实用高等数学

◎ 主编　吴荣华

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

实用高等数学

主　编　吴荣华

副主编　赵江鹏　李　迪

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书充分考虑到应用型院校本科教学的实际，特别是工科应用型院校本科教学的实际，注重基本概念、基本方法和基本理论的讲解，并且对经典例题进行了补充，对工科等专业课程中可能会出现的概念和计算问题进行了补充和讲解.本书以够用为准则，弱化了理论的证明，但保持了高等数学内容的完整性、条理性和逻辑性.每节都配有习题，每章都配有复习题，能够帮助读者更好地学习和理解.

本书既可作为高等学校工科数学课程的教材，也可作为管理课程、会计课程等专业课程的公共基础课程.

图书在版编目（CIP）数据

实用高等数学 / 吴荣华主编. —北京：北京理工大学出版社，2018.8
ISBN 978-7-5682-6045-9

Ⅰ. ①实…　Ⅱ. ①吴…　Ⅲ. ①高等数学–高等学校–教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 181784 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 /
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 10.25
字　　数 / 245 千字
版　　次 / 2018 年 8 月第 1 版　2018 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 / 48.00 元

责任编辑 / 王美丽
文案编辑 / 孟祥雪
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 李志强

前　言

为了适应应用型院校本科高等数学的教学要求，也为了培养适应社会发展要求的具有数学逻辑思维、创新思维和辩证思维的人才，我们编写了这本《实用高等数学》教材.

作为公共基础必修课的数学，本着培养学生分析问题、解决问题的能力和为专业课服务的宗旨，对所学内容进行了严格的筛选.其中有三个重要的特点，其一是保持高等数学内容的完整性和连贯性；其二是添加了许多与各专业课相关的例题；其三是为了提高学生解决实际问题的能力，省略了一些理论的证明. 这样做的目的一是让我们的老师好教，二是让我们的学生好学，并且能够与专业课中的一些理论有效结合起来.

本教材总共有六章内容，吴荣华老师负责第一章和第二章，赵江鹏老师负责第三章和第四章，李迪老师负责第五章和第六章.

由于作者水平有限，本书错误之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

编　者

目 录

第一章

函数、极限与连续

函数是数学中最重要的基本概念之一，在高等数学中也是主要的研究对象. 极限是在研究变量在某一过程中的变化趋势时引出来的，它是高等数学中的重要基本概念.高等数学中的其他概念，如连续、导数、不定积分和定积分等都是用极限表述的. 这一章将对函数的概念及其相关的知识进行巩固，同时介绍极限的概念、极限的计算方法以及函数的连续的概念和性质.

1.1 函　　数

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型. 例如，人们在从事生产和经营活动时，关心的是产品的成本、销售的收益和获得的利润，这些变量通常都与产量或者销售量有关系，可以看成产量或销售量的函数.

1.1.1　函数的概念

1. 函数的定义

定义 1　设 D 是一个非空实数集，x 和 y 是两个变量，如果按照某个对应法则 f，对于 D 中的每一个数值 x，都有唯一的数值 y 与之对应，则称对应法则 f 为定义在 D 上的函数，记作 $y=f(x),x\in D$，其中 x 称为自变量；y 称为因变量；D 称为函数的定义域，也记作 D_f；$f(x)$ 称为函数 f 在 x 处的函数值；全体函数值的集合，称为函数的值域，记作 R_f 或者 $f(D)$，即 $R_f=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D_f\}$.

注意：

（1）定义中的对应法则 f 也可以用其他字母如 g、h、F 等表示.

例如 $y=g(x),y=h(x),y=F(x)$.

（2）函数的定义域和对应法则称为函数的两个要素.只有当两个函数的定义域和对应法则完全相同时，这两个函数才相同. 例如： $y=\sqrt{x^2}$ 和 $y=|x|$.

例 1 判别下列函数是否相同，为什么？

（1） $y=x-1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$；（2） $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$ 与 $y=\ln x-\ln(x-1)$；

（3） $y=x$ 与 $y=\sqrt[3]{x^3}$；（4） $y=x^0$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$.

解 （1）不相同，因为 $y=x-1$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，而 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 的定义域是 $\{x|x\neq-1\}$.

