普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

主　编◎黎　虹　刘晶晶

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

线 性 代 数

主　编　黎　虹　刘晶晶
副主编　杜　莹　付　伟　杨　巍

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书按照工科及经济管理类“本科数学基础课程教学基本要求”，结合当前大多数本专科院校的学生基础和教学特点编写而成，全书以通俗易懂的语言，全面而系统地讲解线性代数的基本知识，包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型共六章内容，每章分若干节，每章配有习题，书末附有习题的参考答案．

本书理论系统，举例丰富，讲解透彻，难度适宜，并结合了背景介绍、实际应用案例和微课视频等二维码教学资源．适合作为普通高等院校工科类、理科类（非数学专业）、经济管理类有关专业的线性代数课程的教材使用，也可供成教学院或申请升本的专科院校选用为教材，还可供相关专业人员和广大教师参考．

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/黎虹，刘晶晶主编．—北京：北京理工大学出版社，2018.7

ISBN 978－7－5682－5985－9

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①黎…②刘…　Ⅲ．①线性代数－高等学校－教材　Ⅳ．①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 171565 号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址／http：//www. bitpress. com. cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／8.5　　责任编辑／封　雪
字　　数／200 千字　　文案编辑／封　雪
版　　次／2018 年 7 月第 1 版　2018 年 7 月第 1 次印刷　　责任校对／周瑞红
定　　价／29.80 元　　责任印制／李　洋

前言 PREFACE

随着我国社会和经济建设的高速发展，全国高等教育规模日益扩大，工科院校各专业对公共数学课的课程建设、教学内容的更新和教材建设提出了新的要求．在当前的教育形势下，为了实现数学课程教学与学生的专业培养目标相适应、与培养经济社会发展需要的高素质人才的培养目标相适应，我们结合教学改革的实际要求和教学中累积的经验，编写了这本《线性代数》教材．

线性代数是经济管理类与工科类专业的重要基础课程之一，本书是根据经济管理类和理工类的线性代数课程教学基本要求编写而成的．在本书的编写过程中，编者不但注意继承保留了自己的教学实际经验，而且在以下方面给予了关注：

1. 注重以实例引入概念，并最终回到数学应用的思想，以激发学生的兴趣和求知欲．在弄清基本概念的基础上，理顺基本概念之间的联系，增强教学效果；而对于严密的论证过程，则不做过多的要求．

2. 教材紧密结合现代多元化教学手段，编写了相关二维码教学资源素材．主要包括学科相关起源背景介绍、重要概念和运算在实际问题中的应用案例、重要知识点的微课视频、B组习题答案等，使学生可以在课后进一步学习线性代数相关内容．

3. 侧重解题能力的培养．在解题方法方面有较深入的论述，让学生在掌握基本概念的基础上，熟悉运算过程、掌握解题方法，从而提高解题能力．

4. 精心编写了全书的例题、习题，使习题由易到难，与知识点相对应；并针对学生的差异给出了基础类A组习题和提高类B组习题．在本书的最后，给出了习题的参考答案．

教材编写的具体分工为：第一章行列式由杜莹编写，第二章矩阵由杨巍编写，第三章矩阵的初等变换与线性方程组由刘晶晶编写，第四章向量组的线性相关性由黎虹编写，第五章矩阵的特征值、特征向量和相似矩阵与第六章二次型由付伟编写．

由于水平有限，书中难免存在疏漏、不足之处，敬请广大师生不吝赐教，将不胜感激．

编　者

2018年3月

目 录 CONTENTS

第一章　行列式

在许多实际问题中，人们常常会碰到解线性方程组的问题．行列式是伴随着线性方程组的研究而引入和发展的．现如今，它已是线性代数的重要工具之一，在许多学科分支中具有广泛的应用．

本章将由二元线性方程组出发，引入二阶行列式的概念，并推广至三阶行列式，在总结其规律的基础上，给出 n 阶行列式的定义，并研究了行列式的性质及其计算方法，给出行列式按行按列展开定理．此外，我们还将介绍求解 n 元线性方程组的克拉默（Cramer）法则．

行列式的起源及其发展

第一节　二阶与三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

为消去未知数 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘上列两方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，求得方程组（1.1）的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

为便于叙述和记忆这个表达式，引进记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.2}$$

称为**二阶行列式**，简记为 $D=\det(a_{ij})$（det 为行列式英文 Determinant 的缩写）．

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式（1.2）的元素，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列．

