红民
本册主编　滕滨州

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

一题一课

初中数学(第三册)

主　　编　惠红民

本册主编　滕滨州

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

一题一课.初中数学(第三册)/惠红民主编.—杭州:浙江大学出版社,2016.6
ISBN 978-7-308-15679-0

Ⅰ.①一… Ⅱ.①惠… Ⅲ.①中学数学课—初中—题解 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第054063号

一题一课.初中数学(第三册)
主编 惠红民

策　　划 陈海权(电子信箱:chess332@163.com)
责任编辑 夏晓冬
责任校对 金佩雯 汪淑芳
封面设计 林智广告
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路148号 邮政编码310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷 杭州杭新印务有限公司
开　　本 889mm×1194mm 1/16
印　　张 5.75
字　　数 230千
版 印 次 2016年6月第1版 2016年6月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-15679-0
定　　价 13.80元

目　　录

刷百题不如解透一题

“学习解题的最好方法之一就是研究例题”

解题，无疑是学好数学的最佳途径. 于是，刷题风起，题海浪涌，一时间，必刷题、必做题、高频题、母题等，不一而足. 以为刷题是学习数学的魔方，题海则是成就学霸的金丹！固然，学习数学离不开解题，但沉溺题海并不意味着能考好数学，不如通过分析典型例题的解题过程来学会解题更加简短有效。

“题不在多，但求精彩”

“千淘万漉虽辛苦，吹尽狂沙始到金。”直白地表达出我们在“一题一课”系列的“一题”即例题选取上的态度与倾向。每一道例题不仅体现对概念的理解与思考价值，还体现知识与方法的代表性；每一道例题不仅解析精到、解法充满活力，更通过思维拓展，借题发挥，探索其中的内在规律和方法，达成“做一题，通一类，会一片”的目标 。

“多刷题，不如多反思”

“学而不思则罔，思而不学则殆。”做题需要产生效果、追求效益。**种种经验表明：题不是刷的越多越好，如果缺乏解题反思，不但浪费时间，甚至误导学习。**因此，本书在写作体例与排版上都突出了反思的意义与重要性，反思的过程既是对数学知识和解题方法的理解与强化的过程，也是学生内化解题能力的过程。

“解题是一种实践性的技能，就像游泳、滑雪或弹钢琴一样，只能通过模仿、练习和钻研才能占为己有”

例题帮助学生理解并学会运用同步教材所学知识及技能，然后通过变式练习（一课一练）内化落实，既满足低年级同步自主学习，又满足毕业班专题自主复习。

如果您是学生，请加入“一题一课学习交流”QQ群(205743216)，我们一起学习、提高；如果您是老师，请加入“一题一课教师研讨”QQ群(529481589)，我们一起研讨、探索。

“学习的本质，不在于记住哪些知识，而在于它触发了你的思考。”学习数学的道路上，祝愿您学会思考，体会成功！刷百题不如解透一题，“一题一课”系列图书还有哪些分册，请看本书封底。

第一章　三角形

第 1 课　与三角形有关的线段

1. 三角形边、角的相关概念：能正确辨识三角形个数，并用符号语言表示.

2. 三角形三边关系：三角形任意两边的和大于第三边；三角形任意两边的差小于第三边.

3. 三角形内主要线段：三角形的高、中线、角平分线的理解.

第 1 题　如图 1-1，完成以下问题：

(1) 图中共有几个三角形？用符号把它们写出来.

(2) 线段 AE 是哪些三角形的边？

(3) $\angle C$ 是哪些三角形的角？

(4) 若 $AB=8$，$AC=6$，求 BC 边的取值范围.

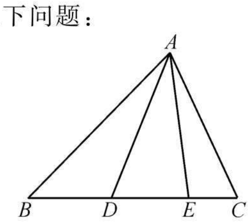

图 1-1

(5) 试说明 $EA+EB>DA+DB$ 的理由.【问题也可以引申为：当点 F 是 AD 上任一点时，(与点 A，D 不重合) 连结 BF，画出图形并说明 $EA+EB>FA+FB$ 的理由】

(6) 作出 $\triangle ABD$ 的三条高线.

【分析】 问题(1)中辨识三角形的个数时，可以按边的规律或角的规律去数，找出所有三角形，必须做到不重不漏；

问题(2)的突破口是找出除 A、E 两个顶点外的第三个顶点，要求这个点不在线段 AE 上，并且 A，E 两点和寻求的第三点间有线段连接；

问题(3)转化为寻求 $\angle C$ 两边上各取一个点所连线段的条数；

问题(4)考查的是三角形三边关系的应用：三角形中第三边的取值范围介于已知两边的差与两边的和之间；

问题(5)首先需要明确的是几何不等式来源于三角形中的三边关系，而这道题属于几何不等关系与代数不等关系的综合应用；

问题(6)的难点是作钝角三角形的高.

【解析】(1) 6 个. 按边的规律：$\triangle BDA$，$\triangle BEA$，$\triangle BCA$，$\triangle DEA$，$\triangle DCA$，$\triangle ECA$；

若按角的规律：$\triangle BAD$，$\triangle BAE$，$\triangle BAC$，$\triangle DAE$，$\triangle DAC$，$\triangle EAC$.

(2) 线段 AE 是以下三个三角形的边：$\triangle AED$，$\triangle AEB$，$\triangle AEC$.

(3) $\angle C$ 是以下三个三角形的角：$\triangle ACB$，$\triangle ACD$，$\triangle ACE$.

(4) 因为三角形任意两边的和大于第三边，任意两边的差小于第三边，

所以已知两边的差＜三角形的第三边＜已知两边的和，即 $8-6<BC<8+6$.

