YUEDU
SHUXUE

阅读数学

A版

许建萍 著

- 9讲　微型讲座　实现从知识到能力的飞跃
- 70%+30%　化难为易　达到从课本到竞赛的延伸
- A版/B版　读练结合　成就从学生到学霸的梦想

9

九年级

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

阅 读 数 学 A 版

九年级

许建萍　著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

阅读数学:A版. 九年级 /许建萍著. —杭州:浙江大学出版社,2016.5

ISBN 978-7-308-15672-1

Ⅰ.①阅… Ⅱ.①许… Ⅲ.①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第054081号

阅读数学A版 九年级

许建萍 著

责任编辑	夏晓冬
责任校对	余梦洁
封面设计	林智广告
出版发行	浙江大学出版社 (杭州市天目山路148号 邮政编码310007) (网址:http://www.zjupress.com)
排　　版	杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷	杭州杭新印务有限公司
开　　本	787mm×1092mm 1/16
印　　张	17
字　　数	413千
版 印 次	2016年5月第1版 2016年5月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-15672-1
定　　价	39.80元

浙江大学出版社发行中心联系方式(0571)88925591;http://zjdxcbs.tmall.com

作者的故事

身为初中数学教师的我，常常因繁重的教学工作而疏于对女儿数学学习的引导。直到女儿小学五年级学期结束时，她对我说："妈妈，我想不读六年级了，学校六年级的课程差不多已经上完了，我想读初中了。"我才猛然觉得愧对孩子。当时因为要带初三，我担心难以兼顾好学生和女儿，所以就对女儿说："等妈妈带好这届学生，那时你就可以在妈妈班里读初一。"一方面，我能近距离地关心女儿，另一方面，也想在女儿身上作个尝试，让一个在小学阶段没有接受奥数训练的孩子，通过"阅读数学"的方式，能喜欢上数学，至少不把学数学当作一件苦事、难事。

我的"阅读数学"尝试是成功的。女儿不仅真的喜欢上了数学，轻松地完成了高中阶段的学习，而且就读上海财经大学经济学院数量经济专业时，仍然专注于数学，自己组队参加全美建模大赛，负责数学和英语翻译，在没有专门指导教师的情况下获得了二等奖。

我的"阅读数学"尝试是丰收的。我在带女儿的同时也带出了一批喜欢数学的学生，从初一让他们带着红领巾进初三数学竞赛试场玩数学，到初二有一人获市一等奖，最后在初三获一等奖人数占总数的$\frac{1}{4}$，其中一人以满分获省一等奖。该学生后来以外地生第三名的成绩进入上海中学实验班学习，在他读高二第一学期时参加全国数学联赛，获得上海市第13名(参赛高二学生中第二名)并进入了数学奥林匹克冬令营。在冬令营中获二等奖，最后保送北大数学系。还有两人分别以第一名和第三名的成绩考入上海复旦附中实验班，一人进入计算机奥林匹克冬令营，保送北大计算机系，另一人保送复旦大学。提起这三位学生，还有一个另我记忆深刻的故事。在他们读初二前的暑假里，有位老师拿出了一道因式分解题，我因忙于手头的阅卷任务而没有马上研究，虽然这三位学生没有正式学过因式分解，考虑到在我的辅导班里已经让他们"阅读"过课本内容，我也讲过一二，于是电话通知他们试试。结果非常有趣：第一位同学来电话说实在想不出，请我教方法；第二位同学也来电话告知已经做出，方法与我的不一样，在了解他的方法后告知了我的方法；阅卷结束后我电话询问第三位同学，他说想继续攻题，到晚上来电话告诉我攻题成功，方法与前两种方法都不同，我在与他交流了其他两种方法。令我始料不及的是，第一位同学晚上又打来电话询问其他两位同学是否做出，他们的方法是什么？作为老师，我真的很满意他们三位的学习方式和钻研精神。但现在细想，他们三位的智力水平相当，第一位同学以最少的时间获取三种方法。高中时，该同学作为高二学生入选数学奥林匹克冬令营并获二等奖，这与他特别善于吸取他人思想精华的学习方法不无关系。

“它山之石可以攻玉”,是“阅读数学”的逻辑起点。“熟读唐诗三百首,不会作诗也会吟”,数学学习也一样。一直以来,初中数学让许多学生望而生畏,有的花了大量时间,但学习效果并不理想。“阅读数学”可以让学生喜欢数学。以“阅读数学”的方式教育教学,让我一直幸福地教书,我的幸福在于我欣赏并信任我的学生,从来不没收他们参考用书的答案,让他们通过“阅读数学”而快速掌握知识,我则尽可能或帮助补充其他方法,或提炼出规律,或帮学生看透难题本质,变竞赛题为课本题,最后我的学生都喜欢数学。作为我的学生,他们会自信地走进竞赛考场,发挥出自己的水平。十多年来,我每天在收集整理解题思路,品位着他们漂亮方法背后的思维方式。现在终于成集,《阅读数学》是开放思维与创造思维的融合,我相信这本书会让害怕数学的学生在阅读学长们的好方法后喜欢数学,并以最快的方式欣赏到数学的漂亮,忍不住地动手研究题目,把做数学题目当作玩游戏,健康快乐地成长。我更相信,这本书可以让优秀学生找到知音和乐趣,实现跨越式的提升。

