浙大数学优辅
解题研究

顾问：罗增儒　彭翕成

QQ 群“中国数学解题研究会”
QQ 群“九章高中数学交流群”　教研精英联合编写
A 股上市教育集团学大教育

高中数学解题研究

第3辑　数学文化高考专题

齐建民◎主编
梅　磊◎副主编

高考为什么要考数学文化

数学文化高考到底考什么

数学文化高考到底怎么考

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学解题研究

第3辑:数学文化高考专题

主　　编:齐建民

副 主 编:梅　磊

编　　委:梅　磊　陈清华　文贵双
黄丽生　宋建辉　汪　飞
范世祥

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题研究. 第3辑,数学文化高考专题/齐建民主编. —杭州:浙江大学出版社,2017.3
ISBN 978-7-308-16704-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①齐… Ⅲ.①中学数学课—高中—题解—升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 039032 号

高中数学解题研究 第3辑:数学文化高考专题
主编 齐建民

策　　划	陈海权(QQ:1010892859)
责任编辑	夏晓冬
责任校对	董文
封面设计	杭州林智广告有限公司
出版发行	浙江大学出版社
	(杭州市天目山路148号 邮政编码310007)
	(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版	杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷	浙江省邮电印刷股份有限公司
开　　本	889mm×1194mm 1/16
印　　张	3.75
字　　数	119千
版 印 次	2017年3月第1版 2017年3月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-16704-8
定　　价	9.80元

《高中数学解题研究》顾问题词

与解题研究的同行们共勉：

解题能力是数学教师的一个专业制高点，研究解题是专业攀登的一座发展里程碑。

成为解题专家不仅要自己知道“怎样解题”，而且能指导学生也“学会解题”。

谁也无法教会我们解所有的数学题，重要的是，通过有限道题的学习去领悟那种能解无限道题的数学素养。

数学上负数比零更小，解题中没有想法比想错了更糟。

数学上实数和虚数都是真实的数，奋斗中成功与失败都是生命的数。

罗增儒

2016.7于西安

古之达人

推而通之

小中见大

一为千万

祝《小题大做》出版

俞成

2016.7.16

数学启智　文化育人

2016 年 9 月 26 日，教育部考试中心下发《关于 2017 年普通高考考试大纲修订内容的通知》(教试中心函(2016)179 号)，公布了 2017 年各学科高考大纲的主要修订内容. 其中数学考纲的一个重大变化就是明确提出要考查数学文化. 一时间，“数学文化怎样考”成为 2017 届师生热议的话题. 为了帮助师生备考，我们的《高中数学解题研究(第 3 辑:数学文化高考专题)》就这样应运而生了.

本书分为上下两篇，其中上篇是数学文化题赏析，共 7 篇文章，下篇是数学文化题精编，共 100 道习题. 这里我们参照了教育部考试中心陈昂、任子朝先生发表在教育部主管、教育部考试中心主办的考试类专业性学术期刊《中国考试》2015 年第 3 期上的文章《突出理性思维　弘扬数学文化——数学文化在高考试题中的渗透》，100 道习题分为 3 类，分别是:渗透数学史料的数学文化题 60 道、渗透数学精神的数学文化题 20 道、渗透数学应用的数学文化题 20 道.

事实上早在 1952 年颁布的《中学数学教学大纲(草案)》就指出:“在教学的过程中并应当使学生注意:数学在文化史上的巨大价值.”1990 年，美国国家研究委员会在名为《振兴美国数学——90 年代的计划》的报告中指出:“没有相当的数学知识就是没有文化，就是文盲;面临的任务不是扫文化盲而是扫数学盲，数学是保持美国科学实力的关键因素.”然而遗憾的是，时至今日，我国社会上还存在一个比较流行的看法:如果一个人不知道《三国演义》、《水浒传》、《红楼梦》和《西游记》等文学名著，会被认为文化素养不高;但是一个人若不知道《九章算术》、《数书九章》、《算数书》和《算学启蒙》等数学名著，却并不被看作缺少文化. 这是一个值得关注的现象. 可喜的是，数学文化正悄悄滋润着高考试题，定会引领我们自觉地接受数学文化的熏陶. 本书上下两篇提到了《九章算术》《数书九章》《算数书》《算学启蒙》《四元玉鉴》《孙子算经》《张丘建算经》《算法统宗》《九章算法比类大全》《详解九章算法》等数学名著，期盼透过高考指挥棒的作用，让这些数学名著像文学名著一样广为人知.

本书上下两篇贯穿一个主题就是“数学文化与高考”，回答了为什么要考数学文化? 数学文化考什么? 数学文化怎么考? 其中上篇介绍了《九章算术》中的“阳马”“鳖臑”“堑堵”等中国古代数学名词，赏析了从“开立圆术”到“牟合方盖”再到“祖暅原理”这一我国古代劳动人民和数学家探索球体体积公式的艰辛历程，展示了被称为“中国三角”的“杨辉三角”各种推广与变形等. 下篇收录的数学文化高考题涉及《九章算术》中的棱柱、棱锥、棱台体积问题和圆柱、圆锥、圆台体积问题，“更相减损术”“秦九韶算法”“割圆术”等中国古代优秀算法问题，被称为“中

国剩余定理”的“孙子定理”问题等.

与《第1辑:小题大做》、《第2辑:大题细做》不一样的是,本书的写作团队不仅来自学大教育集团和QQ群“中国数学解题研究会”(群号47224687),还有以研究“数学文化高考”著称的QQ群“九章高中数学交流”(群号522598072).感谢学大教育郑州分公司、学大教育深圳分公司高中数学教师团队的大力支持,感谢刘紫阳、韩红军、汪亚洲、侯有岐、杨飞、刘彦永、仓万林、李歆等老师提供了部分数学文化题,在本书写作过程中,共收到百余篇稿件,感谢所有投稿支持我们的朋友们.感谢汪仁林、杨春波、许永忠、宫前长等老师所做的审稿工作.