所以 $2<BC<14$.

(5) 如图 1-2，在 $\triangle ADE$ 中，因为 $EA+ED>AD$，

所以 $EA+ED+BD>AD+BD$.(根据不等式的性质，在不等式的两边同时加上一个 BD(正数)，不等号的方向不变)

即 $EA+EB>DA+DB$.

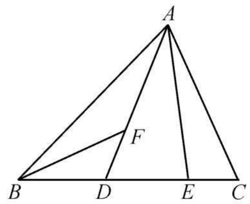

图 1-2

归纳基本图形规律：D 为 $\triangle EAB$ 的 EB 边上任一点(与端点不重合)，则 $EA+EB>DA+DB$.

引申：同理，若 F 为 $\triangle DAB$ 的边 DA 上任一点(与端点不重合)，则 $DA+DB>FA+FB$.

从而 $EA+EB>FA+FB$.

(6) 如图 1-3，DM，BN，AO 即为所求.

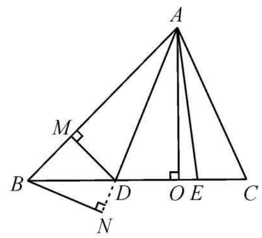

图 1-3

【经验分享】 1. 在稍微复杂的图形中数三角形的个数时，要么按边的规律去数，要么按角的规律去数，否则容易混乱，如例题中问题(1).

2. 要判断三条线段能否构成一个三角形，只需将两条较短线段长度的和与最长线段比较即可.

3. 三角形三边关系的应用中应注意基本图形的总结和归纳，如例题中问题(5).

4. 在钝角三角形中画高时，钝角的两条边上的高都在三角形外，如例题中问题(6).

学习心得

一课一练 1 （答案及解析见 P72）

1. 下列各组线段能组成一个三角形的是　　（　　）

A. 3cm，3cm，6cm　　B. 2cm，3cm，6cm

C. 5cm，8cm，12cm　　D. 4cm，7cm，11cm

2. 三角形的三边之比可能是　　（　　）

A. 1∶2∶3　　B. 1∶1∶2

C. 2∶3∶4　　D. 2∶3∶5

3. 图 1-4 中的三角形有________个，分别表示出来：________________.

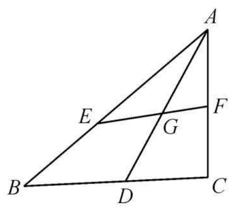

图 1-4

4. 图 1-5 中共有________个三角形，其中以 BC 为边的三角形有________，$\angle BEC$ 是________的内角，以 $\angle ABD$ 为内角的三角形有________个，它们分别是________________.

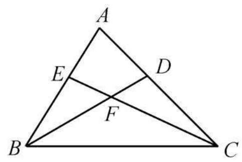

图 1-5

5. 一个等腰三角形的一条边长为 8cm，另一条边长为 5cm，则其周长为________cm.

6. 过图 1-6 中 A，B，C，D 四个点中的三个点画三角形，可画多少个三角形？请分别表示出来.

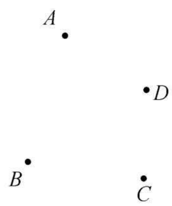

图 1-6

7. 如图 1-7，在 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别是 BC，AD 的中点，则图中与 $\triangle ABE$（除本身外）面积相等的三角形有________________.

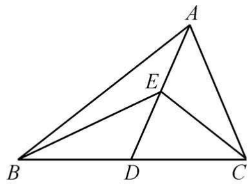

图 1-7

8. 观察如图 1-8 所示图案，它们是按照一定规律排列的，依照此规律，第 4 个图案中共有________个三角形，第 10 个图案共有________个三角形，第 n 个图案共有________个三角形.

图 1-8

9. 在 $\triangle ABC$ 中，三边长都是整数，$AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，且满足 $a>b>c$，$a=8$，那么满足条件的三角形共有多少个？

10. 如图 1-9，已知 P 是 $\triangle ABC$ 内一点.

（1）求证：$PA+PB+PC>\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$；

（2）求证：$AB+AC+BC>PA+PB+PC$.

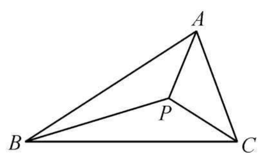

图 1-9

易错追踪

第 2 课　与三角形有关的角(1)

1. 三角形内角和定理：简单的 180°结论是以后解决角度计算问题的基础。

2. 三角形内角和定理的推论 1：三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和；

推论 2：三角形的一个外角大于与它不相邻的任意一个内角。

3. 三角形的外角是沟通不同三角形的桥梁：此三角形的外角充当着彼三角形的内角，如此的牵连使得不同的三角形组成了一个复杂的图形。

第 2 题　如图 2-1，已知$\angle C=31°$，$\angle A=50°$，点 B 在$\triangle AEC$ 的边 AE 的延长线上，点 F 在 CE 边上，完成以下问题：

(1) $\angle AEC=$ ________，$\angle EFB+\angle B=$ ________；

(2) 若$\angle B=n°$，求$\angle BFC$ 的度数；(用含 n 的式子表示)

(3) 求证：$\angle BFC>\angle A$；

(4) 延长 BF 交 AC 边于点 D，当$\angle B=\angle C$ 时，判断$\angle BEF$ 与$\angle CDF$ 的大小，并说明理由。

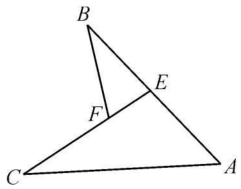

图 2-1

【分析】问题(1)由三角形内角和定理可得，$\angle AEC=180°-\angle C-\angle A=180°-31°-50°=99°$，由三角形外角的性质可得，$\angle EFB+\angle B=\angle AEC=99°$。