有新解题方法的同学,欢迎发邮件至 1286216158@qq.com。再版时会考虑引入你的新方法,一旦引入,你的名字和你的智慧将出现在书中,期待数学思维的碰撞。

目　录

第一章　二次函数

1.1　二次函数的图象与解析式

知识窗

我们通常将函数 $y=ax^2+bx+c$(a,b,c 为常数,$a\neq0$)称为 x 的二次函数,其图象为一条抛物线,与抛物线相关的知识有以下几点:

(1)a,b,c 的值决定了抛物线的大致位置.

(2)抛物线关于直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$对称,抛物线的开口方向、开口大小仅与 a 的值相关;对称轴在 y 轴的左侧时,a,b 同号;对称轴在 y 轴右侧时,a,b 异号;抛物线在顶点$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$处取得最值.

(3)抛物线的解析式有下列三种形式:

①一般式:$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$;

②顶点式:$y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$,其中(h,k)是抛物线的顶点坐标;

③交点式:$y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq0)$,当抛物线与 x 轴有交点时使用交点式,式中 x_1,x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根,也是抛物线与 x 轴交点的横坐标,此时抛物线的对称轴为直线 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

例题精选

例题 1　根据题意分析下列各题选用二次函数的哪种解析式较为合适,并求出解析式.

(1)已知二次函数图象过$(0,-6)$,$(2,-4)$,$(-2,0)$三点;

(2)已知二次函数图象过点$(2,-2)$,顶点为$(1,-4)$;

(3)已知二次函数图象过$(1,0)$,$(5,0)$,$\left(2,-\dfrac{3}{2}\right)$三点;

(4)已知二次函数图象过$(1,3)$,$(5,3)$,$\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$三点.

分析:若已知抛物线的顶点,则设顶点式为好;若与 x 轴有两个交点,则可设交点式;若与 y 轴有交点,则可设一般式,因为已知 c 的值.

解:(1)设该二次函数为 $y=ax^2+bx+c$,将三点分别代入得$\begin{cases}-6=0+0+c & ①,\\ -4=4a+2b+c & ②,\\ 0=4a-2b+c & ③.\end{cases}$

由①得 $c=-6$，由②－③得 $-4=4b$，所以 $b=-1$. 把 $c=-6$，$b=-1$ 代入③得 $0=4a+2-6$，所以 $a=1$，该二次函数为 $y=x^2-x-6$.

(2)设该二次函数为 $y=a(x-1)^2-4$，把$(2,-2)$代入得 $-2=a(2-1)^2-4$，所以 $a=2$，该二次函数为 $y=2(x-1)^2-4$.

(3)设该二次函数为 $y=a(x-1)(x-5)$，把$\left(2,-\frac{3}{2}\right)$代入得 $-\frac{3}{2}=a(2-1)(2-5)$，所以 $a=\frac{1}{2}$，该二次函数为 $y=\frac{1}{2}(x-1)(x-5)$.

(4)设该二次函数为 $y=a(x-1)(x-5)+3$，把$\left(2,\frac{3}{2}\right)$代入得 $\frac{3}{2}=a(2-1)(2-5)+3$，所以 $a=\frac{1}{2}$，该二次函数为 $y=\frac{1}{2}(x-1)(x-5)+3$.

回味：确定抛物线的解析式一般需要两个或三个独立条件，视情况和需要，一般选用这三种形式中的一种. 灵活地选用不同方法求出抛物线的解析式是解与抛物线相关问题的关键，如题(4)，点(1,3)与点(5,3)的纵向高度一致，因此可以设为 $y=a(x-1)(x-5)+3$ 形式.

例题 2 将抛物线 $y=-2x^2$ 向_____平移_____个单位，再向_____平移_____个单位，可以通过点(0,0)及(1,6).

分析：先求出移动后的解析式，再看前后两个顶点的位置变化即可.

解：设移动后的解析式为 $y=-2x^2+bx+c$，把(0,0)及(1,6)代入得 $c=0$，$b=8$，

所以设移动后的解析式为 $y=-2x^2+8x=-2(x^2-4x+4)+8=-2(x-2)^2+8$，

说明顶点由(0,0)移到了(2,8)，所以 $y=-2x^2$ 向右平移 2 个单位，再向上平移 8 个单位.