由于水平有限,时间仓促,难免会出现一些纰漏甚至错误,请读者批评指正.欢迎加入《高中数学解题研究》读者交流QQ群:281322406与我们一起进行“高中数学解题研究”.高考后,我们将会出版《第4辑:新高考试题赏析》及《第5辑:从课本到自主招生》,以便让广大师生及时了解新高考及自主招生动态!

梅 磊

2017年2月于武汉双凤亭

Contents

目录

上篇　数学文化题赏析

下篇　数学文化题精编

上篇　数学文化题赏析

依托立体几何，传播数学文化

[湖北省武汉市黄陂区第六中学　梅　磊]

中国古代数学取得了极其辉煌的成就，出现过刘徽、祖冲之、秦九韶等伟大的数学家，以及众多数学名著，《九章算术》和《数书九章》便是其中的代表作.这些中国古代数学名著是中华优秀传统文化的重要组成部分.中国古代数学遵循“经世济用”，涉及的研究大多与实际生活、生产结合紧密，具有浓厚的实际背景，体现出明显的问题式、综合性和算法化的特征.

立体几何是中国古代数学的一个重要研究内容，从中国古代数学中挖掘素材，考查立体几何的有关知识，既符合考生的认知水平，又可以引导考生关注中华优秀传统文化.这里从近年来高考和模拟试卷中选取一些有关立体几何的数学文化题加以赏析，期望对大家有些许启示.

例 1

我国古代数学名著《九章算术》中“开立圆术”曰：置积尺数，以十六乘之，九而一，所得开立方除之，即立圆径.“开立圆术”相当于给出了已知球的体积 V，求其直径 d 的一个近似公式 $d\approx\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$.人们还用过一些类似的近似公式.根据 $\pi=3.14159\cdots$ 判断下列近似公式中最精确的一个是(　　)

A. $d\approx\sqrt[3]{\frac{16}{9}V}$

B. $d\approx\sqrt[3]{2V}$

C. $d\approx\sqrt[3]{\frac{300}{157}V}$

D. $d\approx\sqrt[3]{\frac{21}{11}V}$

【分析】 根据球的体积公式，结合四个选项中的数据和精确度要求判断即可.

【解析】 由 $V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3$，得 $d=\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}V}$.

设选项中三次根号下的常数为 $\frac{a}{b}$，则 $\pi=\frac{6b}{a}$.

A 选项中常数代入得 $\pi=\frac{6\times9}{16}=3.375$；

B 选项中常数代入得 $\pi=\frac{6\times1}{2}=3$；

C 选项中常数代入得 $\pi=\frac{6\times157}{300}=3.14$；

D 选项中常数代入得 $\pi=\frac{6\times11}{21}\approx3.14286$.

由于 D 选项中值最接近 π 的真实值，故选 D.

【赏析】 球是最完美的几何体，揭示球的直径与体积之间的关系是中国古代数学的重要研究内容.本题以《九章算术》中“开立圆术”为背景，给出了4个历史上曾经使用过的关于球的直径与体积之间关系的近似公式.题目没有直接要求考生将4个公式与球的体积公式相比较，判断公式的精确性，而是采用了“下列近似公式中最精确的一个是”这种相对隐蔽的独特的设问方式，要求考生自己去寻找判别方法，渗透着对考生创新意识的考查.

例 2

《九章算术》商功章有题：一圆柱形谷仓，高1丈3尺 $3\frac{1}{3}$ 寸，容纳米2000斛(1丈=10尺，1尺=10寸，斛为容积单位，1斛≈1.62立方尺，$\pi\approx3$)，则圆柱底面圆周长约为(　　)

A. 1 丈 3 尺

B. 5 丈 4 尺

C. 9 丈 2 尺

D. 48 丈 6 尺

【分析】 根据圆柱的体积公式，结合题中圆柱的体积和高以及有关数据(注意单位)计算出圆柱的底面半径，再根据圆的周长公式，计算出圆柱底面圆周长.

【解析】 设圆柱底面圆半径为 r，高为 h，依题意，圆柱体积为 $V=\pi r^2h$，即 $2000\times1.62\approx3\times r^2\times13.33$，所以 $r^2\approx81$，即 $r\approx9$ 尺，所以圆柱底面圆周长为 $2\pi r\approx54$ 尺，即圆柱底面圆周长约为 5 丈 4 尺，故选 B.

【赏析】 本题属于生产生活中谷物储存问题，源于《九章算术》第五章"商功"，结合立体几何中的基础知识进行设问，强化了数学文化的传承和数学应用意识的培养.

例 3

《算数书》竹简于 20 世纪 80 年代在湖北省江陵县张家山出土，这是我国现存最早的数学典籍，其中记载有求"囷盖"的术：置如其周，令相乘也. 又以高乘之，三十六成一. 该术相当于给出了由圆锥的底面周长 L 与高 h，计算其体积 V 的近似公式 $V\approx\frac{1}{36}L^2h$. 它实际上是将圆锥体积公式中的圆周率 π 近似取为 3. 那么，近似公式 $V\approx\frac{2}{75}L^2h$ 相当于将圆锥体积公式中的 π 近似取为(　　)

A. $\frac{22}{7}$　　B. $\frac{25}{8}$

C. $\frac{157}{50}$　　D. $\frac{355}{113}$

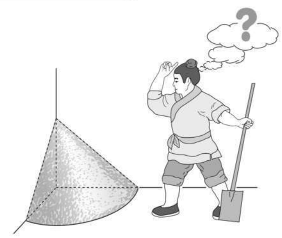
【分析】 根据题设所给的圆锥体积近似公式 $V\approx\frac{2}{75}L^2h$，结合圆锥体积公式 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$ 计算即可.