问题(2)的突破口是两次应用外角性质，$\angle BFC$ 显然只能看作是哪个三角形的外角，等于哪两个内角的和，有了这样的想法就不难得到$\angle BFC=\angle BEF+\angle B$，因为$\angle B$ 已知，只需再考虑$\angle BEF$ 是哪个三角形的外角，得到$\angle BEF=\angle A+\angle C$，综合得到$\angle BFC=\angle BEF+\angle B=\angle A+\angle C+\angle B$。一般在数学上会形象地称四边形 $ABFC$ 为燕尾形。

问题(3)由问题(2)的分析，容易得证，注意书写的几何语言格式。

问题(4)要注意图形的结构特点：$\triangle BEF$ 和$\triangle CDF$ 有一组对顶角连接，我们形象地称这样的图形为蝴蝶形，由三角形内角和定理或外角的性质，均可想到$\angle BFC=\angle BEF+\angle B=\angle CDF+\angle C$。

【解析】(1) $\angle AEC=180°-\angle C-\angle A=180°-31°-50°=99°$，

$\angle EFB+\angle B=\angle AEC=99°$。

(2) 因为$\angle BFC$ 是$\triangle BEF$ 的外角，所以$\angle BFC=\angle BEF+\angle B$。

因为$\angle BEF$ 是$\triangle AEC$ 的外角，所以$\angle BEF=\angle A+\angle C$。

所以$\angle BFC=\angle BEF+\angle B=\angle A+\angle C+\angle B=50°+31°+n°=(81+n)°$。

(3) 因为$\angle BFC$ 是$\triangle BEF$ 的外角，所以$\angle BFC>\angle BEF$。

因为$\angle BEF$ 是$\triangle AEC$ 的外角，所以$\angle BEF>\angle A$。

所以$\angle BFC>\angle A$。

(4) 判断：$\angle BEF=\angle CDF$。理由如下：

解法一：因为$\angle B+\angle BEF+\angle BFE=180°$，所以$\angle BEF=180°-\angle B-\angle BFE$。

同理，$\angle CDF=180°-\angle C-\angle CFD$。

因为$\angle B=\angle C$，$\angle BFE=\angle CFD$，

所以$\angle BEF=\angle CDF$。

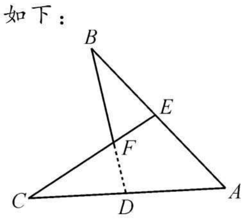

图 2-2

解法二：

因为$\angle BFC$ 是$\triangle BEF$ 的外角，所以$\angle BFC=\angle BEF+\angle B$。

又因为$\angle BFC$ 也是$\triangle CDF$ 的外角，所以$\angle BFC=\angle CDF+\angle C$。

因为$\angle B=\angle C$，所以$\angle BEF=\angle CDF$。

【经验分享】1. 认识三角形外角性质的基本图形(可形象地看作三角旗形)，要能从复杂图形中分解出基本图形。

2. 形象归纳基本图形，注意基本图形的结论的归纳，如三角旗形、燕尾形、蝴蝶形、五角星形等。

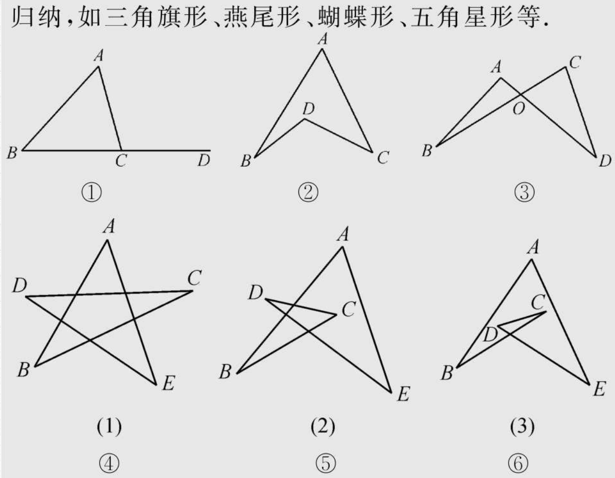

图 2-3

3. 注重一题多解，体会转化的数学思想：如五角星形⑥的五个角的和的证明，证法一：延长 BC 交 AE 于点 F，则$\angle BFE=\angle A+\angle B$，$BC$，$DE$ 交于点 M，则$\angle EMF=\angle C+\angle D$，五个角的和转化为$\triangle EMF$ 的三个内角的和，从而得证；证法二：连结 BE，利用蝴蝶形，将$\angle C+\angle D$ 的和转化为$\angle CBE+\angle DEB$ 的和，五个角的和转化为$\triangle ABE$ 的三个内角的和，从而得证；证法三：可延长 DC 交 AE 于点 G，大家可以去思考怎样转化最方便。

学习心得

一课一练 2

（答案及解析见 P72）

1. 已知$\triangle ABC$的三个内角的度数之比$\angle A:\angle B:\angle C=2:3:5$，则$\angle B=$________，$\angle C=$________.

2. 判断三角形的形状.（按角分类）

(1)若三角形三个内角的度数之比为2∶3∶7，则这个三角形一定是（　　）

A. 直角三角形　　B. 等腰三角形

C. 锐角三角形　　D. 钝角三角形

(2)在$\triangle ABC$中，$\angle A=\frac{1}{3}\angle B=\frac{1}{5}\angle C$，则$\triangle ABC$是（　　）

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 以上都不对

3. 如图2-4，求$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4$的度数.

