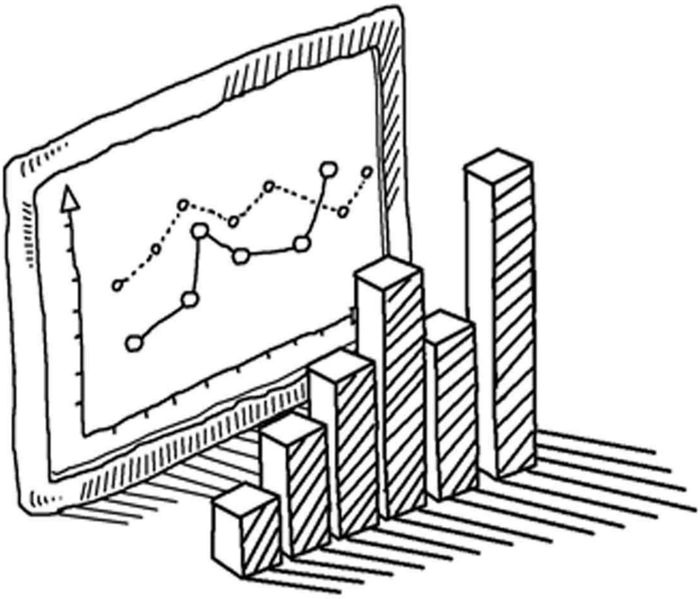
高等教育公共基础课精品系列规划教材
"立德树人"系列教材



概率论与数理统计

◎ 程慧燕 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等教育公共基础课精品系列规划教材

“立德树人”系列教材

概率论与数理统计

主　编　程慧燕

副主编　王继禹　贾秀玲　赵艳伟

李　娜　孙海燕

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书介绍了概率论与数理统计的基本概念、基本理论和基本方法，根据教育部高等学校数学与统计学指导委员会制定的《理工类、经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》和最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的内容和要求编写而成.

全书共分为八章，内容包括概率论和数理统计两部分，其中第一章至第五章为概率论部分，第六章至第八章为数理统计部分. 每章配有习题，书后附有习题参考答案，习题中有往届研究生考试试题，既便于教学，也利于学生考研复习.

本书既可以作为高等学校工科、理科(非数学类专业)、经济管理类本科各专业的教材和研究生入学考试参考书，也可以供有关专业技术人员、科技工作者工作参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/程慧燕主编. —北京: 北京理工大学出版社，2018. 8
ISBN 978 - 7 - 5682 - 6198 - 2

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①程…　Ⅲ. ①概率论 - 高等学校 - 教材②数理统计 - 高等学校 - 教材　Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 192000 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http: //www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 /
开　　本 / 787 毫米 × 1092 毫米　1/16
印　　张 / 12　　责任编辑 / 王美丽
字　　数 / 283 千字　　文案编辑 / 孟祥雪
版　　次 / 2018 年 8 月第 1 版　2018 年 8 月第 1 次印刷　　责任校对 / 周瑞红
定　　价 / 32. 00 元　　责任印制 / 李志强

序

德是育人的灵魂统帅，是一个国家道德文明发展的显现. 坚持“育人为本、德育为先”的育人理念，把“立德树人”作为教育的根本任务，为郑州工商学院校本教材建设指引方向.

立德树人，德育为先. 教材编写应着眼于促进学生全面发展，创新德育形式，丰富德育内容，将德育工作渗透至教学各个环节，提高学生的实践创新能力和综合素质，以培养具有健全的人格、历史使命感和社会责任心，富有创新精神和实践能力的创新型、应用型人才为目标.

立德为先，树人为本. 要培养学生的创新创业能力，强化其创新创业教育. 要以培养学生创新精神、创业意识与创业能力为核心，以培养学生的首创与冒险精神、创业能力和独立开展工作的能力为教育指向，改革教育内容和教学方法，突出学生的主体地位，注重学生个性化发展，强化创新创业教育与素质教育的充分融合，把创新创业作为重要元素融入素质教育.

