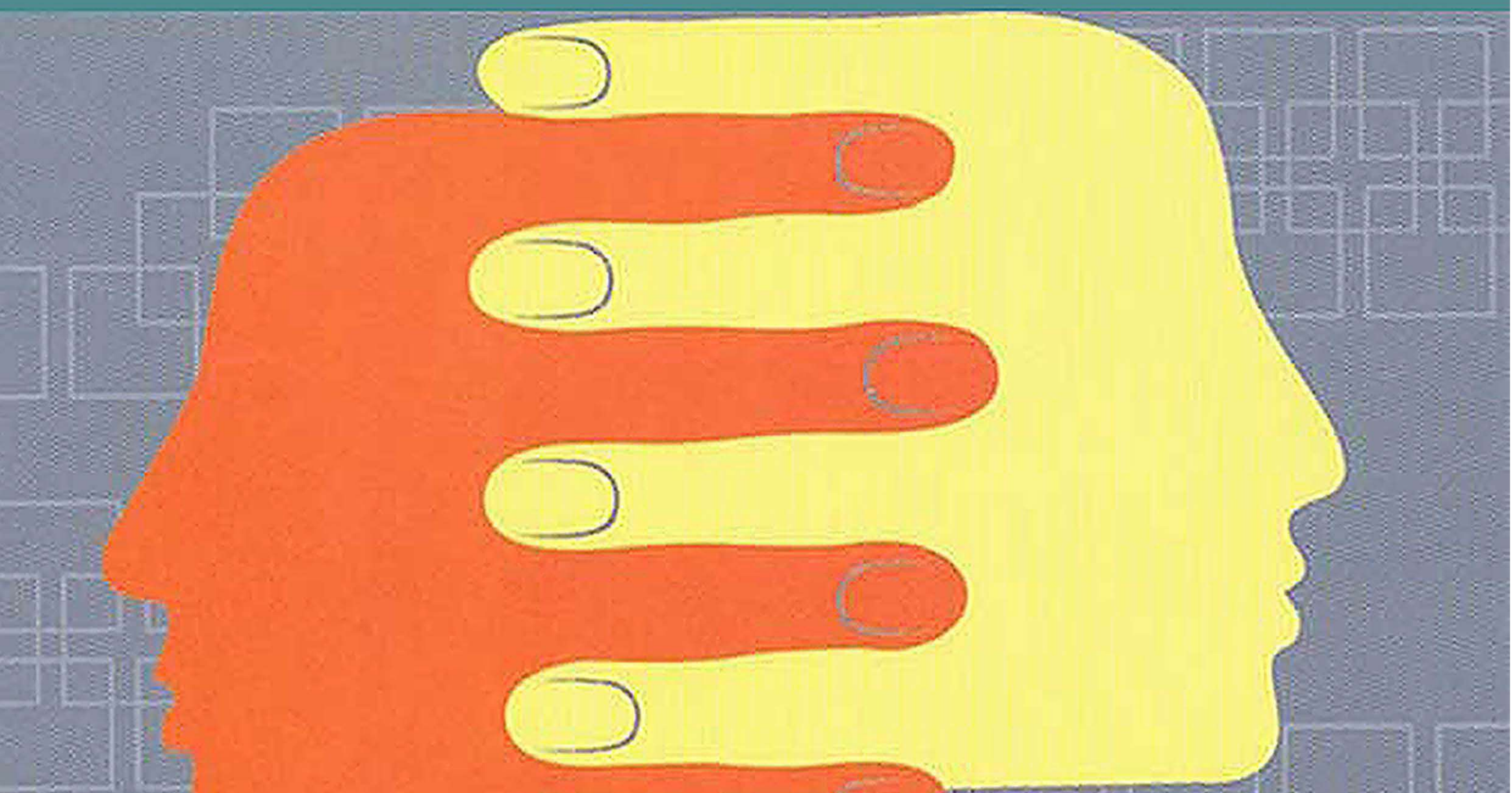
经济应用数学

涂　青　赵　欢　主编



北京邮电大学出版社

经济应用数学

主　审　李贤瑜
主　编　涂　青　赵　欢
副主编　刘晓春　戴新财
编　者　赵　慧　曹海勇　陈嘉兴　郑莉莉
　　　　陈园园　乐志峰　刘云珠

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内容简介

本书是高等院校金融和经济管理类各专业经济数学基础课教材。全书共分14章，内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、行列式、矩阵、线性方程组、事件与古典概型、随机变量的分布及数字特征、极限定理、统计推断。全书例题、习题丰富，节末配有适当的练习题，章后配有复习题，与正文密切配合。书中还相应介绍了三个数学模型案例，展示了所学知识在实际问题中的应用。