回味：在特殊点的坐标变化中，顶点是最常被关注的点，另外，与两坐标轴的交点也是我们要考虑的. 一般地，抛物线的平移、对称、旋转等变动，都可以用顶点式来研究其变化.

	函数 $y=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$，其中(h,k)是抛物线的顶点坐标		
抛物线变动	顶点	开口方向	变化后抛物线
向右平移 m 个单位，向上平移 n 个单位	$(h+m,k+n)$	不变	$y=a(x-h-m)^2+k+n$
向左平移 m 个单位，向下平移 n 个单位	$(h-m,k-n)$	不变	$y=a(x-h+m)^2+k-n$
关于 y 轴对称	$(-h,k)$	不变	$y=a(x+h)^2+k$
关于 x 轴对称	$(h,-k)$	变	$y=-a(x-h)^2-k$
关于原点对称	$(-h,-k)$	变	$y=-a(x+h)^2-k$
绕其顶点旋转 180°	(h,k)	变	$y=-a(x-h)^2+k$

例题 3 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 1-1 所示，则下列六个代数式：b^2-4ac，abc，$a-b+c$，$a+b+c$，$3a-b$，$4a-2b+c$ 中，其值为负的式子有________个.

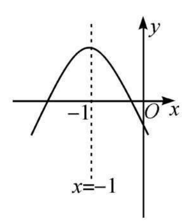


图 1-1

分析：图中提供定量的信息只有对称轴 $x=-1$ 这一个，但定性的信息有不少，粗看有抛物线的开口方向、顶点及与两坐标轴交点的位置，细看有抛物线与 x 轴的两个交点到对称轴的距离小于 1.

解：先从图象上直接判断 a，c 的符号.

因为抛物线开口方向向下，所以 $a<0$.

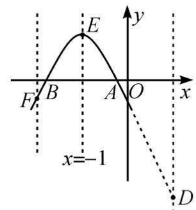


图 1-1-1

因为抛物线的图象与 y 轴的交点在负半轴上，所以 $c<0$.

再通过对称轴的位置判断 b 的符号.

因为 $-\frac{b}{2a}=-1$，所以 a,b 同号，且 $b=2a$.

因为 $a<0$，所以 $b<0$，$3a-b=3a-2a=a<0$.

最后从点 $(1,a+b+c)$，$(-1,a-b+c)$，$(-2,4a-2b+c)$ 的位置在 x 轴的上方还是下方可得 $a+b+c$，$a-b+c$，$4a-2b+c$ 的正负性.

因为抛物线与 x 轴有两个交点，分别记为 A,B，所以 $b^2-4ac>0$，如图 1-1-1 所示.

因为点 A 在直线 $x=-1$ 与 y 轴之间，所以点 B 在直线 $x=-2$ 与 $x=-1$ 之间，即可"定性"地画出 $D(1,a+b+c)$，$E(-1,a-b+c)$，$F(-2,4a-2b+c)$ 三点的位置.

因为点 D,F 在 x 轴下方，所以 $a+b+c<0$，$4a-2b+c<0$.

因为点 E 在 x 轴上方，所以 $a-b+c>0$.

综上所述，$abc<0$，$3a-b<0$，$a+b+c<0$，$4a-2b+c<0$，即其值为负的共有 4 个.

回味：(1)图 1-1 中提供的信息分定性和定量两种，定性的可列不等式，定量的可列等式.

(2)一看抛物线的开口方向和与两坐标轴交点的位置，可判断 a 与 c 的符号；二看对称轴，可判断 b 的符号，对称轴在 y 轴左侧时，a,b 异号，反之，a,b 同号；三看特殊点的位置，一般有 $(\pm1,a\pm b+c)$，$(\pm2,4a\pm2b+c)$，$(\pm3,9a\pm3b+c)$，特别要看清楚抛物线与 x 轴的交点到对称轴的距离范围.

例题 4　证明：无论 a 取何实数，抛物线 $y=x^2+(a+1)x+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}$ 都通过一个定点，而且这些抛物线的顶点都在一条确定的抛物线上.

分析：把 $y=x^2+(a+1)x+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}$ 先变形为 $M+aN=0$，如果 $M=0$，$N=0$，就可以让 a 取任何实数.

解：$y=x^2+(a+1)x+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}$，$x^2+x+\frac{1}{4}-y+a\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$.

当 $x+\frac{1}{2}=0$，$x^2+x+\frac{1}{4}-y=0$ 时，$x=-\frac{1}{2}$，$y=0$，

即无论 a 取何实数，抛物线总通过定点 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

又 $y=x^2+(a+1)x+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}=x^2+2\cdot\frac{a+1}{2}x+\left(\frac{a+1}{2}\right)^2-\frac{a^2+2a+1}{4}+\frac{2a}{4}+\frac{1}{4}=\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a^2$，故抛物线的顶点坐标为 $\left(-\frac{a+1}{2},-\frac{1}{4}a^2\right)$.