【解析】 依题意，$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$，

即 $\frac{1}{3}\pi r^2h\approx\frac{2}{75}\cdot(2\pi r)^2h$，从而 $\pi\approx\frac{25}{8}$. 故选 B.

【赏析】 本题源于《算数书》，通过加工改造和加注解释的方式创设了类比推理的情境. 试题充分体现了地域特色和数学文化. 其实，考生不看试题前面那一大段话，直接根据试题最后一句所给的圆锥体积近似公式 $V\approx\frac{2}{75}L^2h$，结合圆锥体积公式 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$ 计算即可得到正确答案. 考生千万不要因为试题较长产生畏难情绪，从而放弃作答.

例 4



《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题："今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺. 问：积及为米几何？"其意思为："在屋内墙角处堆放米(如图，米堆为一个圆锥的四分之一)，米堆底部的弧长为 8 尺，米堆的高为 5 尺，问米堆的体积和堆放的米各为多少？"已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺，圆周率约为 3，估算出堆放的米有(　　)

A. 14 斛　　B. 22 斛

C. 36 斛　　D. 66 斛

【分析】 根据米堆为一个圆锥的四分之一，结合圆的周长公式、圆锥的体积公式和题中有关数据计算即可.

【解析】 因为米堆为一个圆锥的四分之一，由米堆底部的弧长为 8 尺，可知圆锥底面圆的周长为 32 尺，结合圆的周长公式，可得圆锥底面半径为 $\frac{16}{\pi}$ 尺. 又米堆的高为 5 尺，再结合圆锥的体积公式，可得米堆的体积为 $\frac{320}{3\pi}$ 立方尺. 再根据题设条件 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺，圆周率约为 3，可估算出米堆有 22 斛，故选 B.

【赏析】 试题插图的创新是本题的一个亮点，其一增强了数学问题的生活化，使数学的应用更贴近学生的生活实际；其二有利于考生分析问题和解决问题，这对稳定学生在考试中的情绪和心态起到了较好的效果；其三探索了高考数学试题插图的新形式，给出了如何将抽象的数学问题现象化的范例.

例 5

我国古代数学名著《数书九章》中有"天池盆测

雨”题：在下雨时，用一个圆台形的天池盆接雨水.天池盆盆口直径为二尺八寸，盆底直径为一尺二寸，盆深一尺八寸.若盆中积水深九寸，则平地降雨量是________寸.

（注：①平地降雨量等于盆中积水体积除以盆口面积；②一尺等于十寸；③圆台体积公式：

$$V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)）$$

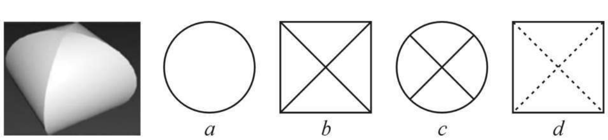
【分析】 根据题设判断天池盆中积水形状为圆台形状，结合题中有关数据判断此圆台的上、下底面半径和高，再结合题后注释、圆台体积公式和圆的面积公式计算即可.

【解析】 依题意，天池盆中水的形状是一个上底半径10寸，下底半径6寸，高9寸的圆台，从而平均降雨量为$\dfrac{\frac{1}{3}(100\pi+60\pi+36\pi)\times 9}{196\pi}=3$.

【赏析】 本题源于《数书九章》，通过加工改造和加注解释的方式降低了理解题意的难度.试题体现了空间想象能力中“无图想图”、“无图作图”的高层次要求，有效地考查了考生提炼图形与应用图形的能力，同时传播了数学文化.著名数学史专家钱宝琮先生对于《数书九章》中提到的“天池盆”作了高度的评价，指出：“天池盆是世界文化史上最早出现的雨量器.”

例 6

“牟合方盖”是我国古代数学家刘徽在研究球的体积的过程中构造的一个和谐优美的几何体.它由完全相同的四个曲面构成，相对的两个曲面在同一个圆柱的侧面上，好似两个扣合（牟合）在一起的方形伞（方盖）.其直观图如下左图，当其正视图和侧视图完全相同时，它的正视图和俯视图分别可能是（　　）



A. a,b　　B. a,c　　C. c,b　　D. b,d

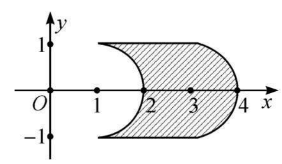
【分析】 观察题目所给直观图，理解题干中有关“牟合方盖”的特征叙述，结合“当其正视图和侧视图完全相同时”这个关键条件作答.

【解析】 当正视图和侧视图完全相同时，“牟合方盖”相对的两个曲面正对前方，正视图为一个圆，俯视图为一个正方形，且具有两条实线的对角线，故选A.

【赏析】 “牟合方盖”是我国古代利用立体几何模型和数学思想方法解决数学问题的代表之一.本题取材于“牟合方盖”，通过添加解释和提供直观图的方式降低了理解题意的难度.试题从识“图”到想“图”再到构“图”，考生要经历分析、判断的逻辑过程.另外，我国古代数学中的其他著名几何体，如“阳马”、“鳖臑”和“堑堵”等的三视图问题都有可能在高考中考查，值得我们注意.