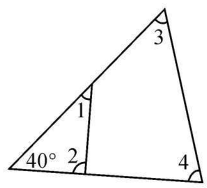

图2-4

4. 如图2-5，在折纸活动中，点D，E分别是边AB，AC上的点，将$\triangle ABC$纸片沿着DE折叠压平，点A与点A'重合，(1)若$\angle A=75^\circ$，则$\angle 1+\angle 2=$________；

(2)若$\angle A=n^\circ$，则$\angle 1+\angle 2=$________.（用含n的式子表示）

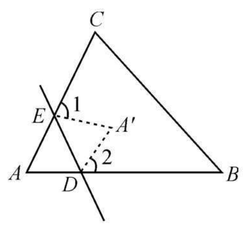

图2-5

5. (1)如图2-6，$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$分别是$\triangle ABC$的外角，$\angle 1+\angle 2+\angle 3=$________；

(2)结论：三角形的外角和等于________.

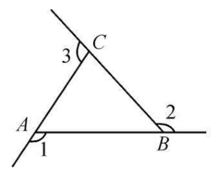

图2-6

6. 如图2-7，试说明：(1)$\angle BDC>\angle A$；(2)$\angle BDC=\angle A+\angle B+\angle C$.

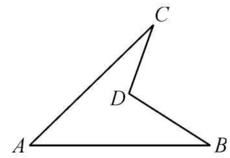

图2-7

7. 如图2-8，已知五角星形$ABCDE$，求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$的度数.

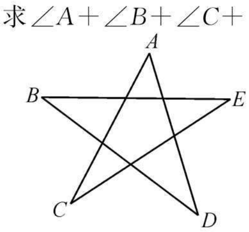

图2-8

8. 如图2-9，在$\triangle ABC$中，AD，AE分别是$\triangle ABC$的高和角平分线.

(1)若$\angle B=30^\circ$，$\angle C=50^\circ$，求$\angle DAE$的度数；

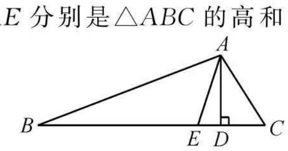

图2-9

(2)试写出$\angle DAE$与$\angle C-\angle B$有何关系？($\angle C>\angle B$)

9. 如图2-10，在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$，D为BC边上一点，E为AC边上一点，且$\angle ADE=\angle AED$.

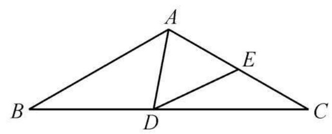

图2-10

(1)若$\angle BAD=50^\circ$，求$\angle CDE$的度数；

(2)若$\angle BAD=n^\circ$，求$\angle CDE$的度数.（用含n的式子表示）

易错追踪

第 3 课　与三角形有关的角(2)

应用三角形外角的性质及三角形内角和定理，探究三角形的内角、外角平分线相交构成的角与第三个内角之间的数量关系.

第 3 题　探究三角形的内角、外角平分线相交构成的角与第三个内角之间的数量关系.

(1) 如图 3-1，在 $\triangle ABC$ 中，当 $\angle ABC$ 的平分线与 $\angle ACB$ 的平分线交于点 O，求 $\angle BOC$ 与 $\angle A$ 之间的数量关系.

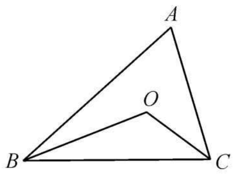

图 3-1

(2) 如图 3-2，在 $\triangle ABC$ 中，BP，CP 分别是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle DBC$ 和 $\angle ECB$ 的平分线，试探究 $\angle BPC$ 与 $\angle A$ 的关系.

(3) 如图 3-3，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC$ 的平分线 BE 与外角 $\angle ACD$ 的平分线 CE 交于点 E，探究 $\angle E$ 与 $\angle A$ 之间的数量关系.

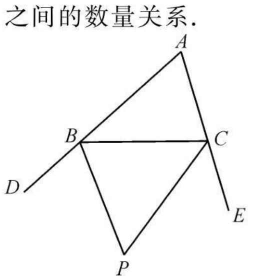

图 3-2

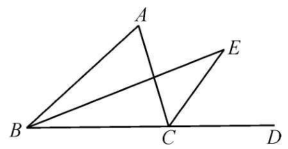

图 3-3

【分析】(1) 首先分析 $\angle BOC$ 是哪个三角形的内角或外角，由此可以转化为 $\angle BOC=180^\circ-(\angle CBO+\angle BCO)$；再分析 $\angle A$ 所在的三角形，可以转化为 $\angle A=180^\circ-(\angle ABC+\angle ACB)$；最后运用角平分线的定义，即可发现探究的结论：三角形两个内角的平分线所夹的钝角等于 90° 加上第三角的一半，即 $\angle BOC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$.

(2) 先分析三角形两个外角的和等于 $\angle DBC+\angle ECB=\angle A+\angle ACB+\angle A+\angle ABC=180^\circ+\angle A$，从而 $\angle CBP+\angle BCP=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$，放在 $\triangle BPC$ 中理解，则 $\angle BPC=180^\circ-(\angle CBP+\angle BCP)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$.

(3) 先两次应用外角的性质：$\angle ACD=\angle A+\angle ABC$　①，$\angle DCE=\angle E+\angle CBE$　②. 等式①两边都除以 2，得 $\frac{1}{2}\angle ACD=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle ABC$　③，再由角平分线的性质可推导③式即为 $\angle DCE=\frac{1}{2}\angle A+\angle CBE$　④，比较②与④可得 $\angle E=\frac{1}{2}\angle A$.

【解析】(1) 因为 $\angle ABC$ 的平分线与 $\angle ACB$ 的平分线交于点 O，

所以 $\angle CBO=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle BCO=\frac{1}{2}\angle ACB$.

