

随机非线性大系统的 分散控制研究

RESEARCH ON THE DECENTRALIZED CONTROL
FOR STOCHASTIC NONLINEAR LARGE-SCALE SYSTEMS

武赛 著

$$\begin{aligned} dx_{1i} &= [x_{1i} + \alpha_{1i} + \beta_{1i} + \phi_{1i}(x_{1i})]dt + \sigma_{1i}(x_{1i})dw_{1i} \\ dx_{2i} &= [x_{2i} + \alpha_{2i} + \phi_{2i}(x_{2i}) + \beta_{2i}x_{1i}]dt + \\ &\quad \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial x_{2i}}{\partial x_{1j}} [x_{1j} + \alpha_{1j} + \phi_{1j}(x_{1j}) + \beta_{1j}x_{1i}]dt + \\ &\quad \frac{\partial x_{2i}}{\partial x_1} [x_1 + \alpha_1 + \beta_1 + \phi_1(x_1) + \sigma_1(x_1)]dt - \frac{1}{2} \sigma_{2i}^2(x_{2i})dt \\ &\quad + \frac{\partial x_{2i}}{\partial x_{1j}} \sigma_{1j}^2(x_{1j})dt, \quad (j=2,3,\dots,n-1) \\ dx_{3i} &= [x_{3i} + \phi_{3i}(x_{3i}) + \beta_{3i}x_{2i}]dt + \\ &\quad \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial x_{3i}}{\partial x_{2j}} [x_{2j} + \alpha_{2j} + \phi_{2j}(x_{2j}) + \beta_{2j}x_{1j}]dt + \\ &\quad \frac{\partial x_{3i}}{\partial x_2} [x_2 + \alpha_2 + \beta_2 + \phi_2(x_2) + \sigma_2(x_2)]dt - \\ &\quad \frac{1}{2} \sigma_{3i}^2(x_{3i})dt + \frac{\partial x_{3i}}{\partial x_{2j}} \sigma_{2j}^2(x_{2j})dt \end{aligned}$$



华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

随机非线性大系统的分散控制研究

武 赛 著



华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

· 广州 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

随机非线性大系统的分散控制研究/武赛著. —广州: 华南理工大学出版社, 2018. 8

ISBN 978 - 7 - 5623 - 5705 - 6

I. ①随… II. ①武… III. ①非线性控制系统 - 分散控制 - 研究 IV. ①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 163741 号

随机非线性大系统的分散控制研究

武赛 著

出 版 人: 卢家明

出版发行: 华南理工大学出版社

(广州五山华南理工大学 17 号楼, 邮编 510640)

<http://www.scutpress.com.cn> E-mail: scutc13@scut.edu.cn

营销部电话: 020 - 87113487 87111048 (传真)

责任编辑: 詹志青

印 刷 者: 虎彩印艺股份有限公司

开 本: 787mm × 960mm 1/16 印张: 8.5 字数: 166 千

版 次: 2018 年 8 月第 1 版 2018 年 8 月第 1 次印刷

印 数: 1 ~ 500 册

定 价: 38.00 元

版权所有 盗版必究 印装差错 负责调换

前 言

随机大系统是具有规模庞大、因素众多、结构复杂、功能综合、目标多样以及不确定的随机性等特点的系统模型，它能更真实、更客观、更准确地反映工程实际中的系统运动规律。随机大系统的问题提出以来，对于随机线性大系统的控制研究已经比较成熟，而对于随机非线性大系统的控制问题研究就比较少，但在实际工程中非线性问题是不可避免的，因此对随机非线性大系统的研究具有重要的理论研究意义和实际应用价值。

本书针对随机微分方程描述的随机非线性大系统，基于随机 Lyapunov 稳定性理论和大系统分散控制理论，利用 Itô 微分公式、随机分析原理、随机控制 Lyapunov 函数、Lyapunov-Krasovskii 泛函、反步设计等方法，研究了不同类型的随机非线性大系统分散控制器的设计问题。本书展现了相关主要研究结果。