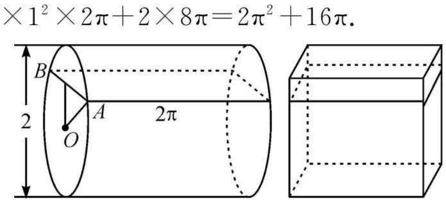
例 7

在xOy平面上，将两个半圆弧$(x-1)^2+y^2=1$ $(x\geqslant 1)$和$(x-3)^2+y^2=1$ $(x\geqslant 3)$，两条直线$y=1$和$y=-1$围成的封闭图形记为D.如图中阴影部分，记D绕y轴旋转一周而成的几何体为Ω.过$(0,y)$ $(|y|\leqslant 1)$作Ω的水平截面，所得截面积为$4\pi\sqrt{1-y^2}+8\pi$.试利用一个平放的圆柱和一个长方体，根据祖暅原理得出Ω的体积为________.



【分析】 根据题设所给图形和“所得截面积为$4\pi\sqrt{1-y^2}+8\pi$”这个关键数据，想象出题目提示的“一个平放的圆柱和一个长方体”的有关数据，再根据祖暅原理，计算即可.

【解析】 因为几何体为Ω的水平截面的截面积为$4\pi\sqrt{1-y^2}+8\pi$，该截面的截面积由两部分组成，一部分为定值8π，可看作是截一个底面积为8π，高为2的长方体得到的；另一部分为$4\pi\sqrt{1-y^2}$，可看作是过一个半径为1，高为2π的平放圆柱的弦$AB=2\sqrt{1-y^2}$的截面积，如图所示.将这两个几何体与Ω放在一起，根据祖暅原理，每个平行于水平面的截面积都相等，故它们的体积相等，即Ω的体积为$\pi\times 1^2\times 2\pi+2\times 8\pi=2\pi^2+16\pi$.

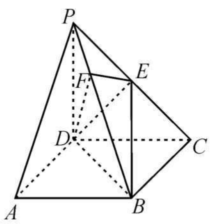


【赏析】 祖暅原理是我国古代数学家祖暅提出的一个有关几何求积的著名定理，祖暅提出这个原理，要比其他国家的数学家早一千多年. 人教A版必修2教材专门介绍了祖暅原理. 本题取材于祖暅原理，考查体积计算，既检测了考生的基础知识和基本技能，又展示了中华民族的优秀传统文化.

例 8

《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马，将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑.

如图，在阳马 P-$ABCD$ 中，侧棱 $PD\perp$底面 $ABCD$，且 $PD=CD$，过棱 PC 的中点 E，作 $EF\perp PB$ 交 PB 于点 F，连接 DE,DF,BD,BE.



(1)求证：$PB\perp$平面 DEF；试判断四面体 $DBEF$ 是否为鳖臑，若是，写出其每个面的直角（只需写出结论）；若不是，说明理由；

(2)若平面 DEF 与平面 $ABCD$ 所成二面角的大小为$\frac{\pi}{3}$，求$\frac{DC}{BC}$的值.

【分析】 第(1)问要证明 $PB\perp$平面 DEF，并判断四面体 $DBEF$ 是否为鳖臑，突出考查了空间线面关系的关键问题——线面垂直，利用空间线面关系的有关定理容易得到结论；第(2)问求$\frac{DC}{BC}$的值，由已知，平面 DEF 与平面 $ABCD$ 所成二面角的大小为$\frac{\pi}{3}$，注意到 $PB\perp$平面 DEF，$PD\perp$平面 $ABCD$，从而这两个平面的法向量是显然的，问题便迎刃而解.

【解析】 ☞解法1　综合法

(1)因为 $PD\perp$底面 $ABCD$，所以 $PD\perp BC$，

由底面 $ABCD$ 为长方形，有 $BC\perp CD$，

而 $PD\cap CD=D$，所以 $BC\perp$平面 PCD.

而 $DE\subset$平面 PCD，所以 $BC\perp DE$.

又因为 $PD=CD$，E 是 PC 的中点，

所以 $DE\perp PC$.

而 $PC\cap BC=C$，所以 $DE\perp$平面 PBC.

而 $PB\subset$平面 PBC，所以 $PB\perp DE$.

又 $PB\perp EF$，$DE\cap EF=E$，所以 $PB\perp$平面 DEF.

由 $DE\perp$平面 PBC，$PB\perp$平面 DEF 可知，四面体 $BDEF$ 的四个面都是直角三角形，

即四面体 $BDEF$ 是一个鳖臑，其四个面的直角分别为$\angle DEB,\angle DEF,\angle EFB,\angle DFB$.

(2)如图1，在平面 PBC 内，延长 BC 与 FE 交于点 G，则 DG 是平面 DEF 与平面 $ABCD$ 的交线.

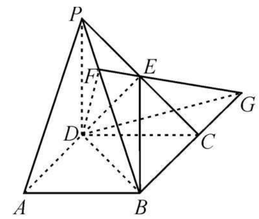


图 1

由(1)知，$PB\perp$平面 DEF，所以 $PB\perp DG$.

又因为 $PD\perp$底面 $ABCD$，所以 $PD\perp DG$.

而 $PD\cap PB=P$，所以 $DG\perp$平面 PBD.

故$\angle BDF$ 是平面 DEF 与平面 $ABCD$ 所成二面角的平面角.

设 $PD=DC=1,BC=\lambda$，则 $BD=\sqrt{1+\lambda^2}$.

在 Rt$\triangle PDB$ 中，由 $DF\perp PB$，得$\angle DPF=\angle FDB=\frac{\pi}{3}$，

则 $\tan\frac{\pi}{3}=\tan\angle DPF=\frac{BD}{PD}=\sqrt{1+\lambda^2}=\sqrt{3}$，解得 $\lambda=\sqrt{2}$.