因为 $\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180^\circ$，

所以 $\angle CBO+\angle BCO=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$.

所以 $\angle BOC=180^\circ-(\angle CBO+\angle BCO)=180^\circ-(90^\circ-\frac{1}{2}\angle A)=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$.

(2) 因为 BP，CP 分别是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle DBC$ 和 $\angle ECB$ 的平分线，

所以 $\angle CBP=\frac{1}{2}\angle DBC$，$\angle BCP=\frac{1}{2}\angle ECB$.

因为 $\angle DBC=\angle A+\angle ACB$，$\angle ECB=\angle A+\angle ABC$，

所以 $\angle DBC+\angle ECB=\angle A+\angle ACB+\angle A+\angle ABC=180^\circ+\angle A$.

所以 $\angle CBP+\angle BCP=\frac{1}{2}(\angle DBC+\angle ECB)=\frac{1}{2}(180^\circ+\angle A)=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$.

所以 $\angle BPC=180^\circ-(\angle CBP+\angle BCP)=180^\circ-(90^\circ+\frac{1}{2}\angle A)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$.

(3) 因为 $\angle ABC$ 的平分线 BE 与外角 $\angle ACD$ 的平分线 CE 交于点 E，

所以 $\angle EBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle DCE=\frac{1}{2}\angle ACD$.

因为 $\angle ACD=\angle A+\angle ABC$，$\angle DCE=\angle E+\angle EBC$，

所以 $\frac{1}{2}\angle ACD=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle ABC$.

所以 $\angle DCE=\frac{1}{2}\angle A+\angle EBC$，从而 $\angle E=\frac{1}{2}\angle A$.

【经验分享】 求三角形的内角平分线或外角平分线组成的角的度数时，常常运用三角形的内角和定理及三角形的内角与外角的关系解决.

学习心得

一课一练 3 （答案及解析见 P73）

1. 如图 3-4，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC$，$\angle ACB$的平分线相交于点O.

若$\angle ABC=70^\circ$，$\angle ACB=50^\circ$，则$\angle BOC=$________；

若$\angle ABC+\angle ACB=116^\circ$，则$\angle BOC=$________；

若$\angle A=76^\circ$，则$\angle BOC=$________；

若$\angle A=n^\circ$，则$\angle BOC=$________；

若$\angle BOC=120^\circ$，则$\angle A=$________.

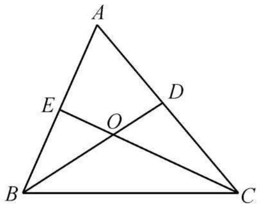

图 3-4

2. 如图 3-5，$\angle ABC$的平分线和$\triangle ABC$的外角$\angle ACE$的平分线交于点D，$\angle D=30^\circ$，$\angle A$的度数是________；当$\angle D=$________时，$\angle A$的度数是90°.

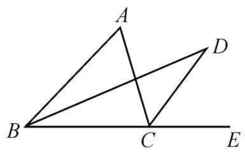

图 3-5

3. 在$\triangle ABC$中，$\angle ABC$和$\angle ACB$的外角平分线交于点O，设$\angle BOC=\beta$，则$\angle A$等于（　　）

A. $180^\circ-\beta$　　B. $90^\circ-\dfrac{\beta}{2}$

C. $180^\circ-2\beta$　　D. $180^\circ-\dfrac{\beta}{2}$

4. 如图 3-6，在$\triangle ABC$中，外角$\angle ACD$的平分线与$\angle ABC$的平分线交于点A_1，$\angle A_1BC$的平分线与$\angle A_1CD$的平分线交于点A_2，则$\angle A_1$与$\angle A$的数量关系是______________，继续作$\angle A_2BC$的平分线与$\angle A_2CD$的平分线交于点A_3，如此下去可得$\angle A_3$，…，$\angle A_n$，那么猜想$\angle A_n$与$\angle A$的数量关系是____________.

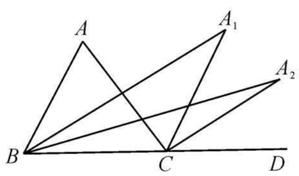

图 3-6

5. 如图 3-7，已知线段AD，BC相交于点Q，DM平分$\angle ADC$，BM平分$\angle ABC$，且$\angle A=27^\circ$，$\angle M=33^\circ$，求$\angle C$的度数.

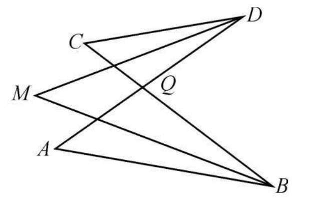

图 3-7

6. 如图 3-8，BE，CE分别平分$\angle ABD$，$\angle ACD$.

(1)当$\angle A=70^\circ$，$\angle D=140^\circ$，求$\angle E$的度数；

(2)猜想$\angle A$，$\angle D$与$\angle E$之间的数量关系，并说明理由；

(3)当$\angle BDC$是平角时，直接写出$\angle A$与$\angle E$之间的数量关系.

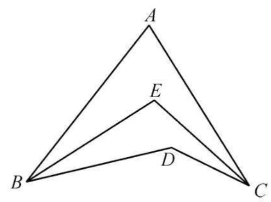

图 3-8

7. 如图 3-9，已知$\angle MON=90^\circ$，点A，B分别在射线OM，ON上，$\angle OAB$的平分线与$\angle ABN$的平分线所在的直线交于C点.

(1)求$\angle C$的大小；

(2)当点A，B分别在射线OM，ON上移动时，试问$\angle C$的大小是否发生变化？若保持不变，请说明理由；若发生变化，求出变化范围.