郑州工商学院校本教材注重引导学生积极参与教学活动过程，突破教材建设过程中过分强调知识系统性的思路，力求把握好教材内容的知识点、能力点和学生毕业后的岗位特点. 编写以必需和够用为度，适应学生的知识基础和认知规律，深入浅出，理论联系实际，注重结合基础知识、基本训练以及实验实训等实践活动，培养学生分析、解决实际问题的能力和提高实践技能，突出技能培养目标.

前 言

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律的数学学科，是高等学校理工类、经济管理理类本科各专业的一门重要的基础理论课. 随着现代科学技术的发展，概率论与数理统计在自然科学、社会学、工程技术、工农业生产等领域中得到越来越广泛的应用. 因此，在我国高等学校绝大多数专业的教学计划中，概率论与数理统计均列为必修课或限定选修课.

本教材着重介绍概率论与数理统计的基本概念、基本原理和基本方法，强调直观性和应用背景，注重可读性，突出数学基本思想和基本方法，以期对后续课程的学习和进一步深造有所裨益.

本教材在编写过程中，广泛征集读者建议和同行专家的意见，结合学院培养应用型人才的目标和内涵式发展的实际，有如下特点:

1. 针对性强. 本教材在内容的编排上贴近学生学习实际，契合部分学生考研的需求，同时结合考研数学大纲的要求，只编写概率统计最实用、常用的部分，既不对学生学习造成过多的心理压力，又能满足学生后续课程学习和继续深造的需要.

2. 系统规范. 本教材编者在编写过程中尽可能让教材逻辑更顺畅，思路更清晰，内容更具可读性，概念符号更规范科学.

3. 注重小结. 很多学生不会学习、学不好的关键在于不会有效地总结，本教材针对学生的这个特点和实际，着重对本章主要内容以及重难点进行小结.

4. 精选例题、习题. 本教材根据编者多年的授课经验并结合工作实际，精选例题和习题，既可满足普通学生平时学习和巩固所学知识的需要，又能满足有深造意愿的学生考研辅导的需求，可取可舍.

本教材是郑州工商学院集体智慧的结晶，由学院教务处牵头，公共基础教学部杜明银主任主审，程慧燕主编，王继禹、贾秀玲、赵艳伟、李娜、孙海燕参与了教材的编写工作. 具体分工如下: 第一章由王继禹编写，第二章和第五章由贾秀玲编写，第三章和附录由赵艳伟编写，第四章和第六章由李娜编写，第七章和第八章由程慧燕编写，全书由程慧燕、孙海燕统稿.

在教材的编写过程中，郑州工商学院数学教研室的教授们提出了许多宝贵的意见和建议，在此表示衷心的感谢!

由于时间仓促和水平有限，书中不当和疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

目 录

第一章

概率论的基本概念

学习目标

(1) 了解样本空间、随机试验、随机事件等概念.

(2) 理解概率、条件概率、独立性的概念及独立重复试验的概念.

(3) 掌握事件的关系及运算；掌握概率的基本性质，会计算较简单的古典概率、几何概率；掌握概率的五个基本公式：加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式；掌握独立事件的性质，会利用其进行相关计算；掌握伯努利概型中概率的计算方法.

现实世界中发生的现象千姿百态，概括起来无非是两类现象：确定性现象和不确定性现象. 例如，水在标准大气压下温度达到100 ℃时必然沸腾，在温度为0 ℃时必然结冰；同性电荷相互排斥，异性电荷相互吸引，等等. 这类现象称为确定性现象，它们在一定的条件下一定会发生. 另外有一类现象，在一定条件下，试验有多种可能的结果，但事先又不能预测是哪一种结果，此类现象称为不确定性现象. 例如，测量一个物体的长度，其测量误差的大小；从一批电视机中随便取一台，电视机的寿命长短等都是不确定性现象. 不确定性现象中有一类现象，在个别试验中结果呈现不确定性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律性，这类现象称为随机现象. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门基础学科.