所以$\frac{DC}{BC}=\frac{1}{\lambda}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故当平面 DEF 与平面 $ABCD$ 所成二面角的大小为$\frac{\pi}{3}$时，$\frac{DC}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

☞**解法2　向量法**

(1)如图2，以 D 为原点，射线 DA,DC,DP 分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正半轴，建立空间直角坐标系. 设 $PD=DC=1,BC=\lambda$，则 $D(0,0,0),P(0,0,1),B(\lambda,1,0),C(0,1,0),\overrightarrow{PB}=(\lambda,1,-1)$.

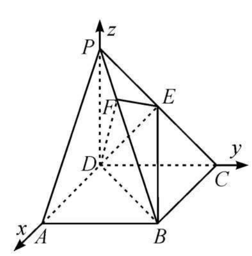


图 2

因为 E 是 PC 的中点，

所以 $E\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{DE}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

于是$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DE}=0$，即 $PB\perp DE$.

又已知 $EF\perp PB$，而 $DE\cap EF=E$，

所以 $PB\perp$平面 DEF.

因为$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1),\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{PC}=0$，

则 $DE\perp PC$，所以 $DE\perp$ 平面 PBC.

由 $DE\perp$ 平面 PBC，$PB\perp$ 平面 DEF，可知四面体 $BDEF$ 的四个面都是直角三角形，

即四面体 $BDEF$ 是一个鳖臑，其四个面的直角分别为 $\angle DEB$，$\angle DEF$，$\angle EFB$，$\angle DFB$.

(2)由 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\overrightarrow{DP}=(0,0,1)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量.

由(1)知，$PB\perp$ 平面 DEF，所以 $\overrightarrow{BP}=(-\lambda,-1,1)$ 是平面 DEF 的一个法向量.

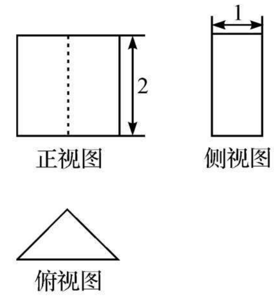
若平面 DEF 与平面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$，则 $\cos\frac{\pi}{3}=\left|\frac{\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{BP}|\cdot|\overrightarrow{DP}|}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+2}}\right|=\frac{1}{2}$，解得 $\lambda=\sqrt{2}$. 所以 $\frac{DC}{BC}=\frac{1}{\lambda}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故当平面 DEF 与平面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$ 时，$\frac{DC}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【赏析】 本题是 2015 年湖北省高考题，以课本例题为原型改编而成. 主要考查空间直线与平面的垂直以及二面角等基础知识，同时考查空间想象能力和推理论证能力，以及数形结合的思想和转化与化归的思想. 考生可根据所给几何体的条件灵活选取“综合法”和“向量法”求解. 由于已知条件中四棱锥的底面是长方形，一条侧棱垂直于底面，所以非常适合建立空间直角坐标系，加之平面 DEF 的法向量与平面 $ABCD$ 的法向量都非常明显，所以向量法比综合法明显简单一些. 此外，试题以《九章算术》中研究立体几何所用的两个特殊锥体(阳马、鳖臑)为背景，可谓推陈出新，给考生留下深刻的印象，“阳马”和“鳖臑”这两个数学名词，迅速在网上传播起来，成为热门话题.

例 9

《九章算术》中，将底面是直角三角形的直三棱柱称之为“堑堵”. 已知某“堑堵”的三视图如图所示，正视图中的虚线平分矩形的面积，则该“堑堵”的侧面积为(　　)



A. 2

B. $4+2\sqrt{2}$

C. $4+4\sqrt{2}$

D. $6+4\sqrt{2}$

【分析】 仔细阅读和理解“堑堵”这个条件，充分利用这个信息推断出该几何体是底面为等腰直角三角形的直三棱柱，最后运用矩形面积公式求出侧面积.

【解析】 依题意得，该几何体的底面为等腰直角三角形，两直角边长均为 $\sqrt{2}$，高为 2 的直三棱柱，所以其侧面积为 $S=2\times2+2\sqrt{2}\times2=4+4\sqrt{2}$，故选 C.

【赏析】 该题命制以我国古代数学名著《九章算术》中所描述的特殊几何体“堑堵”为背景，是一个新概念信息的信息迁移题. 试题以三视图为依托，在考查在空间想象能力的同时传播数学文化.

以数学史为背景的数列试题赏析

[湖北省罗田县第一中学　陈清华]

数学是人类璀璨文化的重要组成部分，数学的历史可追溯到远古时代，绵延于世界的东方和西方.数学教育是数学文化的教育，而数学史是数学文化的一种载体.数学史融入数学课程有助于学生理解数学、感受数学文化.正如英国数学家格莱舍所言："如果试图将一门学科与它的历史割裂开来的话，我们确信没有哪一门学科会比数学损失得更多."在近几年的高考题和各地的高考模拟试题中有很多以数学史为背景的数列试题，下面我们对部分试题进行赏析，以期起到抛砖引玉的作用.

1.源于数学名著，兼顾考查基本知识

例 1

中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题："三百七十八里关，初行健步不为难，次日脚痛减一半，六朝才得到其关，要见次日行里数，请公仔细算相还."其意思为："有一个人走 378 里路，第一天健步行走，从第二天起脚痛每天走的路程为前一天的一半，走了 6 天后到达目的地，那么第二天走了（　　）

A. 192 里　　B. 96 里

C. 48 里　　D. 24 里

【解析】 由题意得，每天所走路程形成以 a_1 为首项，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，且前六项和为 378，

则 $\dfrac{a_1\left(1-\frac{1}{2^6}\right)}{1-\frac{1}{2}}=378$，解得 $a_1=192$，

则 $a_2=96$，即第二天走了 96 里.故选 B.

【赏析】 《算法统宗》是中国古代数学名著，程大位著.这是一部应用数学书，以珠算为主要的计算工具.从中国古代数学的整个发展过程来看，《算法统宗》是一部十分重要的著作.