（2）不相同，因为 $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$ 的定义域是 $\{x|x>1$ 或 $x<0\}$，而 $y=\ln x-\ln(x-1)$ 的定义域是 $\{x|x>1\}$.

（3）相同，因为 $y=\sqrt[3]{x^3}=x, x\in\mathbf{R}$.

（4）不相同， $y=x^0=1, x\neq0; y=\dfrac{x^2}{x}=x, x\neq0$，它们的表达式不相同.

例 2 求下列函数的定义域：

（1） $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{4}{x-3}$；（2） $y=\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{2-x}}$；

（3） $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$；（4） $y=\arcsin(2x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

解 （1） $\begin{cases}x-2\geqslant0,\\x-3\neq0\end{cases}\Rightarrow x\geqslant2$ 且 $x\neq3$，所以定义域为 $\{x|x\geqslant2$ 且 $x\neq3\}$.

（2） $\begin{cases}x-1>0,\\2-x>0\end{cases}\Rightarrow 1<x<2$，所以定义域为 $\{x|1<x<2\}$.

（3） $\dfrac{x-1}{x+2}\geqslant0\Rightarrow x\geqslant1$ 或 $x<-2$，所以定义域为 $\{x|x\geqslant1$ 或 $x<-2\}$.

（4） $\begin{cases}-1\leqslant2x-1\leqslant1,\\x>0\end{cases}\Rightarrow 0<x\leqslant1$，所以定义域为 $\{x|0<x\leqslant1\}$.

2. 函数的表示方法

常用的函数表示方法有三种：表格法、图像法和解析法.

根据函数解析表达式形式的不同，函数也可以分为显函数、隐函数和分段函数.

（1）显函数：函数 y 由自变量 x 的解析表达式直接表示，形如： $y=f(x)$，例如： $y=2x-1$.

（2）隐函数：函数的自变量 x 和因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定，例如： $\ln x=\cos(x-y)$.

（3）分段函数：函数在其定义域的不同范围内，具有不同的解析表达式.

例如：绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant0,\\-x, x<0.\end{cases}$

1.1.2　函数的性质

1. 函数的单调性的定义

定义 2　设 $f(x)$ 是定义在区间 D 上的函数，对于任意的 x_1、$x_2 \in D$, 且 $x_1 < x_2$，若 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上是单调递增的，即 y 随 x 的增大而增大；若 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上是单调递减的，即 y 随 x 的增大而减小.

例如　函数 $f(x)=3x^2+1$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调递减的，而在 $(0,+\infty)$ 内是单调递增的.

2. 函数的奇偶性的定义

定义 3　设 $f(x)$ 是定义在区间 D 上的函数，且 D 是关于坐标原点对称的，对于任意的 $x \in D$，若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的奇函数，奇函数图像关于坐标原点对称；若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的偶函数，偶函数图像关于 y 轴对称.

例如　判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；（2）$f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$.

解　（1）偶函数，因为 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$.

（2）奇函数，因为 $f(-x)=\ln(\sqrt{(-x)^2+1}-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x).$$

3. 函数的周期性的定义

定义 4　设 $f(x)$ 是定义在区间 D 上的函数，若存在非零常数 T，使得对于任意的 $x \in D$，都有 $x \pm T \in D$, 且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，周期为 T.

例如　$\sin x$、$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；$\tan x$、$\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

4. 函数的有界性的定义

定义 5　设 $f(x)$ 是定义在区间 D 上的函数，若存在一个正数 M，对任意的 $x \in D$，都有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为区间 D 上的有界函数；若不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 为区间 D 上的无界函数.

例如　（1）$y=\sin x, y=\cos x$ 在其定义域内是有界的，因为 $|\sin x| \leqslant 1, |\cos x| \leqslant 1$.

（2）$y=\ln(x-1)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内无界，在区间（3，5）内有界，因此在说一个函数是有界的还是无界的，应同时指出其自变量的取值范围.

1.1.3　初等函数

1. 反函数

1）反函数的定义

定义 6　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 **R**，如果对于 **R** 中的每一个 y 值，D 中

都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 的值与之对应，则得到一个定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，我们称它为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$.