本书主要从以下几个方面介绍相关研究工作的内容：

1. 针对一类含有有界不确定参数的随机非线性大系统，在充分考虑各子系统之间互联项影响的基础上，运用反步法技术，通过构造四次型的随机控制 Lyapunov 函数，解决了严反馈随机非线性大系统的自适应状态反馈分散镇定控制器设计问题；并进一步考虑，在部分状态未知的情况下，设计了这类组合非线性系统的状态观测器，对未知状态进行估计，给出了输出反馈自适应分散镇定控制器的反步法设计过程，在此控制器

的作用下,所考虑的闭环、互联、随机非线性系统实现了概率意义下的有界稳定,仿真结果表明了控制算法的有效性。

2. 考虑一类可化为严反馈形式并含有 Wiener 噪声扰动的随机非线性大系统,将 Wiener 噪声的不确定方差作为未知参数作自适应控制,基于反步法,利用随机控制 Lyapunov 函数,研究了此类随机非线性大系统的状态反馈、输出反馈噪声-状态分散镇定问题,以及输出反馈鲁棒自适应分散镇定问题,构造性设计了此类随机非线性大系统的状态反馈和输出反馈分散控制器。所得的主要结果将已有的随机非线性系统集中控制结论扩展到了互联随机非线性系统的分散镇定问题中。

3. 由于传输、测量、反应等因素的影响,时滞在现实系统中普遍存在。时滞系统的控制也是近年来研究的热点。本书针对一类可化为严反馈形式的互联随机变时滞系统,选取适当的四次型控制 Lyapunov-Krasovskii 泛函,利用反步法设计的输出反馈无记忆分散控制器,使得其闭环系统的平衡点在概率意义下时滞无关渐近稳定。最后通过仿真实验,其结果表明了该控制算法的有效性。

4. 随机非线性大系统的分散自适应跟踪问题在以往的研究中很少涉及。本书研究了一类可参数化的随机非线性大系统的分散自适应跟踪问题,首先通过坐标变换将其转换为参数化的严反馈非线性大系统形式,然后利用反步法构造性设计系统状态反馈分散控制律及参数自适应律,在此分散控制器的作用下,每个局部输出都能够跟踪预先设定的参考信号,同时保证所有闭环信号有界。

本书最后,在总结归纳的基础上,提出了有待进一步研究和探索的一些问题。

本书的出版得到了广东省电子商务特色专业项目(项目号:50010102)和教育部项目(项目号:14YJC630141)的资助,在此特致谢意。

武 赛

2018 年 4 月 10 日

目 录

1 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 大系统理论	2
1.2.1 大系统理论的研究意义	2
1.2.2 大系统控制理论的研究方法	3
1.2.3 大系统控制理论的研究成果	5
1.3 随机系统基础知识	6
1.3.1 Itô 型随机系统	6
1.3.2 Itô 积分与微分	8
1.3.3 Itô 微分公式	9
1.4 随机大系统的研究意义与进展	10
1.5 主要研究结果	12
1.6 本书总体结构	13
1.7 本章小结	14
2 随机非线性系统控制理论及设计方法	15
2.1 引言	15
2.2 随机稳定性概念	16
2.3 随机 Lyapunov 稳定定理	18
2.4 随机控制 Lyapunov 函数理论	20
2.4.1 随机非线性系统镇定	20
2.4.2 随机控制 Lyapunov 函数	21

2.5	反步法	22
2.5.1	反步法的基本原理	23
2.5.2	反步法的设计过程	23
2.5.3	反步法的研究进展	26
2.6	本章小结	27
3	具有不确定参数的随机非线性大系统的分散镇定	28
3.1	引言	28
3.2	有界稳定理论	29
3.3	状态反馈鲁棒自适应分散控制	31
3.3.1	问题描述	31
3.3.2	状态反馈鲁棒自适应分散控制器的设计过程	32
3.4	输出反馈鲁棒自适应分散控制	35
3.4.1	问题描述	36
3.4.2	状态观测器设计	37
3.4.3	输出反馈鲁棒自适应分散控制器设计	38
3.4.4	仿真实验	41
3.4.5	结论	45
3.5	本章小结	45
4	随机非线性大系统噪声 – 状态分散镇定	46
4.1	引言	46
4.2	噪声 – 状态稳定理论	47
4.3	状态反馈噪声 – 状态分散镇定	48
4.3.1	问题描述	48
4.3.2	状态反馈噪声 – 状态分散镇定	49
4.4	输出反馈噪声 – 状态分散镇定	52
4.4.1	问题描述	52
4.4.2	状态观测器设计	54
4.4.3	输出反馈噪声 – 状态分散控制器设计	54
4.4.4	结论	58
4.5	输出反馈鲁棒自适应分散控制	58
4.5.1	状态观测器设计	59
4.5.2	输出反馈鲁棒自适应分散控制器设计	59
4.5.3	仿真实验	64