这里我们注意到，随机现象是与一定的条件密切联系的. 例如，在城市交通的某一路口，指定的1小时内，汽车的流量多少就是一个随机现象，而“指定的1小时内”就是条件，若换成2小时内、5小时内，流量就会不同. 如将汽车的流量换成自行车流量，差别就会更大，故随机现象与一定的条件是有密切联系的.

概率论与数理统计的应用是很广泛的，几乎渗透所有科学技术领域，如工业、农业、国防与国民经济的各个部门. 例如，工业生产中，可以应用概率统计方法进行质量控制、工业试验设计、产品的抽样检查等. 还可使用概率统计方法进行气象预报、水文预报和地震预

报，等等. 另外，概率统计的理论与方法正在向各基础学科、工程学科、经济学科渗透，产生了各种边缘性的应用学科，如排队论、计量经济学、信息论、控制论、时间序列分析等.

第一节　样本空间、随机事件

一、随机试验

人们是通过试验去研究随机现象的，为对随机现象加以研究所进行的观察或实验，称为试验. 若一个试验具有下列三个特点:

(1) 可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且事先可以明确试验所有可能出现的结果;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

则称这一试验为**随机试验**，记为 E.

下面举一些随机试验的例子.

E_1: 抛一枚硬币，观察正面 H 和反面 T 出现的情况.

E_2: 掷两颗有区别的骰子，观察出现的点数.

E_3: 在一批电视机中任意抽取一台，测试它的寿命.

E_4: 城市某一交通路口，指定某一小时内的汽车流量.

E_5: 记录某一地区一昼夜的最高温度和最低温度.

二、样本空间与随机事件

在一个试验中，不论可能的结果有多少，总可以从中找出一组基本结果，满足:

(1) 每进行一次试验，必然出现且只能出现其中的一个基本结果;

(2) 任何结果，都是由其中的一些基本结果所组成的.

随机试验 E 的所有基本结果组成的集合称为样本空间，记为 Ω. E 的每个基本结果，称为**样本点**.

下面写出前面提到的试验 $E_k(k=1,2,3,4,5)$ 的样本空间 Ω_k:

$\Omega_1:\{\mathrm{H},\mathrm{T}\}$;

$\Omega_2:\{(i,j)\mid i,j=1,2,3,4,5,6\}$;

$\Omega_3:\{t\mid t\geqslant 0\}$;

$\Omega_4:\{0,1,2,\cdots\}$;

$\Omega_5:\{(x,y)\mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低温度，y 表示最高温度，并设这一地区温度不会小于 T_0 也不会大于 T_1.

随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的**随机事件**，简称**事件**，通常用大写字母 A，B，C，…表示. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生. 例如，在掷骰子的试验中，可以用 A 表示“出现点数为偶数”这个事件，若试验结果是“出现 6 点”，就称事件 A 发生.

特别地，由一个样本点组成的事件称为基本事件. 例如，试验 E_1 有两个基本事件 $\{\mathrm{H}\}$、$\{\mathrm{T}\}$; 试验 E_2 有 36 个基本事件 $\{(1,1)\},\{(1,2)\},\cdots,\{(6,6)\}$.

每次试验中都必然发生的事件，称为**必然事件**. 样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是 Ω 自身的子集，每次试验中都必然发生，故它就是一个必然事件. 因而必然事件也用 Ω 表示. 在每次试验中不可能发生的事件称为**不可能事件**，即它不包含任何样本点，因此不可能事件

用$\varnothing$表示.

三、事件之间的关系及其运算

由上述可知，事件之间的关系与事件的运算可以用集合之间的关系与集合的运算来处理. 下面我们讨论事件之间的关系及运算.

(1) 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B（或称事件 B 包含事件 A），记作 $A\subset B$.

$A\subset B$ 的一个等价说法是，如果事件 B 不发生，则事件 A 必然不发生.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等（或等价），记作 $A=B$.

为了方便起见，规定对于任一事件 A，有 $\varnothing\subset A$. 显然，对于任一事件 A，有 $A\subset\Omega$.

(2) “事件 A 与 B 中至少有一个发生”的事件称为 A 与 B 的并（和）事件，记作$A\cup B$.