即 $\begin{cases}x=-\frac{a+1}{2},\\y=-\frac{1}{4}a^2,\end{cases}$

由 $x=-\frac{a+1}{2}$ 得 $a=-2x-1$，代入 $y=-\frac{1}{4}a^2$ 得 $y=-\frac{1}{4}(2x+1)^2$，

即原抛物线的顶点都在抛物线 $y=-\frac{1}{4}(2x+1)^2$ 上.

回味:因为题干中提及顶点,故必求出顶点坐标 $\left(-\frac{a+1}{2},-\frac{1}{4}a^2\right)$,因抛物线的顶点坐标 (x,y) 是 a 的函数,即 $\begin{cases}x=-\frac{a+1}{2},\\ y=-\frac{1}{4}a^2.\end{cases}$ 要保证顶点都在一条确定的抛物线上,则必须消去 a 才能建立 x 与 y 的函数关系.

例题 5 作出函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+|x|-2$ 的图象.

分析:通常情况下的二次函数是不含绝对值的,此题需按 $x\geqslant 0$ 和 $x<0$ 分情况讨论.

解:当 $x\geqslant 0$ 时,$y=-\frac{1}{2}x^2+x-2$,

即 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{3}{2}$;

当 $x<0$ 时,$y=-\frac{1}{2}x^2-x-2$,

即 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{3}{2}$.

如图 1-2 所示.

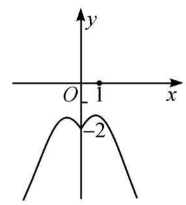


图 1-2

回味:含绝对值的函数为轴对称图形,由于 $x^2=|x|^2$,故原函数可以化为 $y=-\frac{1}{2}|x|^2+|x|-2$,即 y 关于 $|x|$ 的二次函数图象是关于 y 轴对称的.

小 结

对称是一种数学美,它体现了整体的和谐与平衡之美.抛物线是一种轴对称图形,请同学们在解题过程中积极捕捉和创造这种对称关系,以便从整体上把握问题.由抛物线捕捉对称信息的方式有以下两种:

(1)从抛物线上两点的纵坐标相等获得对称信息;

(2)从抛物线的对称轴方程与抛物线被 x 轴所截得的弦长获得对称信息.

训练场

1.填空题

(1)二次函数 $y=(x-2)(2x+1)$ 图象的顶点坐标是________,对称轴方程是________,与 x 轴的交点坐标为________,与 y 轴的交点坐标为________;当 $x=$________时,y 的最________值等于________,当________时,y 随 x 的增大而减小;当________时,$y>0$;当________时,$y<0$.

(2)把抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 向左平移 3 个单位长度,再向下平移 2 个单位长度,

得到的抛物线解析式为________.

(3)若抛物线 $y=ax^2$ 与 $y=2x^2+1$ 的形状相同,则 $a=$________.

(4)形状与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 相同,顶点为(1,2)的抛物线的解析式是____________.

解:(1) $y=(x-2)(2x+1)=2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)=2\left(x^2-\frac{3}{2}x-1\right)=2\left[x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-1\right]=2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$,

所以答案分别为 $\left(\frac{3}{4},-\frac{25}{8}\right)$,$x=\frac{3}{4}$,$\left(-\frac{1}{2},0\right)$和(2,0),(0,−2),$\frac{3}{4}$,小,$-\frac{25}{8}$,$x<\frac{3}{4}$,$x>2$ 或 $x<-\frac{1}{2}$,$-\frac{1}{2}<x<2$.

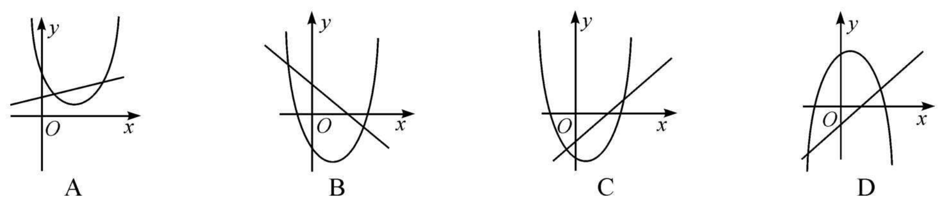
(2)抛物线的原顶点为(2,1),移动后变为(2−3,1−2),即(−1,−1),因此新抛物线为 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$.

(3)只要抛物线的开口大小相同,形状也就相同,抛物线的开口方向和所处位置可以不一致,所以 $a=\pm2$.

(4)因为抛物线的开口方向可以向上或向下,所以解析式为 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$,或 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$.

2.选择题

(1)已知函数 $y=ax+b$ 和 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$,那么它们的图象在同一象限内可以是(　　)



解:

	A	B	C	D
$y=ax+b$	$a>0,b>0$	$a<0$	$a>0,b<0$	$a>0$
$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$	$a>0,ab<0$	$a>0$	$a>0,ab<0$	$a<0$

由 a 的值可以排除 B、D,由对称轴可以排除 A,故选 C.