4.5.4 结论	68
4.6 本章小结	68
5 变时滞随机非线性大系统的输出反馈分散控制	69
5.1 引言	69
5.2 问题描述	70
5.3 时滞系统的稳定性	72
5.4 输出反馈分散控制器设计	73
5.4.1 状态观测器设计	73
5.4.2 输出反馈分散控制器设计过程	74
5.4.3 仿真实验	79
5.5 本章小结	82
6 随机非线性大系统状态反馈分散自适应跟踪	83
6.1 引言	83
6.2 问题描述	84
6.3 状态反馈分散自适应跟踪控制器设计	85
6.4 本章小结	90
7 研究结论	91
7.1 引言	91
7.2 研究成果	91
7.3 研究方向	92
参考文献	94
附录 A 随机大系统自适应神经网络分散镇定	102
A.1 问题描述	102
A.2 分散观测器设计	104
A.3 分散控制器设计及稳定性分析	106
A.4 仿真实验	112
附录 B 时滞随机大系统的自适应神经网络控制	116
B.1 问题描述	116
B.2 分散观测器与控制器设计	117
B.3 稳定性分析	121
B.4 仿真实验	125

1 绪论

1.1 引言

自然界中的现象、实际的工程技术和社会经济中许多问题的动态规律，可由确定性系统或随机系统来描述。当所考虑的问题对精度要求不高或随机因素可以忽略时，可用确定性系统来处理。然而，当问题要求有较高的精度或必须考虑随机因素时，就必须进行随机分析，这就导致了对随机系统的研究。如果所考虑的随机系统具有规模庞大、结构复杂、功能综合、目标多样、因素众多等特点时，我们就需要研究随机大系统。如果考虑信号传递等所产生的滞后对系统的影响时，我们又需要研究滞后随机大系统^[1]。

对于随机大系统的研究，主要是基于大系统的理论方法和随机系统理论。

采用大系统的方法，是把一个大的系统看成是由一些低阶子系统相互联结而成的动态系统。在讨论子系统的前提下，研究子系统间关联部分的影响，最后研究整个大系统的性质。在 20 世纪 70 年代提出“大系统理论”这个概念后，与大系统有关的许多问题给研究人员提出了新的、有趣的任务^[2]。由于大系统所研究的对象维数太高及其参数一般具有地理分布的特点，想要做集中计算几乎是不可能的，而必须按对象本身的性质，考虑成若干相互耦合的子系统，然后再从全局出发进行分析与设计^[3-4]。这种对象可以是社会、经济、管理、环境、能源、水资源、数据文件网络、电力网、运输、宇航、生态、柔性制造网络等等。设计时要考虑的目标也不仅有经济的指标和系统过渡过程的要求，还应该包括其他一些重要的因素，如通信的可靠性、获取信息的代价等。将这一覆盖领域如此之广、目标又多种多样的问题提炼出其共同的特点和优化方法，就是大系统理论的任务^[5]。

确定性模型是对实际系统的简化，其优点是模型相对简单，便于处理，因而给系统分析和设计带来方便。事实上，在任何实际系统的周围环境中，都存在着随机

因素。例如,通信设备中的噪声、系统输入输出量测中存在的随机误差、系统参数的不确定性等是实际系统中的典型随机因素。因此,对许多系统来说,不能简单地用确定型系统来取代,用所得的结果来解释实际系统的变化规律。事实上,随机系统的大量研究成果表明:随机系统不是确定型系统的简单推广。对于随机系统,必须要专门加以研究。

1.2 大系统理论

1.2.1 大系统理论的研究意义

近年来随着科学技术的发展,大系统(large-scale systems),或称关联系统(interconnected systems)、组合系统(composited systems),越来越多地出现在各种实际系统(如交通系统、经济系统、生物工程系统、社会系统、生态系统以及各种控制系统)中^[3-5]。

