高等学校教学改革成果书
高等学校教学创新参考书

问题情境设计式赏识教学法与案例选

（高等数学）

丁殿坤 等 著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高等学校教学改革成果书
高等学校教学创新参考书

问题情境设计式赏识教学法与案例选

（高等数学）

丁殿坤 等 著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书是高等学校教学改革成果书，是作者结合几十年的教学实践经验、学生实际情况和立项课题的研究成果而写成的。本书共4章：第1章是问题情境设计式赏识教学法；第2章是函数连续与微积分案例选；第3章是微分方程与级数案例选；第4章是空间解析几何案例选。本书的最后附有参考文献。书中的教学法是一套适合普通高校本科、专科学生的教学方法。书中叙述界定了"问题情境设计式赏识教学法"，并选定高等数学的一些内容进行了问题情境设计。对于书中设计的案例，教师可直接应用于教学，亦可在此基础上根据自己的教学实际进行修改后应用。本书适合作为高等学校数学教师的教学参考书，亦可作为大学生自学大学数学的辅助资料。

图书在版编目(CIP)数据

问题情境设计式赏识教学法与案例选：高等数学/丁殿坤等著. -- 北京：北京邮电大学出版社，2018.12

ISBN 978-7-5635-5642-7

Ⅰ. ①问… Ⅱ. ①丁… Ⅲ. ①高等数学－教学研究－高等学校 Ⅳ. ①O13-42

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第277714号

书　　名：问题情境设计式赏识教学法与案例选(高等数学)
责任编辑：徐振华　王小莹
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路10号(邮编：100876)
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：
开　　本：720 mm×1 000 mm　1/16
印　　张：6.5
字　　数：102千字
版　　次：2018年12月第1版　2018年12月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-5642-7　　定　价：29.00元

· 如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

著　　者

丁殿坤　吕端良　岳　嵘　郭秀荣

丁　翔　张序萍　陈贵磊　王鲁新

前　言

“问题情境设计式赏识教学法”是作者主持的立项资助课题“高等数学‘问题情境设计式赏识教学法’研究”(qx0902128)及省教育科学“十二五”规划立项课题“高校数学‘问题情境设计式赏识教学法’研究”(2013GG125)的研究成果，也是公共基础课程教学改革项目“大学数学系列课程”(GJ201302)研究的内容。该教学法是一套适合普通高校本科、专科学生的教学方法，当然也适合其他各层次、各类别的高校学生。“问题情境设计式赏识教学法”即教师从关爱学生的角度出发，解决了学生不自信、恐惧数学的心理，变被动的注入式教学模式为主动的研究、探索式教学模式，使学生获取的知识实现概念化、条件化、结构化、自动化、策略化，从而提高学生分析问题和解决问题的能力。

课题组根据学生的基础和专业特点，应用先进的教育思想和教育新理念，依据课堂教学内容以及学生的知识结构，并参照高等数学教材的内容顺序编写了《高等数学问题情境设计》教学参考书，并在计算机科学与技术 09-1、网络工程 09-1、会计学 09-3、金融学 09-1、采矿工程 10-1、测绘工程 10-1、机械制造与自动化 10-2 和计算机科学与技术 09-2、网络工程 09-2、会计学 09-4、金融学 09-2、采矿工程 10-2、测绘工程 10-2、机械制造与自动化 10-3 共 14 个班级中进行对照试验。在 2009—2010 学年第二学期和 2010—2011 学年第一学期期末考试中，试验班级计算机科学与技术 09-1、网络工程 09-1、会计学 09-3、金融学 09-1、采矿工程 10-1、测绘工程 10-1、机械制造与自动化 10-2 平均及格率达 90%以上，而对照班级计算机科学与技术 09-2、网络工程 09-2、会计学 09-4、金融学 09-2、采矿工程 10-2、测绘工程 10-2、机械制造与自动化 10-3 平均及格率为 65%，两者及格率有显著性差异。由此可见该教学法在提高数学成绩上效果明显。因此该教学法受到了专家的认可和师生的广泛好评，并获“优秀教学成果奖”。同时，本书