由事件并的定义，立即得到:

对任一事件 A，有

$$A\cup\Omega=\Omega;\quad A\cup\varnothing=A.$$

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示“A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个事件发生”这一事件.

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示“可列无穷多个事件 A_i 中至少有一个发生”这一事件.

(3) “事件 A 和事件 B 同时发生”的事件称为事件 A 与事件 B 的交（积）事件，记作 $A\cap B$（或 AB）.

由事件交的定义，立即得到:

对任一事件 A，有

$$A\cap\Omega=A;\quad A\cap\varnothing=\varnothing.$$

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{n}B_i$ 表示“B_1，B_2，…，B_n 同时发生”这一事件.

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}B_i$ 表示“可列无穷多个事件 B_i 同时发生”这一事件.

(4) “事件 A 发生而事件 B 不发生”的事件称为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A-B$.

由事件差的定义，立即得到:

对任一事件 A，有

$$A-A=\varnothing;\quad A-\varnothing=A;\quad A-\Omega=\varnothing.$$

(5) 如果两个事件 A 与 B 不可能同时发生，则称事件 A 与 B 为**互不相容事件**（**互斥事件**），记作$AB=\varnothing$.

(6) 若 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 为**互逆事件**（**对立事件**）. A 的对立事件记为 $\overline{A}$，$\overline{A}$ 是由所有不属于 A 的样本点组成的事件，它表示“A 不发生”这样一个事件. 显然 $\overline{A}=\Omega-A$.

对立事件必为互不相容事件，反之，互不相容事件未必为对立事件.

以上事件之间的关系及运算可以用维恩（Venn）图来直观地描述. 若用平面上一个矩形表示样本空间 Ω，矩形内的点表示样本点，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，则事件 A 与 B 的各种关系及运算如图 1.1 ~ 图 1.6 所示.

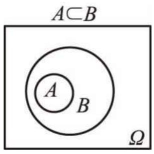


图 1.1

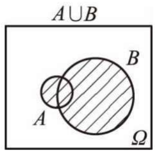


图 1.2

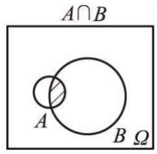


图 1.3

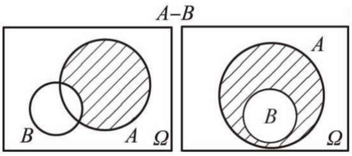


图 1.4

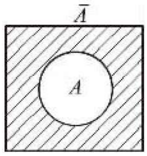


图 1.5

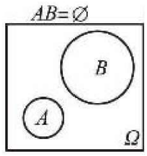


图 1.6

可以验证一般事件的运算满足如下运算律:

(1) 交换律. $A\cup B=B\cup A$, $AB=BA$.

(2) 结合律. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(AB)C=A(BC)$.

(3) 分配律. $A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$, $A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$.

分配律可以推广到有穷或可列无穷的情形，即

$$A\cap\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap A_i),\qquad A\cup\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup A_i),$$

$$A\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap A_i),\qquad A\cup\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcap_{i=1}^{\infty}(A\cup A_i).$$

(4) $A-B=A\overline{B}=A-AB$.

(5) 对偶律. 对有穷个或可列无穷个 A_i，恒有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i},$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

【例 1-1】 设 A, B, C 为三个事件，用 A, B, C 的运算式表示下列事件:

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生: $A\overline{B}\,\overline{C}$或 $A-B-C$.

(2) A, B 都发生而 C 不发生: $AB\overline{C}$或 $AB-C$.

(3) A, B, C 至少有一个事件发生: $A\cup B\cup C$.

(4) A, B, C 至少有两个事件发生: $(AB)\cup(AC)\cup(BC)$.

(5) A, B, C 恰好有两个事件发生: $(AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)$.

(6) A, B, C 恰好有一个事件发生: $(A\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{B}C)$.

(7) A, B 至少有一个发生而 C 不发生: $(A\cup B)\overline{C}$.