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学 / 涂青，赵欢主编. -- 北京 ：北京邮电大学出版社，2017.10

ISBN 978-7-5635-5235-1

Ⅰ.①经… Ⅱ.①涂… ②赵… Ⅲ.①经济数学－高等学校－教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第197174号

书　　名：经济应用数学
著作责任者：涂　青　赵　欢　主编
责 任 编 辑：满志文
出 版 发 行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路10号(邮编:100876)
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：20
字　　数：524千字
版　　次：2017年10月第1版　2017年10月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-5235-1　　　　定　价：45.00元

· 如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

前　言

经济应用数学是高等学校财经类、管理类和商务类等专业的一门重要专业基础理论课程.本着“强化应用,培养能力”为目的,和“以应用为目的,以够用为度”为原则,体现“数学为本,经济为用”的经济数学特点,更加有利于应用型人才的培养.在总结多年的经济数学教学实践经验的基础上编写而成.可作为高等专科(高职)经济类文科各专业的教材外,也可作为专科各层次成人教育和专业技术干部培训及自学辅导教材.

本书分为微积分、线性代数、概率论与数理统计三大部分,共十四章.主要内容包括:函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、行列式、矩阵、线性方程组、事件与古典概型、随机变量的分布及数字特征、极限定理、统计推断.

本书的特色主要反映在以下几个方面:

(1) 以实用和够用为原则,在保持大学数学知识体系的完整性的基础上,淡化了理论方面的定理论证,强化实例说明,降低了知识难度,缩减了学习内容,以适应文科专业学生的数学基础和需求.

(2) 注重数学的实际应用.结合多年的教学经验,在数学体系的基础上,引入大量经济函数和数学模型,将经济理论和数学方法有机结合.强化应用数学知识解决实际问题的能力训练,为学习后继经济管理课程奠定必要的数学基础.

(3) 课后习题由浅入深,并配套了《经济应用数学学习辅导与习题全解》,供教师和学生参考.每章都配有复习题,能更好地检验学生当前章节的总体学习情况.

本书主审为原江西师范大学校长、硕士生导师李贤瑜教授,审定了编写大纲和各章内容.主编为涂青、赵欢,编写了教材编写大纲和各章内容.副主编为刘晓春、戴新财,拟定了各章编写计划.赵慧编写了第1章,赵欢编写了第2章、第10章和案例教学2,涂青编写了第3章、第4章和案例教学1,曹海勇编写了第5章,刘晓春编写了第6章、第14章和案例教学3,戴新财编写了第7章,陈嘉兴编写了第8章,郑莉莉编写了第9章,陈园园编写了第11章,乐志峰编写了第12章,刘云珠编写了第13章.书稿由涂青、赵欢、刘晓春、戴新财修改审核,由涂青定稿.

本书在编写过程中,王克美老师提出了许多宝贵意见,参阅了有关的文献和教材,在此一并表示感谢.限于编者的水平,如有不足之处,敬请批评指正.

编　者

2017 年 3 月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章

函　数

本章目标

函数是微积分学的关键概念,没有函数,就没有微积分学.深刻理解函数的定义,掌握函数定义域的求法;了解函数的表示法;理解反函数、复合函数、分段函数以及邻域的概念;熟练掌握函数四种特性的判断方法;熟练掌握基本初等函数及其图形,并了解初等函数的定义;了解几种常用的经济函数.

1.1　函数的概念

一、集合的概念

1. 集合

集合是指具有某种特定性质的事物的总体.例如,某班全体同学,整数的全体,方程 $x^2-5x+6=0$ 的所有根,直线 $x-y=0$ 上所有的点等,都分别组成一个集合.组成集合的事物称为该集合的元素,通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素,如果 a 是集合 A 中的元素,就说 a 属于 A,记作 $a\in A$,如果 a 不是集合的元素,就说 a 不属于 A,记作 $a\notin A$.含有有限个元素的集合,称为有限集,否则称为无限集.

2. 集合的表示法

表示集合的方法通常有两种.

(1) 列举法:按任意顺序列出集合的所有元素,并用花括号{ }括起来.

例如:小于 10 的正偶数组成的集合可表示成 $A=\{2,4,6,8\}$.