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

作者也获得了数学“统考优秀奖”。该教学法现已推广到线性代数等其他数学课程的教学中。故此,作者结合几十年的教学实践经验、学生实际情况和立项课题研究成果写成了《问题情境设计式赏识教学法与案例选(高等数学)》一书。本书共4章:第1章是问题情境设计式赏识教学法;第2章是函数连续与微积分案例选;第3章是微分方程与级数案例选;第4章是空间解析几何案例选。并且,本书的最后附有参考文献。书中叙述界定了“问题情境设计式赏识教学法”,并选定高等数学的一些内容进行了问题情境设计。对于书中设计的案例,教师可直接应用于教学,亦可在此基础上根据自己的教学实际进行修改后应用。本书适合作为高等学校数学教师的教学参考书。而且书中的案例是针对学生设计的,所以本书亦可作为大学生自学大学数学的辅助资料。

在撰写和出版该书的过程中,作者得到了有关领导、老师的大力支持和帮助,在此表示感谢!囿于水平,加之文稿整理仓促,书中难免有错误和不当之处,恳请专家、同行和读者批评指正。

丁殿坤

2018年9月于泰安 山东科技大学

目　录

第 1 章　问题情境设计式赏识教学法

1.1　“问题情境设计式赏识教学法”的产生及作用

20 世纪 90 年代初，教育家周弘历尽艰辛把双耳全聋的女儿培养成了中国第一位聋人少年大学生。将此成功的个案推而广之，把成功的教育经验升华为一种教育思想，即为“赏识教育”。“赏识教育”从诞生来源来看，是生命的体验；从教育角度来看，是思想的继承；从教育者的角度来看，是心态的回归；从受教育者的角度来看，是心灵的解放；从思维方式来看，是观念的更新；从表达方式来看，是语言的突破。“赏识教育”是近年来在中小学教育中倡导的一种新型的教育理念和教育方法，但目前高校基本上使用的仍是讲授法（满堂灌）。因为有些普通高校本科和其他各层次的学生入学时数学基础差，所以数学一直是他们的学习难点。有些教师在教学中常常为了赶教学进度而忽略了学生的心理需求，导致学生对学习数学的积极性不高，并对数学失去信心，甚至对数学产生恐惧感。大学数学是理工类、经管类学生学习各专业课的基础和工具，也是该类学生考研必考的内容，因此必须对数学教学进行教学方法改革。作者根据学生的基础和专业特点，应用先进的教育思想和教育理论，设计了一种教学法：首先根据教材内容运用“问题情境设计”，即根据课堂教学的内容和学生的知识结构等有计划、有步骤、由浅入深地进行问题情境设计；然后“赏识引导解决问题”，即教师使用赏识引导语言（方法）鼓励学生研究、探索所设计的问题，从而帮助学生解决问题；最后“逼近课堂教学内容完成教学任务”，即在赏识引导学生解决问题完成后，由教师再引导、总结或进一步推广，逼近教学内容，从而完成课

堂教学任务。该教学法称为“问题情境设计式赏识教学法”,是作者主持的立项资助课题“高等数学‘问题情境设计式赏识教学法’研究”(qx0902128)及省教育科学“十二五”规划立项课题“高校数学‘问题情境设计式赏识教学法’研究”(2013GG125)的研究成果,也是公共基础课程教学改革项目“大学数学系列课程”(GJ201302)研究的内容。该教学法符合普通高校本科和其他各层次的学生实际情况,让学生变被动听教师灌输知识为主动探索知识,提高了学生自学、研究、创新能力,符合现代教育理论、教育思想;能够帮助学生克服厌烦数学、对数学信心不足和恐惧数学的心理,使学生自信,从而帮助学生树立学好大学数学的信心;能够使学生获取的知识实现概念化、条件化、结构化、自动化、策略化,提高学生分析问题和解决问题的能力。教师要想使用赏识引导语言(方法),就必须热爱学生。师爱是一种巨大的教育力量,能转化为激励学生前进的原动力,影响学生的情感和个性的发展。每个学生都想得到教师的喜爱,教师如果热情地关怀学生,真诚地热爱学生,就能激励学生奋发向上。所以,该教学法可增强“罗森塔尔效应”,从而提高学生应用数学知识解决实际问题的能力。