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆，从左上角到右下角的对角线（称为行列式的主对角线）上的两元素之积，取正号；另一个是从右上角到左下角的对角线（称

为行列式的副对角线）上的两元素之积，取负号；于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差．

利用二阶行列式的概念，方程组的解也可写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}，\ a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}，\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}，\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}，$$

那么解可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}，\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意这里的分母 D 是由方程组（1.1）的系数所确定的二阶行列式（称为线性方程组的系数行列式），x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22} 所得的二阶行列式．

例 1.1 求解二元线性方程组 $\begin{cases} 2x_1-x_2=5, \\ 3x_1+2x_2=11. \end{cases}$

解：由于

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2\times 2-(-1)\times 3=7\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}=5\times 2-(-1)\times 11=21,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}=2\times 11-5\times 3=7,$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{21}{7}=3，\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{7}{7}=1.$$

二、三阶行列式

定义 1.1 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}, \end{matrix} \tag{1.3}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{1.4}$$

式（1.4）称为数表（1.3）所确定的**三阶行列式**.

上述定义表明**三阶行列式**含 6 项，每项均为来自不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其规律遵循图 1－1 所示的对角线法则：图中有三条实线看作是平行于主对角线的连线，三条虚线看作是平行于副对角线的连线，实线上三元素的乘积冠正号，虚线上三元素的乘积冠负号.

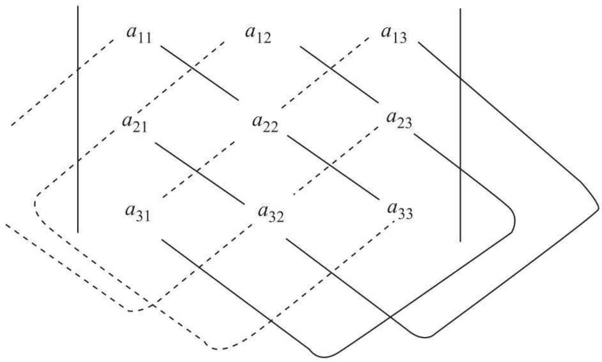

图 1－1　三阶行列式的对角线法则

例 1.2　计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}$.

解：按对角线法则，有

$$\begin{aligned}D &= 1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4-1\times1\times4-\\&\quad 2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times(-3)\\&=-4-6+32-4-8-24=-14.\end{aligned}$$

例 1.3　求解方程 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{vmatrix}=0$.

解：方程左端的三阶行列式

$$D=3x^2+4x+18-9x-2x^2-12=x^2-5x+6,$$

由 $x^2-5x+6=0$　解得 $x=2$ 或 $x=3$.

注意：对角线法则只适用于二阶与三阶行列式. 为研究四阶及更高阶行列式，下面先介绍有关全排列的知识，然后给出 n 阶行列式的概念.

第二节　全排列及其逆序数

先看一个例子.

引例　用 1、2、3 三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解：这个问题相当于说，把三个数字分别放在百位、十位与个位上，有几种不同的放法？

显然，百位上可以从 1、2、3 三个数字中任选一个，所以有 3 种放法；十位上只能从剩下的两个数字中选一个，所以有 2 种放法；而个位上只能放最后剩下的一个数字，所以只有 1 种放法．因此，共有 $3\times2\times1=6$ 种放法．

这 6 个不同的三位数是：

$$123,\ 231,\ 312,\ 132,\ 213,\ 321.$$

在数学中，把考察的对象，例如上例中的数字 1、2、3 叫作**元素**，上述问题就是：把 3 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？

对于 n 个不同的元素，也可以提出类似的问题：把 n 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？

把 n 个不同的元素排成一列，叫作这 n 个元素的**全排列**（也简称排列）．

n 个不同元素的所有排列的个数，通常用 p_n 表示．由引例的结果可知 $p_3=3\times2\times1=6$.

为了得出计算 p_n 的公式，可以仿照引例进行讨论：

从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上，有 n 种取法；

又从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上，有 $n-1$ 种取法；

这样继续下去，直到最后只剩下一个元素放在第 n 个位置上，只有 1 种取法．于是

$$p_n=n\times(n-1)\times\cdots\times3\times2\times1=n!$$

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序（例如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序），于是在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有 **1 个逆序**．一个排列中所有逆序的总数叫作这个排列的**逆序数**．

逆序数为奇数的排列叫作**奇排列**，逆序数为偶数的排列叫作**偶排列**．

下面来讨论计算 n 级排列的逆序数的方法．

为不失一般性，不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准次序．设

$$p_1p_2\cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列，考虑元素 p_i（$i=1,2,\cdots,n$），如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i. 全体元素的逆序数之总和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{t=1}^{n}t_i$$