例 2

《莱因德纸草书》是世界上最古老的数学著作之一，书中有这样一道题：把 120 个面包分成 5 份，使每份的面包数成等差数列，且较多的三份之和恰好是较少的两份之和的 7 倍，则最少的那份面包个数为（　　）

A. 4　　B. 3

C. 2　　D. 1

【解析】 设每个人由少到多的顺序得到面包数分别为 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5.

因为每个人所得的面包数成等差数列，设公差为 d，

则有 $120=5a_1+10d$　①.

又较多的三份之和是较少的两份之和的 7 倍，

得到：$a_1+a_1+d=\frac{1}{8}\times120$　②，

联立①②解得 $a_1=2$，故选 C.

【赏析】 《莱因德纸草书》是公元前 1650 年左右的埃及数学著作，属于世界上最古老的数学著作之一.作者是阿默斯，公元 1858 年由英国的埃及学者莱因德购得，故名《莱因德纸草书》.

例 3

《九章算术》"竹九节"问题：现有一根 9 节的竹子，自上而下各节的容积成等差数列，上面 4 节的容积共 3 升，下面 3 节的容积共 4 升，则第 5 节的容积为________升.

【解析】 设该数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，依题意得

$$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4=3,\\ a_7+a_8+a_9=4,\end{cases}$$ 即 $$\begin{cases}4a_1+6d=3,\\ 3a_1+21d=4,\end{cases}$$

解得 $$\begin{cases}a_1=\dfrac{13}{22},\\ d=\dfrac{7}{66}.\end{cases}$$

则 $a_5=a_1+4d=\frac{13}{22}+\frac{28}{66}=\frac{67}{66}$.

所以应该填$\frac{67}{66}$.

【赏析】 本题将数学史与等差数列知识进行融合，注重考查学生的理解问题及知识的迁移应用能力，属简单题.《九章算术》是中国古代第一部数学专著，是《算经十书》中最重要的一部，成于公元一世纪左右.《九章算术》是一部经几代学者整理、删补和修订而成的数学经典著作，系统总结了战国、秦、汉时期的数学成就.全书采用问题集的形式编写，共整理246个问题及解法，分成方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程和勾股共九章.同时，《九章算术》在数学上还有其独到的成就，不仅最早提到分数问题，也首先记录了盈不足等问题，“方程”章还在世界数学史上首次阐述了负数及其加减运算法则.它是一本综合性的数学著作，是当时世界上最简练有效的应用数学，它的出现标志着中国古代数学形成了完整的体系.

例 4

我国古代数学典籍《九章算术》第七章“盈不足”章中有一道“两鼠穿墙”问题：有厚墙5尺，两只老鼠从墙的两边相对分别打洞穿墙，大老鼠第一天进一尺，以后每天加倍；小老鼠第一天也进一尺，以后每天减半.问几天后两鼠相遇？（　　）

A. 2天　　B. 3天

C. 4天　　D. 5天

【解析】 ☞**解法1**

设第 n 天两鼠相遇，则依题意得

大老鼠打洞：$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}$（尺）；

小老鼠打洞：$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$（尺）.

可得方程：$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}+1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=5$.

利用等比数列求和公式得：$\frac{1-2^n}{1-2}+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=5$，化简得 $2^{2n}-4\times2^n-2=0$，

解得 $2^n=2+\sqrt{6}$.

因为 $4<2+\sqrt{6}<8$，所以 $2<n<3$，所以两鼠相遇在第3天.

☞**解法2**

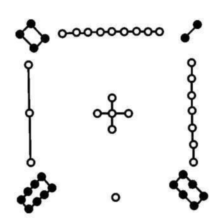
第一天大老鼠前进1尺，小老鼠前进1尺，一共2尺，还剩3尺；第二天大老鼠前进2尺，小老鼠前进$\frac{1}{2}$尺，这一天一共前进了2.5尺，两天一共前进了4.5尺，还剩0.5尺.第三天按道理来说大老鼠前进4尺，小老鼠前进$\frac{1}{4}$尺，可是现在只剩0.5尺没有打通了，所以在第三天肯定可以打通.

【赏析】 本题直接以《九章算术》中的“两鼠穿墙”问题为试题，难度不大，创设问题的情境具有浓厚的文化底蕴，考查学生的阅读理解能力以及化归与转化思想.一些经典的数学问题，像陈年老酒，历久弥香.

2. 源于数学史料，兼顾考查推论能力

例 5

我国的《洛书》中记载着世界上最古老的一个幻方：将1，2，…，9填入3×3的方格内，使三行、三列、两条对角线的三个数之和都等于15.如图所示.



4	9	2
3	5	7
8	1	6

一般地，将连续的正整数1，2，3，…，n^2 填入 $n\times n$ 个方格中，使得每行、每列、每条对角线上的数的和相等，这个正方形叫做 n 阶幻方.记 n 阶幻方的对角线上数的和为 N_n，如图三阶幻方记为 $N_3=15$，那么 N_{12} 的值为（　　）

A. 869　　B. 870

C. 871　　D. 875

【解析】 由幻方的定义可知，每行、每列、每条对角线上的数的和相等.

$N_3=15=\dfrac{1+2+3+\cdots+9}{3}=\dfrac{45}{3}$，所以 $N_{12}=\dfrac{1+2+\cdots+144}{12}=\dfrac{\dfrac{(1+144)\times 144}{2}}{12}=870$，故选 B.