(8) A, B, C 都不发生: $\overline{A\cup B\cup C}$或$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

【例 1-2】 甲、乙、丙三人射击同一目标，令 A_1 表示事件“甲击中目标”，A_2 表示事件“乙击中目标”，A_3 表示事件“丙击中目标”. 用 A_1, A_2, A_3 的运算表示下列事件:

(1) 三人都击中目标;

(2) 只有甲击中目标;

(3) 只有一人击中目标;

(4) 至少有一人击中目标;

(5) 最多有一人击中目标.

解　用 A, B, C, D, E 分别表示上述 (1) ~ (5) 中的事件.

(1) 三人都击中目标，即事件 A_1, A_2, A_3 同时发生，所以

$$A=A_1A_2A_3.$$

(2) 只有甲击中目标，即事件 A_1 发生，而事件 A_2 和 A_3 都不发生，所以

$$B=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}.$$

(3) 只有一人击中目标，即事件 A_1, A_2, A_3 中有一个发生，而另外两个不发生，所以

$$C=(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3).$$

(4) 至少有一人击中目标，即事件 A_1, A_2, A_3 中至少有一个发生，所以

$$D=A_1\cup A_2\cup A_3.$$

"至少有一人击中目标"也就是恰有一人击中目标，或者恰有两人击中目标，或者三人都击中目标，所以事件 D 也可以表示成

$$D=[(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)]\cup[(\overline{A_1}A_2A_3)\cup(A_1\overline{A_2}A_3)\cup(A_1A_2\overline{A_3})]\cup(A_1A_2A_3).$$

(5) 最多有一人击中目标，即事件 A_1, A_2, A_3 或者都不发生，或者只有一个发生，所以

$$E=(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})\cup[(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)].$$

"最多有一人击中目标"也可以理解成"至少有两人没击中目标"，即事件 $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ 中至少有两个发生，所以

$$E=(\overline{A_1}\,\overline{A_2})\cup(\overline{A_2}\,\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}\,\overline{A_3}).$$

第二节　概率、古典概型

除必然事件与不可能事件外，任一随机事件在一次试验中都有可能发生，也有可能不发生. 人们常常希望了解某些事件在一次试验中发生的可能性的大小. 为此，我们首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表示事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

一、频率

定义 1.1　设在相同的条件下进行了 n 次试验，若随机事件 A 在 n 次试验中发生了 k 次，则比值 $\frac{k}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频率**，记为 $f_n(A)=\frac{k}{n}$.

由定义 1.1 容易推知，频率具有以下性质:

(1) 对任一事件 A，有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) 对于必然事件 Ω，有 $f_n(\Omega)=1$;

(3) 若事件 A, B 互不相容，则

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B).$$

一般地，若事件 A_1, A_2, …, A_m 两两互不相容，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i) .$$

事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 表示 A 发生的频繁程度，频率大，事件 A 发生的就频繁，在一次试验中，A 发生的可能性也就大. 反之亦然. 因而，直观的想法是用 $f_n(A)$ 表示 A 在一次试验中发生可能性的大小. 但是，由于试验的随机性，即使同样是进行 n 次试验，$f_n(A)$ 的值也不一定相同. 但大量试验证实，随着重复试验次数 n 的增加，频率 $f_n(A)$ 会逐渐稳定于某个常数附近，而偏离的可能性很小. 频率具有“稳定性”这一事实，说明了刻画事件 A 发生可能性大小的数——概率具有一定的客观存在性.（严格来说，这是一个理想的模型，因为实际上并不能绝对保证在每次试验时条件都保持完全一样，这只是一个理想的假设.）

历史上有一些著名的试验，德·摩根（De Morgan）、蒲丰（Buffon）和皮尔逊（Pearson）都曾进行过大量掷硬币试验，所得结果如表 1.1 所示.

表 **1.1**

试验者	掷硬币次数	出现正面次数	出现正面的频率
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

可见出现正面的频率总在 0.5 附近摆动，随着试验次数的增加，它逐渐稳定于 0.5. 这个 0.5 就反映了正面出现的可能性的大小.