注意：

（1）由于习惯上总是用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以通常将 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$.

（2）由定义可知，函数 $y=f(x)$ 具有反函数的充要条件是自变量与因变量是一一对应的，因为严格单调函数具有这种性质，所以严格单调函数必有反函数.

2）求反函数的步骤

（1）求出原函数 $y=f(x)$ 的值域.

（2）把 x 作为未知数看，从方程 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$.

（3）所得的表达式中，将 x 与 y 对换，从而得出 $y=f^{-1}(x)$.

例 1　求函数 $y=\sqrt{2x-1},x\in[1,5]$ 的反函数.

解　（1）因为 $x\in[1,5]$，所以 $y\in[1,3]$.

（2）因为 $y=\sqrt{2x-1}$，所以 $y^2=2x-1$，从而 $x=\dfrac{y^2+1}{2}$.

（3）函数 $y=\sqrt{2x-1},x\in[1,5]$ 的反函数为 $y=\dfrac{x^2+1}{2},x\in[1,3]$.

3）反函数的性质

（1）反函数的定义域就是原函数的值域.

（2）反函数与原函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例如　指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

2. 复合函数

1）复合函数的定义

定义 7　设函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$，当 x 在定义域内取值时，对应的 $u=\varphi(x)$ 的值能使得 $y=f(u)$ 有定义，则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 为 x 的复合函数，称 u 为中间变量.

例 1　指出下列函数能否复合：

（1）$y=\sqrt{u},u=-1-x^2$；　　（2）$y=\cos u,u=\mathrm{e}^x$；

（3）$y=\arcsin u,u=x^2+2$；　　（4）$y=u^2,u=\sin v,v=2x-1$.

解　（1）不能，因为如果复合，则 $y=\sqrt{-1-x^2}$，该表达式没有意义.

（2）能，复合函数为 $y=\cos\mathrm{e}^x$，该表达式有意义.

（3）不能，因为如果复合，则 $y=\arcsin(x^2+2)$，该表达式没有意义.

（4）能，复合函数为 $y=\sin^2(2x-1)$.

例 2　指出下列复合函数的复合过程：

（1）$y=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2-2}}$；（2）$y=\ln\sin\sqrt{x}$；

（3） $y=\mathrm{e}^{\sin^2(3x-1)}$；（4） $y=\ln\arctan\mathrm{e}^{x^2}$

解 （1） $y=\mathrm{e}^u,u=\sqrt{v},v=x^2-2$.

（2） $y=\ln u,u=\sin v,v=\sqrt{x}$.

（3） $y=\mathrm{e}^u,u=v^2,v=\sin t,t=3x-1$.

（4） $y=\ln u,u=\arctan v,v=\mathrm{e}^t,t=x^2$.

3. *基本初等函数*

基本初等函数包括六个：常数函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数.

（1）常数函数： $y=C(C为常数)$.

（2）幂函数： $y=x^\mu(\mu为常数)$.

（3）指数函数： $y=a^x$,其中 $a>0$ 且 $a\neq1,x\in\mathbf{R},y>0$.

（4）对数函数： $y=\log_a x$,其中$a>0$且$a\neq1,x>0,y\in\mathbf{R}$.

（5）三角函数： 正弦函数 $y=\sin x$;余弦函数 $y=\cos x$;正切函数 $y=\tan x$; 余切函数 $y=\cot x$; 正割函数 $y=\sec x$;余割函数 $y=\csc x$.

（6）反三角函数：反正弦函数 $y=\arcsin x$;反余弦函数 $y=\arccos x$;反正切函数 $y=\arctan x$ 等.

4. *初等函数*

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算形成，并且在定义域内有统一的解析表达式，这样的函数称为初等函数.

例如 （1） $y=\sqrt{1-x^2}$ 是初等函数；

（2） $y=\ln\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ 是初等函数；

（3） $y=|x|=\begin{cases}x,x\geqslant0,\\-x,x<0\end{cases}$ 是初等函数；

（4） $y=\begin{cases}2-x,x\geqslant1,\\1+x,x<1\end{cases}$ 不是初等函数.