【赏析】 本题以古老的幻方为载体，考查学生的理解能力和类比推理能力，属于中等难度试题．幻方是一种将数字安排在正方形格子中，使每行、每列和每条对角线上的数字和都相等的方法．中国古代称为“河图”、“洛书”，又叫“纵横图”．幻方也是一种汉族传统游戏，旧时在官府、学堂多见．

例 6

分形几何是法国数学家伯努瓦·曼德尔布罗在20世纪70年代创立的一门新学科，它的创立为解决传统科学众多领域的难题提供了全新的思路．按照下图1的分形规律可得到如图2所示的一个树形图，则当 $n\geqslant 3$ 时，第 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 行空心圆点个数 a_n 与第 $n-1$ 行及第 $n-2$ 行空心圆点个数 a_{n-1}，a_{n-2} 的关系式为________；第12行的实心圆点的个数是________.

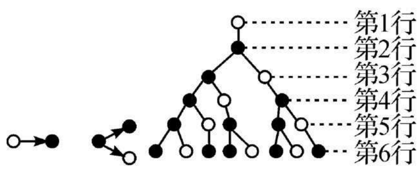


图1　　图2

【解析】 设第 n 行的实心圆点个数为 b_n，则第 n 行的实心圆点个数等于第 $n-1$ 行的所有圆点个数，即 $b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$.

第 n 行的空心圆点个数等于第 $n-1$ 行的实心圆点个数，即 $a_n=b_{n-1}$，

所以 $a_n=b_{n-1}=a_{n-2}+b_{n-2}=a_{n-2}+a_{n-1}(n\geqslant 3)$.

由此递推式计算从第1行开始空心圆点个数依次为1，0，1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，….

所以 $b_{12}=a_{11}+a_{12}=34+55=89$.

【赏析】 本题从特殊情形切入，通过观察得出一般性的结论，考查的是归纳推理的知识，在解数列问题、与自然数有关的问题时经常采用归纳推理的方法．伯努瓦·曼德尔布罗在1973年首次提出了分维和分形的设想．分形是一个数学术语，也是一套以分形特征为研究主题的数学理论．分形理论既是非线性科学的前沿和重要分支，又是一门新兴的横断学科，是研究一类现象特征的新的数学分支．分形几何不仅展示了数学之美，也揭示了世界的本质，还改变了人们理解自然奥秘的方式．可以说分形几何是真正描述大自然的几何学，对它的研究也极大地拓展了人类的认知领域．而本题中还蕴含着另一个数学问题——斐波那契数列．斐波那契在《算盘书》中提出了一个有趣的兔子问题（如图3）：

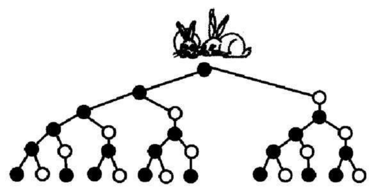
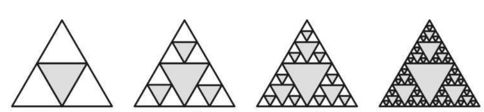


图3

“一般而言，兔子在出生两个月后，就有繁殖能力，一对兔子每个月能生出一对小兔子来．如果所有兔都不死，那么一年以后可以繁殖多少对兔子？”

例 7

下图中的三角形称为谢尔宾斯基三角形．将以第1个三角形的三边中点为顶点的三角形着色，将以第 $k(k\in\mathbf{N}^*)$ 个图形中的每个未着色三角形的三边中点为顶点的三角形着色，得到第 $k+1$ 个图形，这样这些图形中着色三角形的个数依次构成一个数列 $\{a_n\}$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为________.



谢尔宾斯基三角形

【解析】 根据图形可知：$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=3^n$.

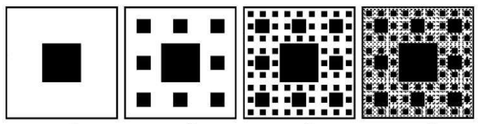
当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}=\dfrac{3^n-1}{2}$.

【赏析】 本题以数学史中的“谢尔宾斯基三角形”为背景，主要考查学生阅读理解能力以及推理能力，其中谢尔宾斯基三角形是一种分形，由波兰数学家谢尔宾斯基在1915年提出．谢尔宾斯基三角形为分形的一个著名实例，而分形最初是用来描述自然界中传统欧几里德几何学所不能描述的一大类复杂不规则的几何对象．例如，弯弯曲曲的海岸线、起伏不平的山脉、粗糙不堪的断面、变幻无常的浮云、九曲回肠的河流、纵横交错的血管、令人眼花缭乱的满天繁星等．

例 8

如图所示的图形为谢尔宾斯基地毯，这些图形

中着色正方形的个数依次构成一个数列$\{a_n\}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________.



谢尔宾斯基地毯

【解析】 ☞解法 1

根据图形可知：$a_1=1$，$a_n=8a_{n-1}+1(n\geqslant 2,n\in \mathbf{N}^*)$.

设$a_n+\lambda=8(a_{n-1}+\lambda)$，则对比上式可得

$\lambda=\frac{1}{7}$，即数列$\left\{a_n+\frac{1}{7}\right\}$是以$\frac{8}{7}$为首项，8 为公比的等比数列，所以$a_n+\frac{1}{7}=\frac{8^n}{7}$，

即$a_n=\frac{8^n-1}{7}$.

☞解法 2

根据图形可知：$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=8^n$.

当$n\geqslant 2$时，$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+8+8^2+\cdots+8^{n-1}=\frac{8^n-1}{7}$.

【赏析】 本题以数学史中的“谢尔宾斯基地毯”为载体，主要考查学生阅读理解能力以及推理能力.

例 9

如图 1 所示是毕达哥拉斯树的生长过程：正方形上连接着等腰直角三角形，等腰直角三角形上再连接正方形……如此继续. 若共得到 1023 个正方形，设初始正方形的边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，则最小正方形的边长为________.