高维数是当今控制科学面临的一大难点。一个卫星用的太阳能帆板,由于轻与薄的要求,就只能用弹性体来刻画。就连卫星本身的控制用刚体模型代替弹性体已经出了不少事故,而弹性体本质上却是无穷维的^[6]。一个自然的想法是用低维近似模型来代替真实的高维对象,即各种意义下的模型降阶。模型降阶是用一个低阶模型来代替真实系统,而与之相类似的则是用若干个互相关联较小的小系统来代替真实的高维系统。

传统的控制理论都是建立在信息流基础上的,对于一个单个系统,基于信息反馈可以设计控制使其具有预期的品质,在这方面传统控制理论已发展得很完善。但是一些单个子系统通过相互间的信息传递可以产生复杂的大系统,对于一般的大系统目前还没有较好的统一处理方法。由此可见,系统间的信息关联是产生复杂性的一个根源。利用系统的联网以提高效率和复杂的具有多个子系统组合的系统的大量出现,使得这一复杂性变得日益突出。

大系统理论从 20 世纪 70 年代至今,曾经兴起一阵,而后又长期停滞不前,很大程度上是由于人们习惯于用处理小系统的思维和方法去处理大系统的问题。当今的大系统问题由于联网而又变得突出,这既是指例如大的电网、交通网等等的出现,也指由于大量通信数据交换、收送、处理的现代大网络。一方面,希望将小系统联结起来以更好地发挥效益,这就要求充分发挥关联的作用;而另一方面,现在大系

统研究的思想至少在稳定性上仍寄希望于小系统本身稳定而后压低关联的影响,使大系统实际上成为若干少关联的小系统的并立,这就形成了一个相互矛盾的局面。这一矛盾说明现行研究大系统的不少做法实际上并不能满足人们对大系统的厚望。

传统的控制器设计很少考虑与本身系统之外的其它系统之间的协调,因而如何实现子系统之间的组织相互协调,以实现 $1 + 1 > 2$ 的效果,成为新的研究课题。两个控制有效(作用不为零)的子系统可以通过关联实现整体稳定^[7],特别是在一些子系统出现故障时,其它子系统能给以补救,使系统总体不致受损过大而子系统本身又赢得了修复的时间。

在一个复杂的大控制系统中,为了运行正常,必须有一个分层递阶的结构,即应有控制器或协调器来从总体上处理好子系统之间的协调、互相配合,而在子系统上又应有控制器,其主要任务是控制好子系统本身。总体上与子系统上的控制器的时间常数将有大的量级上的区别,这刚好对应系统在总体上的变化与局部子系统中变化在时间量级上的不同。为了总体的目标,子系统应处于合适的地位,在这方面,目前在工业大过程的优化中原则上已有了一些优化算法^[8]。

1.2.2 大系统控制理论的研究方法

由于大系统具有高维数、强耦合、强不确定性等特点,传统的针对单个系统的经典及现代控制理论已难以解决大系统的分析与设计问题。分级递阶(hierarchical)控制及分散(decentralized)控制方法将整个大系统分解成一系列子系统来进行处理,能简化系统结构,便于实际控制系统的设计,所以关于大系统分级递阶控制理论与分散控制理论的研究引起了人们的兴趣^[9-11]。

目前大系统分析与设计主要采用的两种方法中,分级递阶控制方法^[9, 10]在上下级之间的通信比较多,在某些情况下系统的复杂化可能导致可靠性的下降,同时其主要用作开环控制;而分散控制方法^[11, 12]主要是对动态系统的闭环控制,总的思想是把大系统的控制分解为若干个独立子系统的控制,每个子系统的控制只使用子系统本身的信息或来自另外一个上层系统的信息。由于分散控制不需要各子系统之间信息的交换,各子系统只需根据各自的信息制定控制策略,从而便于对各子系统中出现的干扰迅速做出反应,有利于实现快速决策和实时控制。相对集中控制而言,分散控制更易于工程实现,且分散控制的控制器相对比较简单,所以在工业系统中应用较多。也正是由于这些优点,组合大系统的分散控制一直受到控制界的重视。

对于大系统来说,稳定性问题也是其基本问题,是研究的热点之一,目前关于大系统的稳定性研究一般分为如下几步:

(1) 将大系统分解成一系列相互关联的子系统, 且这些子系统及其关联项均有相应的数学描述。

(2) 假设不存在耦合作用时的每个孤立子系统均稳定, 此外对其稳定性有某些定量的规定, 如规定其 Lyapunov 函数衰减率的下界及关联项强弱的界限(一般以范数界来表示)。

(3) 给出一个关于这些下界及范数界的不等式条件, 并指出如果该条件满足则所考虑的大系统为稳定。

采用的具体方法主要有 Lyapunov 方法及输入输出(input-output)方法。众所周知, Lyapunov 方法是研究系统稳定性最基本和最一般的方法, 可将其简单地叙述为: 对一给定系统, 可以找到一个用状态变量来表示的标量函数 $V(x, t)$, 称之为 Lyapunov 函数, 基于 $V(x, t)$ 的性质及其对时间的导数 $\dot{V}(x, t)$ 可以做出关于系统稳定、渐近稳定、一致渐近稳定等各种结论。

对于大系统来说, 采用的 Lyapunov 函数主要有加权和 Lyapunov 函数和向量 Lyapunov 函数两种。加权和 Lyapunov 函数方法^[13, 14]是对每个孤立子系统假设一个 Lyapunov 函数 $V_i(x, t)$, 然后取其加权和

$$V(x, t) = \sum_{i=1}^N c_i V_i(x, t) \quad (1-1)$$

作为整个大系统的 Lyapunov 函数, 其中常数 $c_i > 0, i = 1, 2, \dots, N$ 。而向量 Lyapunov 函数方法^[15-17]则是对整个大系统定义一个向量 Lyapunov 函数 $V^T = (V_1(x, t) \dots V_N(x, t))$, 然后根据 M 矩阵的性质和 PDU(正定渐减辐射状无界函数)的定义对 $\dot{V}$ 提出相应的条件来分析和研究大系统的稳定性。

研究表明, 能用向量 Lyapunov 函数方法确定系统稳定性一般也就能用加权和 Lyapunov 函数方法确定其稳定性, 因此, 一般说来加权和 Lyapunov 函数应用范围更广。本书所采用的均为加权和 Lyapunov 函数。

输入输出(input-output)方法研究大系统的稳定性是将组成大系统的各个子系统用一个算子或者一个函数空间的数学关系来描述, 然后用泛函分析的方法来进行研究。其基本要求是若系统输入有界则输出也应有界, 一般以输入输出的 L_2 增益来度量。

用输入输出方法研究系统的稳定性的基本理论工具包括小增益定理^[18, 19]及无源性(passivity)理论^[20, 21]。系统的增益是用来描述在由输入到输出的信号传递过程中, 系统对信号的强度放大或缩小的一种度量。因为系统增益可以跟踪信号通过系统时信号范数的增加或减少, 所以输入输出稳定性的形式在研究互联系统稳定性中特别必要。这一点在图 1-1 所示的反馈连接中尤为突出。小增益定理表明, 如果“整个

环的增益”足够“小”(即小于1),那么,如图1-1所示的标准反馈结构,两个稳定的系统 H_1 和 H_2 互联将构成一个稳定的闭环系统。小增益定理隐含着一个固有的鲁棒性质:对于所有受扰的输入输出映射,只要满足小增益条件,闭环系统就保持稳定。因此,小增益定理一度成为非线性系统鲁棒稳定性分析的有力工具。

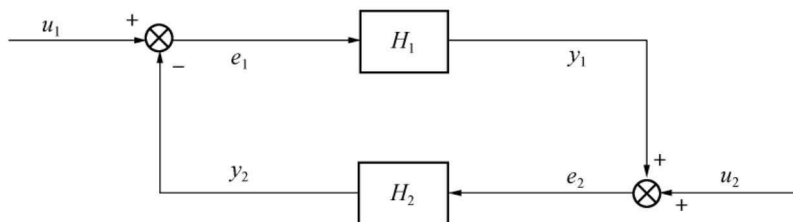


图 1-1 反馈控制系统结构图

而无源性是网络理论中的一个概念,它表示耗能网络的一种性质。小增益定理中采用的是赋范空间,而在无源性分析中用的是内积空间(Hilbert 空间)。无源系统的存储函数在一定条件下可以作为 Lyapunov 函数,因此可以将无源性理论和非线性系统几何理论深入结合,为解决系统控制问题提供了良好的基础,进而可以将无源性理论与几何控制理论应用于马尔可夫跳变系统^[21]、T-S 模糊随机神经网络^[22]等非线性动力系统中^[23],研究系统的无源性、耗散性和全局镇定等问题。