(2)若函数 $y=\begin{cases}x^2+2(x\leqslant2),\\2x(x>2),\end{cases}$ 则当 $y=8$ 时,自变量 x 的值是(　　)

A. $\pm\sqrt{6}$　　B. 4　　C. $-\sqrt{6}$或 4　　D. $\pm\sqrt{6}$或 4

解:把 $y=8$ 代入 $y=x^2+2$ 得 $8=x^2+2$,所以 $x^2=6$,所以 $x=\pm\sqrt{6}$.因为 $x\leqslant2$,所以 $x=-\sqrt{6}$.把 $y=8$ 代入 $y=2x$ 得 $x=4$,符合 $x>2$,综上所述,x 的值是$-\sqrt{6}$或 4,故选 C.

(3)把函数 $y=3x^2+6mx+n$ 的图象向左平移 2 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度，所得图象的函数解析式为 $y=3x^2+18x+26$，则 m,n 的值分别为(　　)

A. $-3,8$　　B. $1,8$　　C. $2,8$　　D. $1,-1$

解：$y=3x^2+18x+26=3(x^2+6x+3^2-9)+26=3(x+3)^2-1$，顶点为$(-3,-1)$. 反过来，将顶点$(3,-1)$向右平移 2 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度，得到新顶点$(-1,-4)$. $y=3x^2+6mx+n=3(x^2+2mx+m^2)-3m^2+n=3(x+m)^2-3m^2+n$，顶点为$(-m,-3m^2+n)$，所以$\begin{cases}-m=-1,\\-3m^2+n=-4,\end{cases}$所以$\begin{cases}m=1,\\n=-1,\end{cases}$故选 D.

(4)在直角坐标系中，若移动二次函数 $y=-2(x-2014)(x-2015)+8$ 的图象，使其与 x 轴交于两点，且这两点之间的距离为 1 个单位长度，则移动方式为(　　)

A. 向上移动 4 个单位长度　　B. 向下移动 4 个单位长度

C. 向上移动 8 个单位长度　　D. 向下移动 8 个单位长度

解：因为函数 $y=-2(x-2014)(x-2015)$ 与 x 轴交于$(2014,0)$和$(2015,0)$两点，两点之间的距离为 1，所以 $y=-2(x-2014)(x-2015)+8$ 向下平移 8 个单位长度即可. 故选 D.

3. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$，经过点$(3,-5)$，$(-1,-5)$，$(1,7)$，求此抛物线的解析式.

解：方法 1：设抛物线的解析式为 $y=a(x-3)(x+1)-5$，将$(1,7)$代入得 $7=-4a-5$，所以 $a=-3$，所以该抛物线的解析式为 $y=-3(x-3)(x+1)-5$.

方法 2：因为$(3,-5)$，$(-1,-5)$两点连线的中点为$\left(\frac{3-1}{2},-5\right)$，即$(1,-5)$，所以抛物线的对称轴为 $x=1$，设抛物线的解析式为 $y=a(x-1)^2+k$，将$(3,-5)$，$(1,7)$代入得$\begin{cases}-5=a(3-1)^2+k,\\7=a(1-1)^2+k,\end{cases}$所以$\begin{cases}a=-3,\\k=7,\end{cases}$所以该抛物线的解析式为 $y=-3(x-1)^2+7$.

方法 3：将三点坐标分别代入 $y=ax^2+bx+c$ 得$\begin{cases}-5=9a+3b+c,\\-5=a-b+c,\\7=a+b+c,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-3,\\b=6,\\c=4,\end{cases}$

所以该抛物线的解析式为 $y=-3x^2+6x+4$.

4. 已知抛物线方程为 $y=x^2-2x+5$.

(1)将抛物线向右平移________个单位长度后，图象经过点$(3,5)$；

(2)将抛物线向下平移________个单位长度后，图象经过点$(3,5)$；

(3)写出该抛物线关于 x 轴对称的抛物线的解析式：____________；

(4)写出该抛物线关于 y 轴对称的抛物线的解析式：____________；

(5)写出该抛物线关于原点成中心对称的抛物线的解析式：____________；

(6)写出该抛物线绕着顶点旋转 180°后得到的抛物线的解析式：____________；

(7)写出该抛物线绕着点$(5,0)$旋转 180°后得到的抛物线的解析式：____________.

(8)写出该抛物线绕着点$(3,1)$旋转 180°后得到的抛物线的解析式：____________.

解：将该抛物线化成顶点式：$y=(x-1)^2+4$，顶点为$(1,4)$.