用列举法表示集合时,必须列出集合的所有元素,不能遗漏和重复.

(2) 描述法:若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体组成的,则可表示成$M=\{x\,|\,x\text{ 具有性质 }P\}$.

例如:$A=\{2,4,6,8\}$ 也可表示成 $A=\{x\,|\,x\text{ 是小于 10 的正偶数}\}$.又如:$C=\{x\,|\,x^2-5x+6=0\}$表示由方程 $x^2-5x+6=0$ 的根所组成的集合.

习惯上,全体非负整数即自然数的集合记作 $\boldsymbol{N}$,即

$$\boldsymbol{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

全体正整数的集合为

$$\boldsymbol{N}^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

全体整数的集合记作 $\boldsymbol{Z}$,即

$$\boldsymbol{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

全体有理数的集合记作 $\boldsymbol{Q}$，即

$$\boldsymbol{Q}=\{\frac{p}{q}|p\in\boldsymbol{Z},\ q\in\boldsymbol{N}^+\text{ 且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\}$$

全体实数的集合记作 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}^*$ 为排除数 0 的实数集，$\boldsymbol{R}^+$ 为全体正实数的集合.

3. **子集**

设 A、B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$（读作 A 包含于 B），或 $B\supset A$（读作 B 包含 A）.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$，例如，设 $A=\{2,3\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，则 $A=B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneq B$，例如 $\boldsymbol{N}\subsetneq\boldsymbol{Z}\subsetneq\boldsymbol{Q}\subsetneq\boldsymbol{R}$.

不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$，例如 $\{x|x\in\boldsymbol{R}\text{ 且 }x^2+1=0\}$ 是空集.

规定空集是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing\subset A$.

二、集合的运算

集合的最基本的运算是并、交、差，这如同数与数之间有加、减、乘、除等各种运算一样，集合与集合之间也有一些特定的运算及运算规律.

设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x|x\in A\quad\text{或 }x\in B\}$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x|x\in A\text{ 且 }x\in B\}$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成集合，称为 A 与 B 的差集，记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x|x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$$

例 1　设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{3,4,5,6,7\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$$
$$A\cap B=\{3,4,5\}$$

例 2　设 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|x>0\}$，则

$$A\cup B=\{x|x\geqslant -1\}$$
$$A\cap B=\{x|0<x\leqslant 1\}$$

例 3　如果 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,5\}$，则

$$A\backslash B=\{2,3,4\}$$

集合的运算满足如下运算律：

设 A、B、C 为任意三个集合，则有下列法则成立：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) 对偶律　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

注意：根据逻辑“且”“或”“非”的运算关系，可以得出集合“交”“并”“补”存在一一对应的关系.

三、区间和邻域

1. 区间

区间是用得较多的一类数集,设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$.

(1) 开区间 $(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$.

(2) 闭区间 $[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$.

(3) 半开区间 $[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$. 三类区间为有限区间,右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$ 称为区间的长,还有下面几类无限区间:

(4) $(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$.

(5) $(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$.

(6) $(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}$. 此区间表示全体实数的集合.

此处,"$+\infty$"(读作正无穷大),"$-\infty$"(读作负无穷大)是引用的符号,不是数.

以后在不需要辨明区间是否包含端点,是否有限或无限,常将其简称为区间,且常用大写字母 I 表示.

2. 邻域

邻域也是一个经常用到的概念,设 a 与 δ 是两个实数且 $\delta>0$,数集 $\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域,记为 $\cup(a,\delta)$,即

$$\cup(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}$$

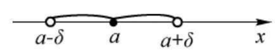


图 1-1

其中点 a 为该邻域的中心,δ 为该邻域的半径,如图 1-1 所示.

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$,因此 $\cup(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$.

例如,(1) $|x-5|<0.5$,即以点 $x_0=5$ 为中心,以 0.5 为半径的邻域,也就是开区间 $(4.5,5.5)$.

(2) $\cup(1,2)=\{x\,|\,|x-1|<2\}$ 表示以点 $x_0=1$ 为中心,以 2 为半径的邻域,也就是开区间 $(-1,3)$ 若把邻域 $\cup(a,\delta)$ 的中心去掉,所得的邻域称为点 a 的去心 δ 邻域,记为 $\mathring{\cup}(a,\delta)$,即

$$\mathring{\cup}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$$

一般地,以 a 为中心的任何开区间均是点 a 的邻域,当不需要特别辨明邻域的半径时,可简记为 $\cup(a)$.