1.2.3 大系统控制理论的研究成果

随着大系统分散控制研究的深入,其它问题的研究也越来越多,文献[24]研究不确定连续广义大系统的有限时间鲁棒分散控制问题,设计了系统的有限时间鲁棒分散状态反馈控制器。李小华^[25]研究了一类基于动态输出反馈的环型互联大系统鲁棒重叠分散控制问题,根据大系统包含原理的约束条件,对系统进行特殊重叠结构分解,在扩展空间中分解为一系列两两子系统对,为每个两两子系统对分别设计动态输出反馈控制器,然后收缩回原空间,实现对该互联大系统的重叠分散控制。针对一类非严格反馈的非线性互联大系统,文献[26]提出了一种基于神经网络的分散自适应状态反馈控制方案。

研究大系统稳定性与鲁棒控制问题可使用迭代 Lyapunov 方法^[13, 27, 28],Jiang 利用这一方法讨论了一系列的非线性大系统的控制问题,对具有线性参数大型非线性系统的自适应输出反馈跟踪进行了研究,给出了此类系统的自适应控制器的设计^[27];作者还用该方法用分散跟踪讨论了具有干扰衰减的非线性系统的稳定性问题,并给出了输出反馈跟踪器^[28]。在文献[29]中 Jiang 用相同的方法对一

Benchmark 非线性系统讨论了其全局输出反馈跟踪。然而到目前为止还很少有用此类方法来讨论具有 Wiener 噪声的相互关联的随机大系统的分散鲁棒控制的文献。

由于大系统的分散控制理论研究的逐渐深入,其应用也越来越多。分散控制系统能实现系统的层次化控制,系统的可靠性较高,还具有自动调节的功能,使得其在火电厂电气自动化中得到广泛应用^[30]。文献[31]针对复杂建筑结构提出了两种重叠分散控制设计方法,文献[32]设计的集中优化、分散控制的双层结构预测控制策略,降低了工业大系统模型预测控制的在线计算复杂度,同时又能保证系统的全局优化性能,而文献[33, 34]则分别用分散控制技术给出了其在网络和机器人方面的应用。

1.3 随机系统基础知识

随机系统有着许多不同于确定性系统的特性,而且有许多问题需要研究。不仅如此,许多研究成果证明,随机噪声可以使一个稳定的确定性系统不稳定,也可以使一个不可稳定的(甚至它的线性近似系统也是不可稳定的)确定性系统稳定或者使一个可稳定的确定性系统更稳定(Khas'minskii^[35], Mao and Marion^[36], Arnold^[37])。因此,关于随机系统的研究,具有深远的理论意义。

随机系统模型的特点是刻画了系统中的随机因素——随机噪声,系统中的随机噪声用随机过程描述。一种典型的随机过程是高斯(Gauss)白噪声,高斯白噪声是一种零均值的平稳随机过程,适合于刻画工程中的随机因素。1969年, Kozin^[38]按照随机变量所服从的分布、随机过程的记忆特征、平稳性等把随机系统分为随机参数为高斯白噪声的随机系统与随机参数为非高斯白噪声的随机系统两大类,而具有高斯白噪声的随机系统又可分为 Itô 型随机系统和非 Itô 型随机系统。非 Itô 型随机系统用样本微积分定义,与确定性系统的刻画一致;而 Itô 型随机系统用 Itô 微积分定义。

1.3.1 Itô 型随机系统

对于随机参数为高斯白噪声的 Itô 型随机系统,其数学模型是 Itô 随机微分方程(本书中的随机系统均特指 Itô 随机系统),在比较一般的条件下,它的解过程是一个连续的 Markov 过程^[39],可利用 Markov 理论等有效的数学工具对其进行分析。然