1.2　“问题情境设计式赏识教学法”国内外研究现状与趋势

“赏识教育”是近年来在中小学教育中倡导的一种新型的教育理念，还没有形成成熟稳定的方法。目前，国内外高等学校对于“赏识教育”的研究基本是空白的。各高校采取的教学方法基本相似，使用的全是讲授法（满堂灌）。虽然国内外高校都提出了教学改革，着重培养学生应用知识的能力，但都只是停留在理论方面的研究和一些竞赛活动的组织上，没有推出具体的教学方法，更谈不上推出相配套的教材和教学参考书了。要培养学生应用知识的能力，就必须进行教学改革，特别是对教育理念、教学方法的改革，这已是大势所趋。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1.3 “问题情境设计式赏识教学法”的研究内容及方法

“问题情境设计式赏识教学法”涉及教材〔指的是同济大学数学系编的《高等数学》(第五版)及《高等数学》(第六版),下文统称教材〕内容对应的“问题情境设计”“赏识引导解决问题”“逼近课堂教学内容,完成教学任务”三个部分。其中,“问题情境设计”是指根据每节课堂教学内容和学生的接受能力、心理需求、知识结构以及专业特点,既注意知识结构的联系又注意知识的延伸,有计划、有步骤、由浅入深地进行问题情境设计;“赏识引导解决问题”是指根据问题情境设计,使用赏识引导语言(方法)鼓励学生研究、探索所设计的问题,学生可以分组讨论,也可个别回答,根据实际情况采取各种方式让学生各抒己见,从而帮助学生解决问题;“逼近课堂教学内容,完成教学任务”是指在赏识引导解决问题时,由于大学低年级学生的数学基础参差不齐,有的专业文理科学生兼有,学生们存在解决问题的方法差别较大,解题不够严谨等问题,因此由教师赏识引导、总结或讲解,可以使学生们的知识结构更加系统,或进一步推广,便可以逼近教学内容,完成课堂教学任务。

例如,在微分中值定理教学时,可作如下设计。

设计 1-3-1　罗尔(Rolle)定理问题情境设计

先画出一段光滑的曲线弧$\overset{\frown}{CD}$,连接点 C 和点 D 得一弦 CD,再在弧上找一点 E,在该点作切线与弦平行(如图 1-1 所示)。这样就得到命题 1-3-1。

命题 1-3-1　光滑曲线弧上至少存在一点,该点的切线平行于弦。

若要证明该命题,可以用赏识引导语言(方法)引导学生想办法证明。这样,学生可得到直接证这个命题比较困难,可用解析几何法来证明的思路。因此,将图 1-1 放入直角坐标系,且使弦平行于 x 轴(如图 1-2 所示),这时曲线弧的方程用$y=f(x)$表示,弧的两个端点 C、D 分别对应于 x 轴上的点 a、点 b,点 E 对应于 x 轴上点 ξ,切线与弦(x 轴)平行,ξ 点的函数导数值等于零。同样可赏识引导学生把命题 1-3-1 叙述为命题 1-3-2。

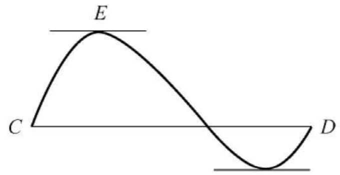

图 1-1

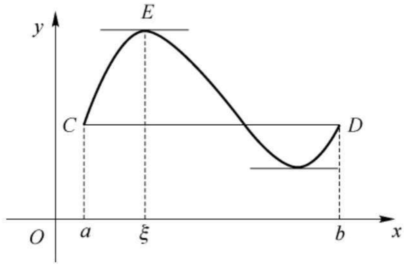

图 1-2

命题 1-3-2　如果 $f(x)$满足(1)在闭区间$[a,b]$上连续,(2)在开区间(a,b)内可导,(3)在区间端点处函数值相等,即 $f(a)=f(b)$,则在(a,b)内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$,使得 $f'(\xi)=0$。