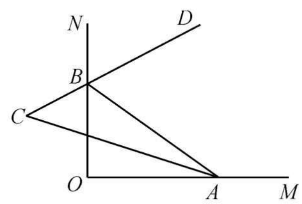

图 3-9

易错追踪

第 4 课　多边形的内角和与外角和

1. 多边形的问题转化为三角形的问题是学习本课内容的基本思路.

2. 多边形的内角和公式：$(n-2)\times180^\circ$；外角和为 360°.

第 4 题　画图看看（见图 4-1），试一试回答下列问题：

（1）三角形从一个顶点出发，能引出________条对角线；

（2）四边形从一个顶点出发，能引出________条对角线，从一个顶点引出的对角线将四边形分成________个三角形；

（3）五边形从一个顶点出发，能引出________条对角线，从一个顶点引出的对角线将五边形分成________个三角形；

（4）六边形从一个顶点出发，能引出________条对角线，从一个顶点引出的对角线将六边形分成________个三角形；

……

（5）归纳：一般地，n 边形从一个顶点出发，能引出________条对角线，从一个顶点引出的对角线将 n 边形分成________个三角形，n 边形的内角和等于____________；

（6）请由此推导 n 边形的对角线条数和 n 边形的外角和公式.

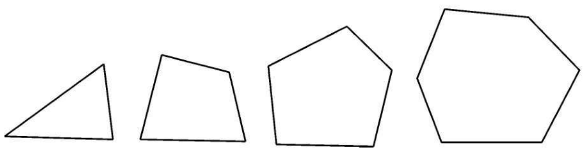

图 4-1

【分析】例题的设计是希望通过探索与归纳，让同学们体会从特殊到一般和转化的数学思想方法. 从一个顶点出发作对角线，来达到将多边形分割成三角形的目的. 实际动手操作后不难发现，一般地，n 边形从一个顶点出发，能引出 $(n-3)$ 条对角线；从一个顶点引出的对角线将 n 边形分成 $(n-2)$ 个三角形，n 边形的内角和等于 $(n-2)\times180^\circ$. 具体可以这样思考：从一点出发画它与所有点的连线，它本身以及和它相邻的 2 个点不用画，还剩 $(n-3)$ 个点，所以能连 $(n-3)$ 条对角线.

同学们可进一步思考：从 n 边形的边上、n 边形内、n 边形外的任意一点出发，与顶点连接，来分割三角形，如图 4-2、4-3、4-4 推导归纳 n 边形的内角和，看看跟上面思考所得结果是否相同.

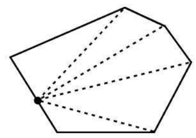

图 4-2

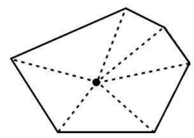

图 4-3

如图 4-2，n 边形的内角和推导：$(n-1)\times180^\circ-180^\circ=(n-2)\times180^\circ$；

如图 4-3，n 边形的内角和推导：$n\times180^\circ-360^\circ=(n-2)\times180^\circ$；

如图 4-4，n 边形的内角和推导：$(n-1)\times180^\circ-180^\circ=(n-2)\times180^\circ$.

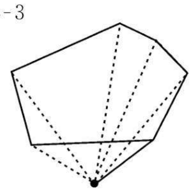

图 4-4

【解析】如图 4-5，（1）0；（2）1，2；（3）2，3；（4）3，4；

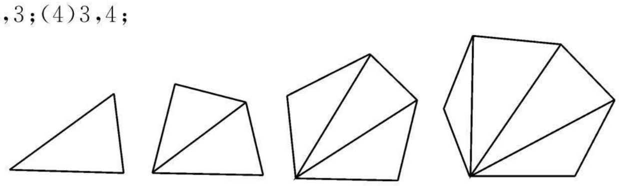

图 4-5

（5）归纳：$n-3$，$n-2$，$(n-2)\times180^\circ$；

（6）思考：从一个顶点可画 $(n-3)$ 条对角线，从 n 个顶点可画 $n(n-3)$ 条对角线，由于重复一半，因此 n 边形的对角线条数公式为 $\frac{n(n-3)}{2}$.

n 边形的外角和公式推导：因为 n 边形的内角与外角构成了 n 个平角，

所以 n 边形的外角和为 $n\times180^\circ-(n-2)\times180^\circ=360^\circ$.

【经验分享】 1. 以三角形的内角和知识为基础，通过观察、类比、推理等探索多边形的内角和与外角和的公式.

2. 用转化的方法与思想，把问题转化为三角形的问题，利用数形结合探索规律.

3. 在例题的解决过程中体会从特殊到一般的认识问题的方法.

学习心得

一课一练 4 (答案及解析见 P73)

1. 把一张多边形纸片剪去其中一个角，剩下的部分是一个四边形，则这张纸片原来的形状不可能是　　(　　)

A. 六边形　　B. 五边形

C. 四边形　　D. 三角形

2. 画出图 4-6 中各多边形的全部对角线：

图 4-6

3. 十边形的内角和为________，对角线的条数为____________.

4. 已知一个多边形的内角和为 1080°，则它的边数为________，对角线的条数为________.

5. (1)如图 4-7，则 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=$________.

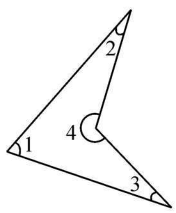

图 4-7

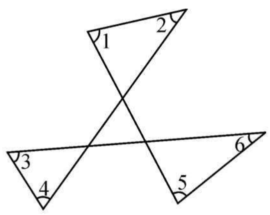

图 4-8

(2)如图 4-8，则 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=$____________.

(3)如图 4-9，则 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8=$____________.