而, Itô 随机微分方程按照普通的微分规则是没有意义的, 它必须在由 Itô 随机积分 (Itô K^[40]) 确定的随机微分 (Doob^[41]) 的意义下才能得到正确的解释, 而这里的 Itô 随机积分的定义不同于通常的 Riemann 积分的定义, 因为被积函数为非预测函数, 相应的积分和中该函数的值只能取在对应分划下区间的左端点上, 而不是该区间上的任意点。因此, 经典 Riemann 微积分的许多性质不能平推到 Itô 微积分, 这也就导致了有关确定型系统的相应结果不能简单地平推到随机系统^[42]。在研究 Itô 型随机系统的稳定性与镇定时, 用到的是与 Riemann 微积分、样本微积分不同的数学工具。因此, 必须对随机系统进行专门的研究, 建立相应的理论。

早期的文献所研究的 Itô 型随机系统是由常微分方程所描述的系统, 近期的文献提出了由泛函微分方程描述的 Itô 型随机系统^[1,43] 和分布参数 Itô 随机系统^[44]。

由常微分方程描述的 Itô 型随机系统形如

$$dx(t) = f(t, x(t), u(t)) dt + \sigma(t, x(t), u(t)) dw(t), \quad (1-2)$$

其中, $w(t) = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_m(t)]^T (t \geq 0)$ 为 Wiener 随机过程或称为 Brownian 运动; d 为 Itô 随机微分算子或称 Itô 随机增量。

Itô 随机微分不同于 Riemann 微分和样本微分。Itô 型随机系统的特点在于方程右端 $dw(t)$ 的出现, 它使得 $dx(t)$ 成为 $x(t)$ 的 Itô 随机微分。因为 $w(t)$ 是随机过程, 所以式(1-2)的解也是随机过程。在比较弱的条件下, Itô 型随机系统的解过程是具有马尔可夫 (Markov) 性^[35, 49] 的, 这使得 Itô 型随机系统的解具有许多良好的特征, 有关 Itô 型系统基础理论方面的研究也颇具成果。

Itô 型随机系统模型已在工程、经济和社会领域应用得非常广泛。例如, 金融市场上的投资具有较大的风险性, 其风险性表现在金融市场的随机变化, 所以, 一个比较好的投资模型就是 Itô 型随机系统模型^[45]

$$dX_i = (r(t) - c_i) dt + \sum_{i=1}^d (b_i(t) - r(t)) \pi_i(t) dt + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \pi_i(t) \sigma_{ij}(t) dW_i^{(j)}. \quad (1-3)$$

事实上, 在金融领域已广泛采用 Itô 随机系统模型。在工程领域的许多问题中, 有色噪声也常用含有白噪声的 Itô 型随机系统来描述。例如, 在工业上应用广泛的直流调速系统的模型

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u + G_1\varpi \\ \mu\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u + G_2\varpi \\ \dot{\varpi} = H(t)\varpi + w_1(t), w_1(t) = dw(t)/dt \end{cases}, \quad (1-4)$$

其中, $w(t)$ 为 Wiener 过程。在方程(1-4)中, 有色噪声 ϖ 就是用白噪声来描述的, 许多有色噪声的系统可以转化为含有白噪声的系统^[1, 46]。正因为 Itô 型随机系统已

广泛应用于工程、经济和社会的许多问题，所以有必要研究 Itô 型随机系统的理论，为工程实践提供服务^[47]。

1.3.2 Itô 积分与微分

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一概率空间，其中 Ω 为样本空间， $\mathcal{F}$ 为事件域， P 是定义在 $\mathcal{F}$ 上的概率测度。记 S^n 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量构成的集合，此集合中的任一元素取值于 $\mathbf{R}^n$ 。定义 S^n 上的均方范数为：

$$\|x\|_{MS} = \left(E |x|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in S^n, \quad (1-5)$$