(1)设向右平移 m 个单位长度，则解析式为 $y=(x-1-m)^2+4$，把$(3,5)$代入得 $5=$

$(3-1-m)^2+4$，即 $m-2=\pm 1$，所以 $m_1=3, m_2=1$. 所以将抛物线向右平移 3 个或 1 个单位长度，可使图象经过点(3,5).

(2)设向下平移 h 个单位长度，则解析式为 $y=(x-1)^2+4-h$，把(3,5)代入得 $5=(3-1)^2+4-h$，即 $h=3$，所以将该抛物线向下平移 3 个单位长度，可使图象经过点(3,5).

(3)因为原抛物线的顶点为(1,4)，关于 x 轴对称的顶点为(1,-4)，开口方向相反，所以解析式为 $y=-(x-1)^2-4$.

(4)因为原抛物线的顶点为(1,4)，关于 y 轴对称的顶点为(-1,4)，开口方向不变，所以解析式为 $y=(x+1)^2+4$.

(5)因为原抛物线的顶点为(1,4)，关于原点对称的顶点为(-1,-4)，开口方向相反，所以解析式为 $y=-(x+1)^2-4$.

(6)因为绕着顶点旋转 180°后得到的抛物线的顶点不变，开口方向相反，所以绕着顶点旋转 180°后得到的抛物线的解析式是 $y=-(x-1)^2+4$.

(7)顶点绕着点(5,0)旋转 180°后得到的点的横坐标为 $1+4+4=9$，纵坐标为 -4，且开口方向相反. 即顶点是(9,-4)，如图 1-3 所示，所以解析式为 $y=-(x-9)^2-4$.

(8)顶点绕着点(3,1)旋转 180°后得到的点的横坐标为 $1+2+2=5$，纵坐标为 $-(3-1)=-2$，且开口方向相反. 即顶点是(5,-2)，如图 1-4 所示，所以解析式为 $y=-(x-5)^2-2$.

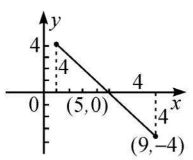


图 1-3

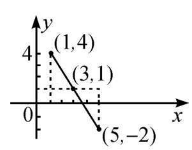


图 1-4

5. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的两个交点为 $A(-1,0)$，$B(5,0)$，与 y 轴的交点为 C，若△ABC 的面积为 12，求二次函数的解析式.

解：$AB=5-(-1)=6$，因为△ABC 的面积为 12，所以△ABC 的高为 4，即点 $C(0,4)$ 或 $C'(0,-4)$. 设二次函数的解析式为 $y=a(x+1)(x-5)$，由 $C(0,4)$ 得 $4=a(0+1)(0-5)$，所以 $a=-\frac{4}{5}$；由 $C'(0,-4)$ 得 $-4=a(0+1)(0-5)$，所以 $a=\frac{4}{5}$. 所以二次函数的解析式为 $y=\pm\frac{4}{5}(x+1)(x-5)$.

6. 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象如图 1-5 所示.

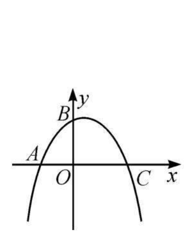


图 1-5

(1)判断 a, b, c, b^2-4ac 的符号；

(2)当 $OA=OB$ 时，求 a, b, c 所满足的关系.

解：(1)因为对称轴在 y 轴的右侧，所以 a, b 异号. 因为 $a<0$，所以 $b>0$. 因为点 B 在 y 轴的上方，所以 $c>0$. 因为抛物线与 x 轴有 2 个交点，所以 $b^2-4ac>0$.

(2)由图可知，点 A 所对应的是较小的一个根，为负值，且 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

因为 $a<0$，所以$\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，点 A 的横坐标为$\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<0$.

所以 $OA=\left|\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|=\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$OB=c$，

所以$\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=c$，$-\sqrt{b^2-4ac}=2ac-b$，

所以 $b^2-4ac=b^2-4abc+4a^2c^2$，$-1=-b+ac$，$ac-b+1=0$.

7.已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的图象如图 1-6 所示，有下列五个代数式：①$abc<0$，②$a+c>b$，③$4a+2b+c>0$，④$2c<3b$，⑤$a+b>m(am+b)$($m\neq 1$ 的实数)，其中正确的结论有(　　)

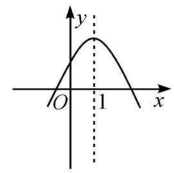


图 1-6

A. 2 个　　　　B. 3 个

C. 4 个　　　　D. 5 个

解：如图 1-6-1 所示，因为抛物线与 y 轴的交点在 y 轴正半轴上，所以 $c>0$.

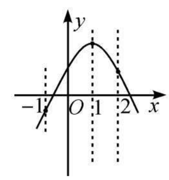


图 1-6-1

因为抛物线开口方向向下，所以 $a<0$. 因为对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=1$，所以 a，b 异号，且 $b=-2a$，所以①正确.