每个事件都存在一个这样的常数与之对应，因而可将频率 $f_n(A)$ 在 n 无限增大时逐渐趋向稳定的这个常数定义为事件 A 发生的概率. 这就是概率的统计学定义.

定义 1.2 设事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 k，当 n 很大时，频率 $\frac{k}{n}$ 在某一数值 p 的附近摆动，而随着试验次数 n 的增加，发生较大摆动的可能性越来越小，则称数 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)=p$.

要注意的是，上述定义并没有提供确切的计算概率的方法，因为我们永远不可能依据它确切地定出任何一个事件的概率. 在实际中，不可能对每一个事件都做大量的试验，而且不知道 n 取多大才行；如果 n 取很大，则不一定能保证每次试验的条件都完全相同. 而且没有理由认为，取试验次数为 $n+1$ 来计算频率，总会比取试验次数为 n 来计算频率会更准确、更逼近所求的概率.

为了理论研究的需要，我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出概率的公理化定义.

二、概率的公理化定义

定义 1.3 设 Ω 为样本空间，A 为事件，对于每一个事件 A 赋予一个实数，记作 $P(A)$，如果 $P(A)$ 满足以下条件：

（1）非负性：$P(A) \geqslant 0$；

（2）规范性：$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：对于两两互不相容的可列无穷多个事件 A_1，A_2，…，A_n，…有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率.

在第五章中将证明，当 $n\to\infty$ 时，频率 $f_n(A)$ 在一定意义下接近于概率 $P(A)$. 基于这一事实，我们就有理由用概率 $P(A)$ 来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小.

由概率公理化定义，可以推出概率的一些性质.

性质 1　$P(\varnothing)=0$.

证　令 $A_i=\varnothing(i=1,2,\cdots)$，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$，

则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing，且 A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j,\ i,\ j=1,2,\cdots).$$

由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(\varnothing),$$

而由 $P(\varnothing)\geqslant 0$ 及上式知 $P(\varnothing)=0$.

这个性质说明：不可能事件的概率为 0. 但逆命题不一定成立，我们将在第二章加以说明.

性质 2（有限可加性）　若 A_1，A_2，…，A_n 为两两互不相容事件，则有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

证　令 $A_i=\varnothing(i=n+1,n+2,\cdots)$，则由可列可加性及性质 1，得

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

性质 3　设 A，B 是两个事件，则 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

特别地，若 $A\subset B$，则有 $P(A)\leqslant P(B)$，且 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

证　因为 $A\subset B$，所以 $B=A\cup(B-A)$，且 $A(B-A)=\varnothing$，由性质 2，有

$$P(B)=P(A)+P(B-A).$$

又 $P(B-A)\geqslant 0$，所以 $P(A)\leqslant P(B)$，并且

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

对于任意两个事件 A 与 B，由于 $B-A=B-AB$，且 $AB=A$，$P(AB)=P(A)$ 可得

$$P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB).$$

上式称为概率的**减法公式**.

性质 4　对任一事件 A，有 $P(A)\leqslant 1$.

证　因为 $A\subset\Omega$，由性质 3 和概率的规范性，可得

$$P(A)\leqslant 1.$$

性质 5　对于任一事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

证　因为 $A\cup\overline{A}=\Omega, A\overline{A}=\varnothing$，由概率的规范性和性质 2，有

$$P(A)+P(\overline{A})=1,$$

于是

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质6（加法公式） 对于任意两个事件 A 与 B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证 因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，且 $A(B-AB)=\varnothing$，$AB\subset B$，由性质2和性质3，可得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质6 还可推广到三个事件的情形．例如，设 A_1，A_2，A_3 为任意三个事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

一般地，设 A_1，A_2，…，A_n 为任意 n 个事件，可由归纳法证得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