命题 1-3-2 就是罗尔定理。其证明方法可参考教材或其他资料。可用于参考的证明方法如下。

证明: 因 $f(x)$在$[a,b]$上连续,$f(x)$在该区间内必取得最大值 M、最小值 m。(1)若 $M=m$,则 $f(x)$是常数,所以,任取 $\xi\in(a,b)$,有 $f'(\xi)=0$。(2)若 $M\neq m$,则 M、m 中至少有一个不等于 $f(x)$在$[a,b]$的端点处的函数值,不妨设 $M\neq f(a)$且 $M\neq f(b)$,那么在(a,b)内至少存在一点 ξ 使 $f(\xi)=M$,即对于任意 $x\in(a,b)$有 $f(x)\leqslant f(\xi)$,故有

$$f'_-(\xi)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\geqslant 0,$$

$$f'_+(\xi)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\leqslant 0,$$

又 $f(x)$在(a,b)内可导,所以 $f'(\xi)=0$。可以类似地证明 $m\neq f(a)$且$m\neq f(b)$的情形。

设计 1-3-2　拉格朗日(Lagrange)中值定理问题情境设计

赏识引导学生把图 1-1 放入另一个直角坐标系,且使弦不平行于 x 轴(如图 1-3 所示)。仍然用赏识语言(方法)引导学生,让学生说出曲线的方程变了,此时设曲线的方程为 $y=F(x)$,点 C、点 D 对应 x 轴上的点变为点 A、点 B,点 E 对应 x 轴上的点 η。E 点的切线仍平行于弦,而弦的斜率为$\dfrac{F(B)-F(A)}{B-A}$,E

点的切线斜率为 $F'(\eta)$，故有 $F'(\eta)=\dfrac{F(B)-F(A)}{B-A}$。继续使用赏识语言（方法）引导学生，让他们得到命题 1-3-3。

命题 1-3-3　如果 $F(x)$ 满足(1)在闭区间 $[A,B]$ 上连续，(2)在开区间 (A,B) 内可导，则在 (A,B) 内至少存在一点 $\eta(A<\eta<B)$，使得

$$F(B)-F(A)=F'(\eta)(B-A)$$

成立。

若把 $F(x)$ 换成 $f(x)$，A、B 换成 a、b，η 换成 ξ，命题 1-3-3 就是教材上的拉格朗日中值定理。由于切线与弦的平行关系没有变化，拉格朗日中值定理的正确性无须证明。当然，也可让学生学会用构造函数的方法来证明定理。可用于参考的证明方法如下。

证明：构造函数 $\varphi(x)=F(x)-F(A)-\dfrac{F(B)-F(A)}{B-A}(x-A)$，而 $\varphi(A)=\varphi(B)=0$，且 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[A,B]$ 上连续，在开区间 (A,B) 内可导，显然 $\varphi(x)$ 满足罗尔定理条件。故由罗尔定理可知，在 (A,B) 内至少存在一点 $\eta(A<\eta<B)$，使 $\varphi'(\eta)=F'(\eta)-\dfrac{F(B)-F(A)}{B-A}=0$，整理得 $F(B)-F(A)=F'(\eta)(B-A)$。

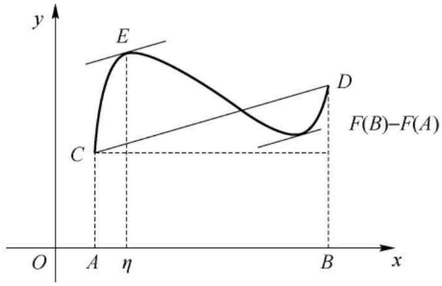

图 1-3

设计 1-3-3　柯西(Cauchy)中值定理问题情境设计

赏识引导学生将图 1-3 的弧用参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 表示（如图 1-4 所示），并用赏识语言（方法）引导学生叙述出命题 1-3-4。

命题 1-3-4　如果 $\psi(t)$ 及 $\varphi(t)$ 满足(1)在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，(2)在开区间 (α,β) 内可导，(3)对任一 $t\in(\alpha,\beta)$，$\varphi'(t)\neq0$，则在 (α,β) 内至少存在一点 $\zeta(\alpha<\zeta<\beta)$，使得