注意：初等函数用一个数学式子来表示，分段函数一般不是初等函数.

习　题　1.1

1. 判别下列各题中 $f(x)与g(x)$ 是否为同一函数：

（1） $f(x)=\ln x^3,g(x)=3\ln x$；　　（2） $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}},g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$；

（3） $f(x)=\sqrt{x^2},g(x)=(\sqrt{x})^2$； （4） $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x},g(x)=\sin x$.

2. 求下列函数的定义域：

（1） $y=\ln(x-1)+\sqrt{2-x}$； （2） $y=\dfrac{1}{1-x}+e^{1+x}$；

（3） $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{2}{x^2+3}$； （4） $y=\dfrac{\arccos(2x-1)}{\sqrt{-x^2+x+2}}$.

3. 判断下列函数的奇偶性：

（1） $f(x)=x^2(1-x^2)$； （2） $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

（3） $f(x)=x\cos x-\sin x$； （4） $f(x)=2x^2-3x+1$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-3,x\geqslant 1,\\ 2x+1,x<1,\end{cases}$ 求 $f(0),f(1),f(2),f(-1),f[2-3f(0)]$.

5. 求下列函数的反函数：

（1） $y=1-x,x>2$； （2） $y=\ln(2-x)$；

（3） $y=\dfrac{x}{1-x}$； （4） $y=\begin{cases}x-1,x<0,\\ x^2,x\geqslant 0.\end{cases}$

6. 判断下列函数中哪些是周期函数，若是周期函数，指出其周期：

（1） $y=\sin^2(x-2)$； （2） $y=x\cos x$；

（3） $y=2\cos 6x-3$； （4） $y=\sin 2x+\cos 2x$.

7. 指出下列函数是由哪些函数复合而成的：

（1） $y=\sin(2x+3)$； （2） $y=\cos\ln(1-x)$；

（3） $y=\arcsin e^{2x-1}$； （4） $y=\tan^2(\sqrt{4x-1})$.

1.2 数列极限

极限的思想是由求某些实际问题的精确解而产生的.例如，我国古代数学家刘徽（公元 3 世纪）利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术，就是极限思想在几何上的应用；又如，《庄子·天下篇》中对“截丈问题”有一段名言：“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”其中也隐含了深刻的极限思想.

1. 数列极限的定义

定义 1 如果数列 $\{a_n\}$ 的项数 n 无限增大，它的通项 a_n 无限接近于某一个确定的常数 a，则称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限，此时也称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ 或 } a_n\to a(n\to\infty).$$

注意：如果数列 $\{a_n\}$ 的项数 n 无限增大，它的通项 a_n 不接近于任何确定的常数，则称数列 $\{a_n\}$ 没有极限，或称数列 $\{a_n\}$ 发散.

例 1 观察下列数列的变化趋势，并判断它们是收敛的还是发散的：

（1）$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$；

（2）$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$；

（3）$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$；

（4）$1^2,2^2,3^2,4^2,\cdots,n^2,\cdots$；

（5）$1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{4}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{n}},\cdots$；

（6）$2,2,2,2,\cdots,2,\cdots$；

（7）$1,3,1,3,\cdots,2+(-1)^n,\cdots$；

（8）$2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$.

解　（1）、（2）、（5）、（6）、（8）都是收敛的，（3）、（4）、（7）都是发散的.

2. 数列极限的性质

（1）唯一性：若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则其极限必唯一.

证明略.

（2）有界性：若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则其极限必有界.

证明略.

（3）保号性：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $a>0(a<0)$，则必存在正整数 $\mathbf{N}$, 当 $n>\mathbf{N}$ 时，恒有 $a_n>0(a_n<0)$.

证明略.

（4）收敛数列的运算性质：若数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别收敛于 a 和 b，则它们的和、差、积和商（分母的极限不为零）的数列也是收敛的.即若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，则有：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}(b \neq 0)$.

例 2　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-5n+2}{n^2+3n+4}$.

解　将分式的分子和分母同时除以 n^2，再用性质 4 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-5n+2}{n^2+3n+4} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4-\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}} = 4$.