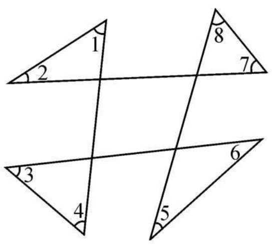

图 4-9

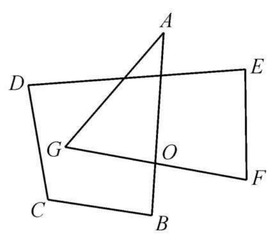

图 4-10

(4)如图 4-10，则 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G=$____________.

6. 一个多边形的每一个外角都等于 40°，则它的边数是________；一个多边形的每一个内角都等于 140°，则它的边数是____________.

7. 一只蚂蚁从点 A 出发，每爬行 5 米便向左转 60°，则这只蚂蚁需要爬行多少路程才能回到点 A？

8. 如图 4-11，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A+\angle D=\alpha$，$\angle ABC$ 的平分线与 $\angle BCD$ 的平分线交于点 P，求 $\angle P$.(用含 α 的式子表示)

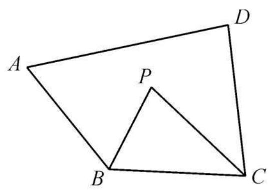

图 4-11

9. 若一个多边形的内角和与外角和的比为 $7:2$，求这个多边形的边数.

10. (1)一个多边形除了一个内角之外，其余内角之和为 2670°，求这个多边形的边数和少加的内角的大小.

(2)若多边形所有内角与它的一个外角的和为 600°，求这个多边形的边数及内角和.

易错追踪

第5课 镶 嵌

1. 一般地,如果拼接在同一个点的各个角的和恰好等于360°(周角),相邻的多边形有公共边,那么多边形能镶嵌成一个平面图形.

2. 一种或两种正多边形的镶嵌,要有分情况讨论的意识.

3. 方程思想在镶嵌问题中的应用——实质是求二元一次方程的整数解.

第5题 (1)在边长相等的正三角形、正方形、正五边形、正六边形中取一种正多边形镶嵌,哪些正多边形可以进行平面镶嵌?

(2)在边长相等的正三角形、正方形、正五边形、正六边形中取两种正多边形镶嵌,哪两种正多边形可以进行平面镶嵌?

【分析】用形状相同或不同的平面封闭图形,把一块地面既无缝隙、又不重叠地全部覆盖,叫作平面镶嵌,也叫作密铺.

在知识内容上,从三角形的内角和到多边形的内角和,再将内角和公式应用于平面镶嵌,环环相扣,层层递进,适合学习的认知特点.

本课其实把问题转化为数学问题,实质就是求二元(或一元)一次方程的整数解,各种平面图形能作"平面镶嵌"的必备条件是图形拼合后同一个顶点的若干个角的和恰好等于360°.

(1)单个正多边形可以镶嵌的条件:每个内角都能被360°整除,正三角形、正方形、正六边形能单独作平面镶嵌,而正五边形、正七边形、正八边形、正九边形……的内角的度数都不能被360°整除,所以这些正多边形都不能镶嵌.

(2)从正三角形、正方形、正五边形、正六边形中取两种正多边形镶嵌,有6种可能:①正三角形和正方形;②正三角形和正五边形;③正三角形和正六边形;④正方形和正五边形;⑤正方形和正六边形;⑥正五边形和正六边形.

【解析】(1)设正多边形的每一个内角的度数为x,镶嵌的正多边形个数为n,$nx=360°$.

①正三角形的每一个内角为60°,$60°\times n=360°$,$n=6$;

②正方形的每一个内角为90°,$90°\times n=360°$,$n=4$;

③正五边形的每一个内角为108°,$108°\times n=360°$,n不是整数,故不合题意;

④正六边形的每一个内角为120°,$120°\times n=360°$,$n=3$.

所以正三角形、正方形、正六边形能单独作平面镶嵌,而正五边形不能镶嵌.

(2)设两个正多边形的每一个内角的度数分别为x和y,镶嵌的两个正多边形个数分别为a,b,则$ax+by=360°$.

①正三角形和正方形:$60°\times a+90°\times b=360°$,化简得$2a+3b=12$,正整数解为$\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$;

②正三角形和正五边形:$60°\times a+108°\times b=360°$,没有正整数解;

③正三角形和正六边形:$60°\times a+120°\times b=360°$,化简得$a+2b=6$,正整数解为$\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}$或$\begin{cases}a=4\\b=1\end{cases}$;

④正方形和正五边形:$90°\times a+108°\times b=360°$,没有正整数解;

⑤正方形和正六边形:$90°\times a+120°\times b=360°$,没有正整数解;

⑥正五边形和正六边形:$108°\times a+120°\times b=360°$,没有正整数解;

综上所述,正三角形和正方形,正三角形和正六边形可以组合进行平面镶嵌.

【经验分享】 1.用同一种正多边形镶嵌,可建立等式$\frac{(n-2)\times180°}{n}\cdot m=360°$,其中$n$代表正$n$边形,$m$代表正$n$边形的个数,化简为$(m-2)(n-2)=4$,它有且仅有三组正整数解:$\begin{cases}m=6,\\n=3,\end{cases}$或$\begin{cases}m=4\\n=4,\end{cases}$或$\begin{cases}m=3,\\n=6,\end{cases}$即分别用6个等边三角形、4个正方形、3个正六边形可以镶嵌平面.

2.用两种正多边形镶嵌平面,可建立二元一次方程$px+qy=360°$,其中x,y是正多边形每个内角的度数,p,q是对应正多边形的个数.

3.用全等的任意三角形、任意四边形可以镶嵌平面.数学家已经证明凸七边形以及多于七边的凸多边形都不能镶嵌平面.