即是这个排列的逆序数，记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

例 1.4 求排列 32514 的逆序数．

解：在排列 32514 中，

3 排在首位，逆序数为 0；

2 的前面比 2 大的数有一个（3），故逆序数为 1；

5 是最大数，逆序数为 0；

1 的前面比 1 大的数有三个（3、2、5），故逆序数为 3；

4 的前面比 4 大的数有一个（5），故逆序数为 1，于是这个排列的逆序数为

$$\tau(32514)=0+1+0+3+1=5.$$

第三节　n 阶行列式的定义

为了作出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构．三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.5}$$

容易看出：

（1）式（1.5）右边的每一项都恰是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行、不同的列．因此，式（1.5）右端的任一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 这里第一个下标（行标）排成标准次序 123，而第二个下标（列标）排成 $p_1p_2p_3$，它是 1、2、3 三个数的某个排列．这样的排列共有 6 种，对应式（1.5）右端共含 6 项．

（2）各项的正负号与列标的排列对照：

带正号的三项列标排列是：123，231，312，它们均为偶排列；

带负号的三项列标排列是：132，213，321，它们均为奇排列．

因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^t$，其中 t 为列标排列的逆序数．

综上，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对所有三级排列 $p_1p_2p_3$ 取和．

按照以上方式，可以把行列式推广到一般情形．

定义 1.2　设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}, \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$，得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.6}$$

的项，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 1，2，…，n 的一个排列，t 为这个排列的逆序数．由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而形如式（1.6）的项共有 $n!$ 项．所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为 n **阶行列式**，记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记作 $\det(a_{ij})$．数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的 i 行 j 列的**元素**．

按此定义的二阶、三阶行列式，与第一节中用对角线法则定义的二阶、三阶行列式，显然是一致的．当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，**注意不要与绝对值记号相混淆**．

例 1.5　证明对角行列式（其中对角线上的元素是 λ_i，未写出的元素都是 0）．

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证明：第一式是显然的，下面只证第二式，若记 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}$，则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^t\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中 t 为排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数，故

$$t=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

对角线以下（上）的元素都为 0 的行列式叫作**上（下）三角形行列式**，它的值与对角行列式一样．

例 1.6　证明下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明：由于当 $j>i$ 时，$a_{ij}=0$，故分析 D 中可能不为 0 的项，其各个元素 a_{ip_i} 的下标应满足 $p_i\leqslant i$，即 $p_1\leqslant 1$，$p_2\leqslant 2$，…，$p_n\leqslant n$ 同时成立．

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项，$(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，此项的符号 $(-1)^t=(-1)^0=1$，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

行列式的定义

第四节　对　　换

为了研究 n 阶行列式的性质，先来讨论对换以及它与排列的奇偶性的关系 .

在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的顺序叫作**对换** . 将相邻两个元素对换，叫作**相邻对换** .

定理 1.1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性 .

证明：先证相邻对换的情形 .

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$. 显然，$a_1\cdots a_l$；$b_1\cdots b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a，b 两元素的逆序数改变为：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同 .

再证一般对换的情形 .

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 把它作 m 次相邻对换，调成 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再作 $m+1$ 次相邻对换，调成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$. 总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 调成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反 .

推论 1.1 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数 .

证明：由定理 1.1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列（逆序数为 0），因此知推论成立 .

利用定理 1.1，下面来讨论行列式定义的另一种表示法 .

对于行列式的任一项

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n},$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，对换元素 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 成

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n},$$

这时，这一项的值不变，而行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换 . 设新的行标排列 $1\cdots j\cdots i\cdots n$ 的逆序数为 r，则 r 为奇数；设新的列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则

$$(-1)^{t_1}=-(-1)^t，故(-1)^t=(-1)^{r+t_1},$$

于是

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=(-1)^{r+t_1}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}.$$

这就表明，对换乘积项中两元素的次序，从而行标排列与列标排列同时作了相应的对换，则行标排列与列标排列的逆序数之和并不改变奇偶性 . 经一次对换是如此，经多次对换当然还是如此 . 于是，经过若干次对换，使：

列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$（逆序数为 t）变为自然排列（逆序数为 0）；行标排列则相应地从自然排列变为某个新的排列，设此新排列为 $q_1q_2\cdots q_n$，其逆序数为 s，则有

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}.$$

又，若 $p_i=j$，则 $p_j=i(a_{ip_i}=a_{ij}=a_{q_j j})$ 可见排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 所唯一确定 .