例如,$0<|x-1|<2$,即以点 $x_0=1$ 为中心,以 2 为半径的空心邻域 $(-1,1)\cup(1,3)$.

四、函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型. 在某一自然现象或社会现象中,往往同时存在着多个不断变化的量(变量),这些变量并不是孤立的,而是相互联系并遵循一定的规律,函数就是描述这种联系的一种法则.

例如,生产某种产品的固定成本为 6 800 元,每生产一件产品,成本增加 90 元,那么该种产品的总成本 y 与产量 x 之间的相依关系由公式

$$y=90x+6\,800$$

给定,当产量 x 取任何一个合理的值时,成本 y 有相应的数值与之对应.

1. 函数的定义

定义 1 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集. 如果对于任何 $x\in D$,按照一定的对应法则 f 都有唯一确定的 y 值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y=f(x),x\in D$$

式中,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,数集 D 称为这个函数的**定义域**,也记为 D_f,即 $D_f=D$. 对 $x_0\in D$,按照对应法则 f,总有唯一确定的值 y_0 与之对应,称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记为 $f(x_0)$. 因变量与自变量的这种相依关系通常称为**函数关系**.

当自变量 x 取遍 D 的所有数值时,对应的函数值 $f(x)$ 的全体组成的集合称为函数的值域,记为 R_f,即

$$R_f=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

注意:①函数的定义域和对应法则称为函数的两个要素. 两个函数为同一函数的充分必要条件是它们的定义域和对应法则均相同.

②关于函数的定义域. 在实际问题中根据实际意义具体确定,如果讨论的是纯数学问题,则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所组成的集体作为该函数的定义域,这种定义域又称为函数的自然定义域.

例 4 已知 $f(x)=x^2-1,\varphi(x)=\sin x$,求 $f[\varphi(x)],\varphi[f(x)]$.

解:$f[\varphi(x)]=\sin^2x-1=-\cos^2x$

$\varphi[f(x)]=\sin(x^2-1)$.

例 5 下列各对函数是否相同,为什么?

(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{x},p(x)=x$;

(2) $f(x)=x,p(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\lg x^2,p(x)=2\lg x$;

(4) $f(x)=\sqrt{x},p(t)=\sqrt{t}$.

解:(1) 不相同,因为定义域不同,$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $p(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$;

(2) 不相同,因为对应法则不同,$f(x)=x,p(x)=|x|$;

(3) 不相同,因为定义域不同,$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $p(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$;

(4) 相同,定义域和对应法则都相同.

例 6 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\dfrac{3}{5x^2+2x}$;

(2) $f(x)=\sqrt{x+3}+\ln(x-2)$;

(3) $f(x)=\lg(4x-3)-\arcsin(2x-1)$.

解:(1) 在分式 $\dfrac{3}{5x^2+2x}$ 中,分母不能为零,所以 $5x^2+2x\neq0$,解得 $x\neq-\dfrac{2}{5}$ 且 $x\neq0$,即定义域为 $(-\infty,-\dfrac{2}{5})\cup(-\dfrac{2}{5},0)\cup(0,+\infty)$.

(2) 该函数的定义域应满足不等式组

$$\begin{cases}x+3\geqslant0\\x-2>0\end{cases}$$

解得 $x>2$,即定义域为 $(2,+\infty)$.

(3) 该函数的定义域应满足不等式组

$$\begin{cases} 4x-3>0 \\ |2x-1|\leqslant 1 \end{cases}$$

解此不等式组,得其定义域为$\frac{3}{4}<x\leqslant 1$,即$\left(\frac{3}{4},1\right]$.

在函数的定义中,对每个 $x\in D$,对应的函数值 y 总是唯一的,这样定义的函数称为单值函数,否则称为多值函数.

例如,方程 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 在闭区间 $[-a,a]$ 上确定了一个以 x 为自变量,y 为因变量的函数,对每个 $x\in(-a,a)$,都有 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$两个值相对应,因此 y 为多值函数.

注意: 今后若无特殊说明,函数均指单值函数.

2. 函数的表示法

函数的常用表示法有三种,分别为:

表格法. 用一个表格反映两个变量之间的函数关系.

图形法. 用坐标系中的图形反映两个变量之间的函数关系.

公式法(解析法). 将两个变量之间的关系用数学表达式(又称解析表达式)来表示的方法,根据函数的解析表达式的形式不同,函数也可分为显函数、隐函数和分段函数三种.