【例1-3】 设 A，B 为两事件，$P(A)=0.5$，$P(B)=0.3$，$P(AB)=0.1$，求：

(1) A 发生但 B 不发生的概率；

(2) A 不发生但 B 发生的概率；

(3) 至少有一个事件发生的概率；

(4) A，B 都不发生的概率；

(5) 至少有一个事件不发生的概率．

解 (1) $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.4$；

(2) $P(\overline{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=0.2$；

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7$；

(4) $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.7=0.3$；

(5) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.1=0.9$．

【例1-4】 已知 $P(\overline{A})=0.5$，$P(\overline{A}B)=0.2$，$P(B)=0.4$，求：

(1) $P(AB)$；

(2) $P(\overline{A}\,\overline{B})$．

解 (1) 由题意，$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.2$，$P(B)=0.4$，所以

$$P(AB)=0.4-0.2=0.2.$$

(2) 由于 $P(A)=1-0.5=0.5$，$P(AB)=0.2$，所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.2=0.7,$$

再由对偶律，有

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.7=0.3.$$

三、古典概型

定义1.4 如果随机试验 E 满足下列两个条件：

(1) 有限性．试验 E 的基本事件总数是有限个．

(2) 等可能性．每一个基本事件发生的可能性相同．

则称试验 E 为**古典概型**（或**等可能概型**）．

下面我们讨论古典概型中事件概率的计算公式.

设试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$. 显然基本事件 $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, $\cdots$, $\{\omega_n\}$ 是两两互不相容的，且

$$\Omega=\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\cdots\cup\{\omega_n\}$$

由于 $P(\Omega)=1$ 及 $P\{\omega_1\}=P\{\omega_2\}=\cdots=P\{\omega_n\}$，根据概率的性质，有

$$1=P\{\omega_1\}+P\{\omega_2\}+\cdots+P\{\omega_n\}=nP\{\omega_i\}\,(i=1,2,\cdots,n).$$

即

$$P\{\omega_1\}=P\{\omega_2\}=\cdots=P\{\omega_n\}=\frac{1}{n}.$$

如果事件 A 包含 k 个基本事件，即 $A=\{\omega_{i_1}\}\cup\{\omega_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{\omega_{i_k}\}$，其中 i_1, i_2, $\cdots$, i_k 是 1，2，$\cdots$，n 中的某 k 个数，则有

$$P(A)=P\{\omega_{i_1}\}+P\{\omega_{i_2}\}+\cdots+P\{\omega_{i_k}\}=\frac{k}{n}.$$

即

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件}}{\Omega\text{ 包含的基本事件}}. \tag{1-1}$$

一般地，要计算古典概型中事件 A 的概率，只需计算样本空间 Ω 所包含的基本事件总数 n 以及事件 A 所包含的基本事件个数 k. 这时常常要用到加法原理、乘法原理和排列组合公式.

【例 1-5】　将一枚硬币抛掷三次，求:

(1) 恰有一次出现正面的概率;

(2) 至少有一次出现正面的概率.

解　将一枚硬币抛掷三次的样本空间为

$$\Omega=\{\mathrm{HHH},\mathrm{HHT},\mathrm{HTH},\mathrm{THH},\mathrm{HTT},\mathrm{THT},\mathrm{TTH},\mathrm{TTT}\},$$

Ω 中包含有限个元素，且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同.

(1) 设 A 表示“恰有一次出现正面”，则

$$A=\{\mathrm{HTT},\mathrm{THT},\mathrm{TTH}\},$$

故有

$$P(A)=\frac{3}{8}.$$

(2) 设 B 表示“至少有一次出现正面”，由 $\overline{B}=\{\mathrm{TTT}\}$，得 $P(B)=1-P(\overline{B})=\frac{7}{8}$.

当样本空间的元素较多时，一般不再将 Ω 中的元素一一列出，而只需分别求出 Ω 中与 A 中包含的元素的个数（即基本事件的个数），再由式（1-1）求出 A 的概率.

【例 1-6】　一口袋装有 6 个球，其中 4 个白球，2 个红球. 从袋中取球两次，每次随机地取一个. 考虑两种取球方式:

(a) 第一次取一个球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再任取一个球. 这种取球方式叫作**有放回抽取**.

(b) 第一次取一个球后不放回袋中，第二次从剩余的球中再取一个球. 这种取球方式叫作**不放回抽取**.