习　题　1.2

1. 观察下列数列的变化趋势，判别哪些数列有极限，如果有极限，写出其极限：

（1）$-1,\dfrac{1}{2},\dfrac{-1}{3},\dfrac{1}{4},\cdots,\dfrac{(-1)^n}{n},\cdots$；　　（2）$1,\dfrac{1}{2^2},\dfrac{1}{3^2},\dfrac{1}{4^2},\cdots,\dfrac{1}{n^2},\cdots$；

（3）$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\cdots,\dfrac{1}{2^{n-1}},\cdots$；　　（4）$1,2,3,4,\cdots,n,\cdots$.

2. 判别下列数列哪些是收敛的，哪些是发散的.

（1）$1,\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{27},\dfrac{1}{64},\cdots,\dfrac{1}{n^3},\cdots$；　　（2）$4,4,4,4,\cdots,4,\cdots$；

（3）$3,\dfrac{4}{2},\dfrac{5}{3},\dfrac{6}{4},\cdots,\dfrac{n+2}{n},\cdots$；　　（4）$-2,4,-6,8,\cdots,(-1)^n 2n,\cdots$.

1.3　函数的极限

前面我们学习了数列的极限，对极限的概念有了初步的了解，函数极限值与自变量 x 的变化过程是紧密相关的，自变量的变化过程不同，函数极限就有不同的表现形式.下面我们将分两种情况来讨论函数的极限.

1.3.1　函数极限的定义

1. 自变量趋于无穷大时函数的极限

函数的自变量 $x\to\infty$ 是指 x 的绝对值无限增大，它包含以下两种情况：

（1）x 取正值且无限增大，记作 $x\to+\infty$.

（2）x 取负值且它的绝对值无限增大，记作 $x\to-\infty$；

若 x 不指定正负，且 $|x|$ 无限增大，记作 $x\to\infty$.

定义 1　设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，若存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（无论它多么小），总存在着正数 X，使得对于满足不等式 $|x|>X$ 的一切 x 总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty)$$

例 1　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{A}{x}=0\ (A\neq 0)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$.

定理 1　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

例 2　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-2}{x^2-1}$.

解　$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=3.$$

2. 自变量趋于有限值时函数的极限

与 $x \to \infty$ 的情形类似，$x \to x_0$ 同样包含了两种情况：

（1）x 从大于 x_0 的方向趋近于 x_0，记作 $x \to x_0^+$；

（2）x 从小于 x_0 的方向趋近于 x_0，记作 $x \to x_0^-$；

若 $x \to x_0$，则表示 x 从大于 x_0 的方向和从小于 x_0 的方向无限趋近于 x_0.

定义 2　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心领域内有定义，若存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（无论它多么小），总存在着正数 δ，使得对于满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的一切 x 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0)$$

例 1　$\lim\limits_{x \to 1}(2x+1) = 3$，$\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$，$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1} = 2$.

定义 3　当 x 仅从左侧（$x < x_0$）趋近于 x_0 时，$f(x)$ 以 A 为极限，即对于任意给定的正数 ε（无论它多么小），总存在着正数 δ，使得对于满足不等式 $x_0 - \delta < x < x_0$ 的一切 x 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0^-$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^-) = A$$

称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限.

定义 4　当 x 仅从右侧（$x > x_0$）趋近于 x_0 时，$f(x)$ 以 A 为极限，即对于任意给定的正数 ε（无论它多么小），总存在着正数 δ，使得对于满足不等式 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 的一切 x 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0^+$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^+) = A$$

称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限.

定理 2　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

例 2　讨论当 $x \to 0$ 时，$f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ 的极限.

解　$f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, x > 0, \\ -1, x < 0. \end{cases}$　$f(0^-) = -1, f(0^+) = 1, f(0^-) \neq f(0^+)$.

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处极限不存在.

例 3　已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x - 1, x > 1, \\ 4, x = 1, \\ 6 - x, x < 1. \end{cases}$　讨论 $x \to 1$ 时的极限.

解

$$f(1^-) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-}(6 - x) = 5$$

$$f(1^+) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+}(2x^2 + 3x - 1) = 4$$

因为 $f(1^-) \neq f(1^+)$，所以 $f(x)$ 在 x=1 处极限不存在.