其中， E 表示数学期望。 $w(t) = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_m(t)]^T$ 定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上的 m 维 Brownian 运动，其中 $\{\mathcal{F}_t\}$ 为 $w(t)$ 在 t 时刻之前产生的 σ -事件域，即 $\{\mathcal{F}_t\} = \sigma(w(s) : 0 \leq s \leq t)$ 包含所有的 P -零子集。 $\{\mathcal{F}_t\}$ 称为自然流或滤波。设 $\sigma(x(t), t)$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上，取值于 S 或 $S^{n \times m}$ 的随机过程，且 $\int_a^b \left| \sigma(x(t), t) \right|_{MS}^2 dt < \infty (0 \leq a < b)$ ，那么，我们定义 $\sigma(x(t), t)$ 在 $[a, b]$ 上的关于 $w(t)$ 的积分为：

$$\begin{aligned} I(\sigma) &= \int_a^t \sigma(s, x(s)) dw(s) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(t'_k, x(t'_k)) [w(t_{k+1}) - w(t_k)]。 \end{aligned} \quad (1-6)$$

以上积分定义从形式上与通常的 Riemann 积分没有什么区别，然而，实际上，因为 σ 为非可测函数，式 (1-6) 的极限值取决于 t'_k 在 $[t_k, t_{k+1}]$ 上的选取。从而，通过对 t'_k 的不同选取，可有无穷多个方式定义随机积分 (1-6)。然而，实际上只有两种定义具有重要的理论与实际意义，即取左端点 $t'_k = t_k$ 或中点 $t'_k = \frac{t_k + t_{k+1}}{2}$ ，相应的随机积分分别称为 Itô 随机积分与 Stratonovich 随机积分。在本书中我们采用左端点定义的 Itô 随机积分。研究表明，Itô 随机积分与通常的 Riemann 积分有着本质上的区别，在研究 Itô 随机系统时，不能形式地套用 Riemann 积分的性质，这就使得随机系统的研究变得十分困难。

Itô 随机微分的含义要用 Itô 积分来定义，若

$$m(t) = m(a) + (I) \int_a^t \sigma(s, x(s)) dw(s), \quad (1-7)$$

则有

$$dm(t) = \sigma(t, x(t)) dw(t)。 \quad (1-8)$$

设 $f: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\sigma: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m}$ 均为可测函数, $w(t) = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_m(t)]^T$ 为 m 维的 Wiener 过程。若随机过程 $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 满足积分方程

$$x(t) = x(a) + \int_a^t f(s, x(s)) ds + (I) \int_a^t \sigma(s, x(s)) dw(s), \quad (1-9)$$

其中, 右端第一个积分项为均方积分, 第二个积分为 Itô 积分^[35, 49], 则记

$$dx(t) = f(t, x(t)) dt + \sigma(t, x(t)) dw(t), \quad x(a) \in \mathbf{R}^n \quad (1-10)$$

$dx(t)$ 称为解过程 $x(t)$ 的 Itô 随机增量。

文献中通常称形如式(1-9)或式(1-10)的随机方程为 Itô 随机积分方程或 Itô 随机微分方程。

1.3.3 Itô 微分公式

Itô 微分公式是随机分析的基础, 也是分析 Itô 型随机系统的重要工具之一。

设 $x(t)$ 是式(1-10)的一个解过程。 $V \in C^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+, \mathbf{R})$, $\frac{\partial V}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial V}{\partial x}$ 连续, $\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ 存在, 那么 $V(t) = V(x(t), t)$ 满足

$$V(t) = V(a) + \int_a^t \left[\frac{\partial V}{\partial s} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T f(x(s), s) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma^T(x(s), s) V_{xx}(s) \sigma(x(s), s)) \right] ds + (I) \int_a^t \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \sigma(s, x(s)) dw(s). \quad (1-11)$$

由式(1-11)得到如下的 Itô 微分公式:

$$dV(t) = L V(t, x(t)) dt + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \sigma(t, x(t)) dw(t), \quad (1-12)$$

其中,

$$L V(t, x(t)) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T f(t, x(t)) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma^T(t, x(t)) V_{xx} \sigma(t, x(t))). \quad (1-13)$$

L 称为流 $\{x(t), t \geq 0\}$ 产生的微分生成元(differential generator), 或称为式(1-10)生成的伴随偏微分算子, 亦称为式(1-10)生成的无穷小算子(infinitesimal operator), 或称为式(1-9)生成的 Kolmogorov 向后偏微分算子。若

$$E \left(\int_a^b \left| \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \sigma(s, x(s)) \right|^2 ds \right) < \infty, \quad (1-14)$$

则有

$$E \left(\int_a^b \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \sigma(s, x(s)) dw(s) \right) = 0, \quad (1-15)$$