因为抛物线与 x 轴的交点到对称轴的距离为 d，且 $1<d<2$，

所以抛物线与 x 轴的两个交点的横坐标 x_1，x_2 的范围分别为 $-1<x_1<0$，$1<x_2<3$.

当 $x=-1$ 时，对应的纵坐标在 x 轴下方，所以 $a-b+c<0$，$a+c<b$，所以②错，

当 $x=2$ 时，对应的纵坐标在 x 轴上方，所以 $4a+2b+c>0$，所以③正确.

因为 $x=1$ 为顶点横坐标，对应的 $a+b+c$ 为最大值，所以 $a+b+c>am^2+bm+c(m\neq 1)$，即 $a+b>m(am+b)(m\neq 1)$，所以⑤正确.

因为 $b=-2a$，$a-b+c<0$，消去 a 得$-\frac{b}{2}-b+c<0$，即 $c<\frac{3}{2}b$，$2c<3b$，所以④正确.

综上所述，有 4 个结论正确.

8.已知点 A，B 的坐标分别为(1，4)和(4，4)，如图 1-7 所示，抛物线 $y=a(x-m)^2+n$ 的顶点在线段 AB 上运动，与 x 轴交于 C，D 两点(点 C 在点 D 的左侧). 若点 C 的横坐标的最小值为-3，则点 D 的横坐标的最大值为(　　)

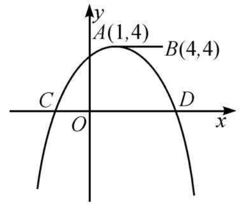


图 1-7

A. -3　　　　B. 1

C. 5　　　　D. 8

解：由顶点在线段 AB 上运动得 $n=4$，由点 C 的横坐标的最小值为-3，可知点$(-3,0)$在抛物线 $y=a(x-1)^2+4$ 上，代入得 $a=-\frac{1}{4}$，所以顶点在 B 处时函数解析式是 $y=-\frac{1}{4}(x-4)^2+4$. 当 $y=0$ 时，$0=-\frac{1}{4}(x-4)^2+4$，所以 $x=\pm 4+4$，即点 D 的横坐标的最大值为 8.

9. 求抛物线 $y=3x^2-6x+7$ 关于点(2,1)对称的抛物线的解析式.

解：将抛物线化为顶点式：$y=3(x-1)^2+4$，顶点 $P(1,4)$ 关于点(2,1)对称的点为 $P'(3,-2)$，如图 1-8 所示，且开口方向相反，所以抛物线的解析式为 $y=-3(x-3)^2-2$，即 $y=-3x^2+18x-29$.

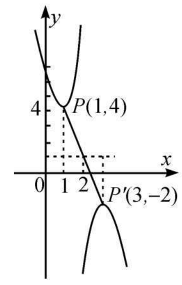


图 1-8

10. 将函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象绕 y 轴翻转 180°，再绕 x 轴翻转 180°，所得函数图象所对应的解析式为______________.

解：函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象关于 y 轴对称的函数是 $y=ax^2-bx+c$（即用 $-x$ 代替 x），而函数 $y=ax^2-bx+c$ 的图象关于 x 轴对称的函数是 $y=-ax^2+bx-c$（即用 $-y$ 代替 y），所以所求函数的解析式为 $y=-ax^2+bx-c$.

11. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 y 轴交于点 $Q(0,1)$，与 x 轴交于 M,N 两点，M,N 两点的横坐标的平方和为 6，函数图象的顶点 P 在 x 轴的上方，且 $S_{\triangle MQN}:S_{\triangle MPN}=1:2$，求此二次函数的解析式.

解：因为顶点 P 在 x 轴的上方，与 x 轴交于 M,N 两点，所以抛物线的开口方向向下，即 $a<0$.

因为点 $Q(0,1)$ 在抛物线上，所以 $c=1$，$y=ax^2+bx+1$，顶点为 $P\left(-\frac{b}{2a},\frac{4a-b^2}{4a}\right)$，

所以点 P 到 x 轴的距离为 $\frac{4a-b^2}{4a}$.

设 $M(x_1,0)$，$N(x_2,0)$，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{1}{a}$.

因为 $x_1^2+x_2^2=6$，所以 $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=6$，

即 $\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\times\frac{1}{a}=6$，$6a^2+2a-b^2=0$　　①.

因为 $\frac{S_{\triangle MQN}}{S_{\triangle MPN}}=\frac{\frac{1}{2}MN\cdot 1}{\frac{1}{2}MN\cdot\frac{4a-b^2}{4a}}=\frac{4a}{4a-b^2}=\frac{1}{2}$　　②，

由①、②两式解得 $a=-1$，$b=\pm 2$，所以此二次函数的解析式为 $y=-x^2\pm 2x+1$.