由此可得

定理 1.2 n 阶行列式也可定义为

$$\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}，其中 t 为行标排列 p_1p_2\cdots p_n 的逆序数 .$$

证明：按行列式定义有

$$D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

记
$$D_1=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

按上面讨论知：对于 D 中任一项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，总有且仅有 D_1 中的某一项 $(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ 与之对应并相等；反之，对于 D_1 中的任一项 $(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$ 也总有且仅有 D 中的某一项 $(-1)^s a_{1q1}a_{2q2}\cdots a_{nqn}$ 与之对应并相等，于是 D 与 D_1 中的项可以一一对应并相等，从而 $D=D_1$.

第五节　行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1.1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证明：记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，按定义

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

而由定理 1.2，有

$$D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

故
$$D^{\mathrm{T}}=D.$$

由此性质可知，行列式中的行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立，反之亦然.

性质 1.2　互换行列式的两行（列），行列式变号.

证明：设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 交换 i，j 两行得到的，即当 $k\neq i$，j 时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i$，j 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$，于是

$$\begin{aligned}D_1 &= \sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}\\ &= \sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}\\ &= \sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}.\end{aligned}$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数．

设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$，
故

$$D_1=-\sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_j}\cdots b_{jp_i}\cdots b_{np_n}=-D.$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列．交换 i，j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换 i，j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论 1.2 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式等于零．

证明：把这两行互换，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 1.3 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式．第 i 行（或列）乘以 k，记作 $r_i\times k$（或 $c_i\times k$）.

推论 1.3 行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面．第 i 行（或列）提出公因子 k，记作 $r_i\div k$（或 $c_i\div k$）.

性质 1.4 行列式中如果有两行（列）元素成比例．则此行列式等于零．

性质 1.5 若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和．例如，第 i 列的元素都是两数之和：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

性质 1.6 把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列（行）对应的元素上去，行列式不变．

例如，以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上（记作 c_i+kc_j），有

$$\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\xlongequal{c_i+kc_j}\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\quad(i\neq j)$$

（以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上，记作 r_i+kr_j）.

以上诸性质请读者证明之.

上述性质 1.5 表明，当某一行（或列）的元素为两数之和时，行列式关于该行（或列）可分解为两个行列式. 若 n 阶行列式每个元素都表示成两数之和，则它可分解成 2^n 个行列式. 例如二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b+y \\ c & d+w \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & b+y \\ z & d+w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & y \\ c & w \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}.$$

性质 1.2、1.3、1.6 介绍了行列式关于行和列的三种运算，即 $r_i\leftrightarrow r_j$、$r_i\times k$、r_i+kr_j 和 $c_i\leftrightarrow c_j$、$c_i\times k$、c_i+kc_j，利用这些运算可简化行列式的计算，特别是利用运算 r_i+kr_j（或 c_i+kc_j）可以把行列式中许多元素化为 0. 计算行列式常用的一种方法就是利用运算 r_i+kr_j 把行列式化为上（下）三角形行列式，从而计算行列式的值.

行列式的性质 1

例 1.7 计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解：
$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{5}{2} \end{vmatrix}=40.$$

上述解法中，先用了运算 $c_1\leftrightarrow c_2$，其目的是把 a_{11} 换成 1，从而利用运算 $r_i-a_{i1}r_1$，即可把 a_{i1}（$i=2,3,4$）变为 0. 如果不先作 $c_1\leftrightarrow c_2$，则由于原式中 $a_{11}=3$，需用运算 $r_i-\dfrac{a_{i1}}{3}r_1$ 把 a_{i1} 变为 0，这样计算时就比较麻烦. 第二步把 r_2-r_1 和 r_4+5r_1 写在一起，这是两次运算，并把第一次运算结果的书写省略了.

通过上述运算，我们可以归结出**化行列式为上三角行列的一般方法**：

（1）利用第一行 r_1 作为工具行，选择合适的数值 k，采用 r_i+kr_1，$i=2, 3, \cdots, n$ 将元素 a_{11} 下方各元素化为 0［注意：若元素 a_{11} 的数值不利于计算，可通过交换两行（列），或者 r_1+kr_j 等变形方式将元素化为 1 或 -1，以方便变形］.

（2）第一步完成后，利用第二行 r_2 作为工具行，选择合适的数值 k，采用 r_i+kr_2，$i=3$，