等式$\dfrac{\psi(\beta)-\psi(\alpha)}{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}=\dfrac{\psi'(\zeta)}{\varphi'(\zeta)}$成立。

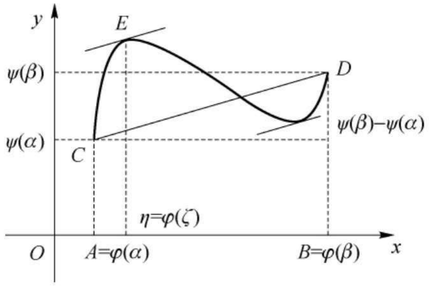

图 1-4

如果把 $\psi(t)$及 $\varphi(t)$换成 $f(x)$和 $F(x)$，α、β 换成 a、b，ζ 换成 ξ，命题 1-3-4 就是参考文献[16-19]上的柯西中值定理。由于拉格朗日中值定理是正确的，命题 1-3-4 无须证明。柯西中值定理可认为是拉格朗日中值定理的变式，即拉格朗日中值定理中的函数用参数方程表示而已，而拉格朗日中值定理可认为是罗尔定理的变式，只是将图 1-2 的位置、角度变化了一下。罗尔定理可认为是图 1-1 的变式，只是将图 1-1 放在直角坐标系中，用解析式表示而已。

总之，三个定理都是表明一段光滑的曲线弧上至少存在一点的切线平行于弧两端点的连线，这是本质。在教学实际中，赏识引导学生的内容要占课堂内容的较大比例，此处限于篇幅，只进行了简略说明。

设计 1-3-4　练习问题情境设计

例 1-3-1　证明：当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$。

例 1-3-2　设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导。证明：在(a,b)内至少存在一点 ξ 有 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}$。

赏识引导学生应用微分中值定理证明例 1-3-1、例 1-3-2。如果教师需总结或讲述其他内容，可灵活安排。

“问题情境设计式赏识教学法”从关爱学生的角度出发，帮助学生克服了对数学不自信、恐惧数学的心理，变被动的注入式的教学模式为主动的研究、探索

式的教学模式,因此该教学法可增强“罗森塔尔效应”。课题组成员首先,根据学生的基础和专业特点应用先进的教育思想和教育理念,结合课堂教学内容和学生的知识结构,参照教材的内容顺序有计划、有步骤、由浅入深地进行了问题情境设计;然后,编写出教案(参考书);最后,选定了14个班级,对相同专业的班级进行了对照试验,根据试验结果进一步研究、总结、修改了教案(参考书)并加以推广。

1.4　"问题情境设计式赏识教学法"遵循的原则

使用"问题情境设计式赏识教学法"进行问题情境设计时应遵循以下几个原则。

① 适宜性原则。目的要明确，即提出的问题要紧紧围绕当前的教学任务，使学生的注意力集中在教学任务上。问题的难度要适宜，即对于提出的问题学生力所能及但又觉得富于挑战性；问题要能反映本质，即问题要提到点子上，要能反映所学新知识的本质特征。否则，问题不但不能引导学生思维指向教学任务，还可能干扰学生思路。

② 过程性原则。充分运用直观形象化的感性材料来创设问题，适时地加以启发，引导学生通过主动探索揭示知识的发生、发展过程，使学生清楚地了解整个掌握知识的思维过程。

③ 结构性原则。问题情境的构建及其所指示的知识应具有内在的逻辑结构。问题应按数学知识的发生、发展过程，以相应的数学思想方法为主线，组成一个循序渐进、具有内在联系的问题体系。第一个问题是最基本的，它贯穿于整个教学过程，能引起学生对掌握新知识的兴趣，而随后的一系列问题都要为继续揭示新知识的本质而服务。

④ 延伸性原则。创设的问题情境既要能构建出当前教学应当解决的问题，完成课程内容的学习和掌握，又要蕴含与当前问题有关，需运用新知识甚至其他相关学科知识去解决，能激发学生自己去思考、去探求的问题。这样才能把累积的知识启动，纳入已有的知识结构中，提高学生分析问题和解决问题的能力。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com