12. 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+bx-2$ 与 x 轴交于 A,B 两点，与 y 轴交于 C 点，D 是顶点，其中 $A(-1,0)$，$M(m,0)$ 是 x 轴上的动点. 当 $MC+MD$ 值最小时，求 m 的值.

解：如图 1-9 所示，将 $A(-1,0)$ 代入 $y=\frac{1}{2}x^2+bx-2$ 得 $0=\frac{1}{2}-b-2$，

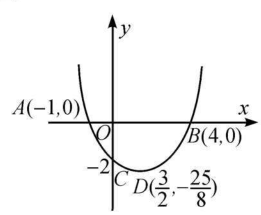


图 1-9

所以 $b=-\frac{3}{2}$，抛物线方程为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$，$C(0,-2)$.

即 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2=\frac{1}{2}(x^2-3x-4)=\frac{1}{2}(x-4)(x+1)$，

所以 $B(4,0)$，对称轴为直线 $x=\frac{-1+4}{2}=\frac{3}{2}$.

当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$y=\frac{1}{2}(x-4)(x+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-4\right)\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-5}{2}\cdot\frac{5}{2}=-\frac{25}{8}$，

所以 $D\left(\frac{3}{2},-\frac{25}{8}\right)$.

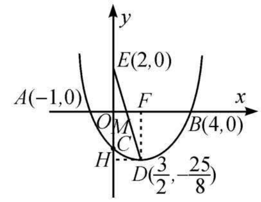


图 1-9-1

方法 1：如图 1-9-1 所示，作点 $C(0,-2)$ 关于 x 轴的对称点 $E(0,2)$，过点 D 作 $DH\perp y$ 轴于点 H，连结 DE，DE 与 x 轴的交点即为点 M，

则 $\frac{OE}{EH}=\frac{OM}{HD}$，$DH=\frac{3}{2}$，$EH=2+\frac{25}{8}=\frac{41}{8}$，$OE=2$，$OM=m$，

所以 $\frac{2}{\frac{41}{8}}=\frac{m}{\frac{3}{2}}$，$\frac{41}{8}m=\frac{3}{2}\times 2$，所以 $m=\frac{24}{41}$.

方法 2：设直线 DE 的解析式是 $y=kx+2$，因为 $D\left(\frac{3}{2},-\frac{25}{8}\right)$ 在直线 DE 上，

所以 $-\frac{25}{8}=\frac{3}{2}k+2$，解得 $k=-\frac{41}{12}$，

所以直线 DE 的解析式是 $y=-\frac{41}{12}x+2$，

把 $M(m,0)$ 代入得 $0=-\frac{41}{12}m+2$，所以 $m=\frac{24}{41}$.

13. 将抛物线 $y=-2x^2-1$ 向上平移若干个单位长度，使抛物线与坐标轴有三个交点，如果这些交点能构成直角三角形，那么平移的距离为________.

解：方法 1：设向上平移后的解析式为 $y=-2x^2+m$，则抛物线与坐标轴的三个交点组成等腰直角三角形，坐标分别为 $A(0,m)$，$B(m,0)$，$C(-m,0)$，其中 $m>0$，$\angle BAC=90^\circ$，

$y=-2x^2+m=-2(x+m)(x-m)=-2(x^2-m^2)$，即 $m=2m^2$，解得 $m=0$ 或 $m=\frac{1}{2}$.

因为 $m>0$，所以平移后的抛物线方程为 $y=-2x^2+\frac{1}{2}$.

因为是从抛物线 $y=-2x^2-1$ 平移到 $y=-2x^2+\frac{1}{2}$，所以平移的距离为 $\frac{3}{2}$.

方法 2：设平移后的解析式为 $y=-2x^2+m$.

因为 $OA^2=OB\cdot OC$，其中 $OB\cdot OC=|x_1x_2|=\left|\frac{m}{-2}\right|=\frac{m}{2}$，而 $OA=m$，

所以 $m^2=\frac{m}{2}$，$m=0$ 或 $m=\frac{1}{2}$.

因为 $m>0$，所以 $y=-2x^2+\frac{1}{2}$.

因为是从抛物线 $y=-2x^2-1$ 平移到 $y=-2x^2+\frac{1}{2}$，所以平移的距离为 $\frac{3}{2}$.

14. 如图 1-10 所示，在平面直角坐标系中，某二次函数的图象经过点 $A(1,0)$，$B(3,0)$，设这个二次函数的顶点为 D，与 y 轴交于点 C，它的对称轴与 x 轴交于点 E，连结 AD，DE，DB 和 AC，当 $\triangle AOC$ 与 $\triangle DEB$ 相似时，求这个二次函数的解析式.

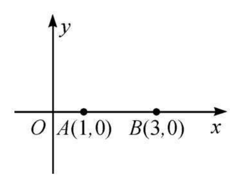


图 1-10