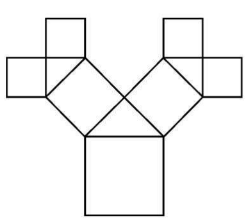


图 1

【解析】 由$1+2+4+\cdots+2^{n-1}=1023$，即$\frac{1-2^n}{1-2}=1023$，解得$n=10$.

又因为正方形的边长构成数列$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$，…，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}$，

所以最小的正方形的边长为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}$.

【赏析】 毕达哥拉斯树是由毕达哥拉斯根据勾股定理所画出来的一个可以无限重复的图形. 又因为重复数次后的形状好似一棵树，所以被称为毕达哥拉斯树，也叫“勾股树”(如图 2).

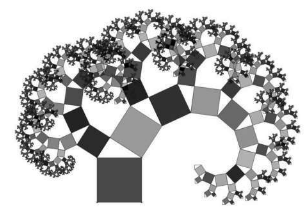


图 2

毕达哥拉斯学派是西方美学史上最早探讨美的本质的学派. 他们认为，对几何形式和数字关系的沉思能达到精神上的解脱，而音乐却是净化灵魂从而达到解脱的手段. 不可否认的是，毕达哥拉斯是人类思想史上最重要的人物之一.

例 10

古希腊毕达哥拉斯学派的数学家研究过各种多边形数，如三角形数 1，3，6，10，…，第 n 个三角形数为$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$，记第 n 个 k 边形数为$N(n,k)(k\geqslant 3)$. 以下列出了部分 k 边形中的第 n 个数的表达式：

三角形数　$N(n,3)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$；

正方形数　$N(n,4)=n^2$；

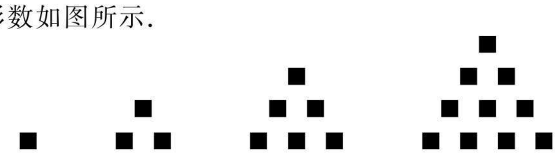
五边形数　$N(n,5)=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$；

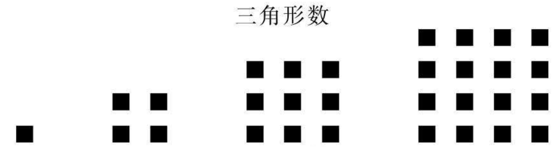
六边形数　$N(n,6)=2n^2-n$；

…

可以推测$N(n,k)$的表达式，由此计算$N(10,24)=$________.

【课本溯源】 人教 A 版必修 5 中提到：“相传古希腊毕达哥拉斯学派的数学家经常在沙滩上画点或用小石子表示数.”他们研究过的三角形数和正方形数如图所示.


三角形数


正方形数

【解析】 ☞解法 1

观察已知条件中的 4 个表达式，不难发现规律，n^2 的系数依次构成等差数列 $\{a_n\}$，且 $a_3=\frac{1}{2}$，$d=\frac{1}{2}$，所以 $a_{24}=\frac{1}{2}+(24-3)\times\frac{1}{2}=11$；$n$ 的系数依次构成等差数列 $\{b_n\}$，且 $b_3=\frac{1}{2}$，$d=-\frac{1}{2}$，所以 $b_{24}=\frac{1}{2}+(24-3)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-10$.

故 $N(n,24)=11n^2-10n$，所以 $N(10,24)=1000$.

☞解法 2

由已知条件中的 4 个表达式，可以得出规律：$N(n,k)$ 的表达式是 $N(n,k)=an^2+bn$ 的形式，①当 $k=3,4,5,6$ 时对应 a 的值分别为 $\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{3}{2},\frac{4}{2}$，观察分子不难发现规律，第 k 个数的分子为 $k-2$，所以 $a=\frac{k-2}{2}$；②当 $k=3,4,5,6$ 时对应 b 的值分别为 $b=\frac{1}{2},\frac{0}{2},-\frac{1}{2},-\frac{2}{2}$，观察分子不难发现规律，第 k 个数的分子为 $4-k$，所以 $b=\frac{4-k}{2}$，所以 $N(n,k)=\frac{k-2}{2}n^2+\frac{4-k}{2}n$，从而 $N(10,24)=1000$.

☞解法 3

观察上述表达式，不难发现：

$N(n,4)-N(n,3)=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$；

$N(n,5)-N(n,4)=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$；

$N(n,6)-N(n,5)=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$；…

由此可推测 $N(n,k)-N(n,k-1)=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$，以上 $k-3$ 个式子两边分别相加可得：

$$N(n,k)-N(n,3)=\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\right)(k-3),$$

所以

$$N(n,k)=N(n,3)+\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\right)(k-3)$$
$$=\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right)+\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\right)(k-3)$$
$$=\frac{n[(k-2)(n-1)+2]}{2}.$$

因此 $N(10,24)=\frac{10\times[(24-2)(10-1)+2]}{2}=1000$.

☞解法 4

由 k 边形数的构成方式不难得出 k 边形数中第 n 个数的表达式：

$N(n,3)=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$，

$N(n,4)=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$，

$N(n,5)=1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$；

$N(n,6)=1+5+9+\cdots+(4n-3)=2n^2-n$；

$N(n,k)=1+(k-1)+(2k-3)+\cdots+[(k-2)n-(k-3)]=\frac{k-2}{2}n^2+\frac{4-k}{2}n$，

从而 $N(10,24)=1000$.

注：本题解法由陕西省咸阳市乾县杨汉中学汪仁林提供.

【赏析】 这是一道以毕达哥拉斯多边形为背景，富有数学文化底蕴的试题，将古代数学文明与现代数学的合情推理交汇融合，考查学生观察、类比、猜想和推理能力，具有较好的区分度.