学习心得

一课一练 5 （答案及解析见 P74）

1. 装饰大世界出售下列形状的地砖：①正方形；②长方形；③正五边形；④正六边形；⑤全等的三角形. 若只选购其中某一种地砖镶嵌地面，可供选用的地砖共有　（　　）

A. 1 种　　B. 2 种

C. 3 种　　D. 4 种

2. 只用下列图形不能镶嵌平面的是　（　　）

A. 三角形　　B. 四边形

C. 正五边形　　D. 正六边形

3. 下列正多边形的组合中，不能镶嵌平面的是　（　　）

A. 正方形和正三角形

B. 正方形和正八边形

C. 正三角形和正十二边形

D. 正方形和正六边形

4. 用两种正多边形进行镶嵌平面，不能与正三角形匹配的多边形是　（　　）

A. 正方形　　B. 正六边形

C. 正十二边形　　D. 正十八边形

5. 如图 5-1，用同样规格的黑白两种正方形瓷砖铺设正方形地面，观察图形并猜想填空：当黑色瓷砖为 20 块时，白色瓷砖为________块；当白色瓷砖为 n^2（n 为正整数）块时，黑色瓷砖为________块.

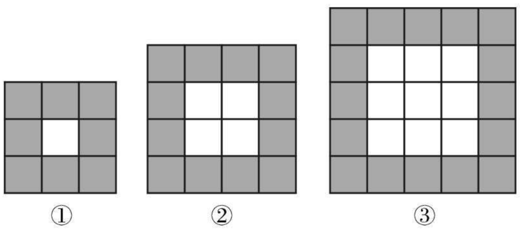

图 5-1

6. 用正三角形和正六边形镶嵌，若每一个顶点周围有 m 个正三角形、n 个正六边形，则 m，n 满足的关系式是　（　　）

A. $2m+3n=12$　　B. $m+n=8$

C. $2m+n=6$　　D. $m+2n=6$

7. 用两种正多边形镶嵌，哪些能镶嵌成一个平面区域？

(1)3 个正三角形＋2 个正方形；

(2)2 个正三角形＋2 个正六边形；

(3)4 个正三角形＋1 个正六边形；

(4)1 个正方形＋2 个正八边形；

(5)2 个正五边形＋1 个正十边形；

(6)1 个正三角形＋2 个正十二边形.

8. 正三角形和正六边形作平面镶嵌，在一个顶点周围，正三角形与正六边形各需要多少个？

9. 能否用 1 块正三角形、2 块正方形、1 块正六边形（边长相同）铺满地面？

易错追踪

第二章　全等三角形

第6课　全等三角形

1. 全等三角形的概念：能够完全重合的两个三角形叫作全等三角形.

2. 全等三角形的性质：全等三角形的对应边相等，全等三角形的对应角相等.

3. 全等变换是指改变图形的位置，而不改变其形状和大小的图形变换，一定可以通过平移、旋转、翻折而使两个全等三角形重合.

第6题　如图6-1，已知点 A,E,C,F 在同一条直线上，且 $\triangle ABC\cong\triangle EDF$.

(1)当 $\angle B=45°$，$\angle DEF=60°$，求 $\angle DFE$ 的度数.

(2)如果 $AB=8$，$EG=3$，求 DG 的长.

(3)求证：$AB/\!/DE$.

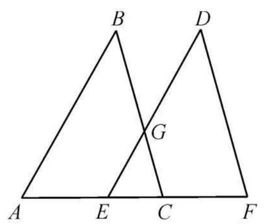

图6-1

【分析】全等三角形是以后学习四边形、相似、圆等知识的基础；是解决与线段、角相关问题的一个出发点，运用全等三角形，可以证明线段相等、线段的和差倍分关系、角相等、两直线位置关系等常见的几何问题.

(1)$\angle DFE$ 在 $\triangle DEF$ 中，根据三角形内角和定理，$\angle DFE=180°-\angle D-\angle DEF$，

由 $\triangle ABC\cong\triangle EDF$ 得 $\angle D=\angle B=45°$，因此 $\angle DFE=180°-45°-60°=75°$.

(2)由 $\triangle ABC\cong\triangle EDF$ 可得全等三角形的对应边相等，$DE=BA=8$，$DG=DE-EG=8-3=5$.

(3)由 $\triangle ABC\cong\triangle EDF$ 可得全等三角形的对应角相等，$\angle A=\angle DEF$，所以 $AB/\!/ED$.

【解析】(1)因为 $\triangle ABC\cong\triangle EDF$，$\angle B=45°$(已知)，

所以 $\angle D=\angle B=45°$(全等三角形的对应角相等).

因为 $\angle DEF=60°$(已知)，

所以 $\angle DFE=180°-\angle D-\angle DEF=75°$(三角形内角和定理).

(2)因为 $\triangle ABC\cong\triangle EDF$，$AB=8$(已知)，

所以 $DE=AB=8$(全等三角形的对应边相等).

因为 $EG=3$(已知)，所以 $DG=DE-EG=8-3=5$.

(3)因为 $\triangle ABC\cong\triangle EDF$(已知)，

所以 $\angle A=\angle DEF$(全等三角形的对应角相等).

所以 $AB/\!/DE$(同位角相等，两直线平行).

【经验分享】 1. 找全等三角形的对应元素.

2. 在书写全等三角形时要注意，对应顶点写在对应的位置上.

3. 在涉及有关两个三角形全等的条件下解决线段的和差问题、线段的平行问题、角度的计算，常常要借助全等三角形的性质，利用对应边或对应角进行转化.

4. 求角度问题经常要用到三角形内角和定理及外角的性质.

学习心得