(1) 显函数: 函数 y 由关于 x 的解析式直接表示,例如,$y=2x^2+x-1$.

(2) 隐函数: 由方程 $F(x,y)=0$ 来确定函数中自变量 x 与因变量 y 的对应关系,例如,$e^{xy}=1+\sin(x+y)$.

(3) 分段函数: 函数在其定义域的不同范围内,具有不同的解析表达式.

以下为几种典型的分段函数:

例 7　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $R_f=[0,+\infty)$,图形如图 1-2 所示.

例 8　符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $R_f=\{-1,0,1\}$,图形如图 1-3 所示.

例 9　取整函数

$$y=[x]$$

式中$[x]$表示不超过 x 的最大整数,例如$[\pi]=3$,$[-2.3]=-3$,$[\sqrt{3}]=1$. 易见,取整函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $R_f=\mathbf{Z}$,其图形如图 1-4 所示.

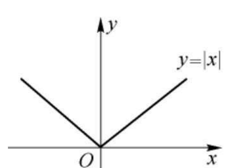


图 1-2

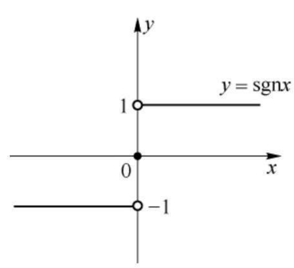


图 1-3

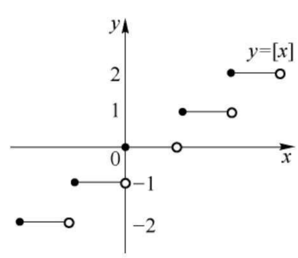


图 1-4

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

例 10 某化肥厂生产某种产品 1 000 吨，每吨定价为 130 元，销售量在 700 吨以下时，按原价出售，超过 700 吨时，超出部分打九折出售，试将销售总收益与总销售量的函数关系用数学表达式表出.

解: 根据题意，可列出函数关系如下:

$$y=\begin{cases}130x & (0\leqslant x\leqslant 700)\\ 130\times 700+130\times 0.9(x-700) & 700<x\leqslant 1\,000\end{cases}$$

习题 1-1

1. 用描述法表示下列集合:

(1) 不大于 10 的全体实数的集合;

(2) 直线 $y=3-x$ 与直线 $y=x+1$ 的交点的集合;

(3) 点 5 的去心$\frac{1}{2}$邻域.

2. 设 $A=\{x|0\leqslant x<3\}$, $B=\{x|x\leqslant 3\}$，求

(1) $A\cup B$;　　(2) $A\cap B$.

3. 设 $M=\{x|x-1\leqslant 0\}$，$N=\{x|x^2+x-2<0\}$求

(1) $M\cup N$;　　(2) $M\cap N$.

4. 设 $A=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，$B=[-5,2)$，求

(1) $A\cup B$;　　(2) $A\cap B$;　　(3) $A\backslash B$.

5. 下列各对函数中，哪些是同一函数? 哪些不是?

(1) x 与$(\sqrt{x})^2$;　　(2) $y=\sqrt{x}\sqrt{1-x}$与 $\sqrt{x(1-x)}$;　　(3) x 与 $\ln e^x$;

(4) $\sqrt{x}$与 $2^{\frac{1}{2}\log_2 x}$;　　(5) $\frac{1}{x+1}$与$\frac{x-1}{x^2-1}$;　　(6) x 与 $\sin(\arcsin x)$.

6. 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$;　　(2) $y=\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{x^2-x}$;

(3) $y=\frac{\lg(3+x)}{\sqrt{x-1}}$;　　(4) $y=\frac{1}{x-1}+\arccos x$;

(5) $y=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ \sqrt{3-x}, & 0<x<2\end{cases}$;　　(6) $y=\sqrt{\sin x}$.

7. (1) 若 $f(x)$ 的定义域是$[-2,2]$，求 $f(x^2)$ 的定义域.

(2) 若 $f(x)$ 的定义域是$(0,1)$，求 $f(\ln x)$的定义域.

8. 设 $f(x)=\arcsin(\lg x)$，求 $f(10^{-1})$，$f(1)$，$f(10)$.

1.2 函数的特性

一、单调性

有时想了解函数 $f(x)$ 随 x 变化的大概情况，是随 x 的增大而增大还是相反的情形? 于是

需要引入单调性的定义.

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,对于任意的 $x_1, x_2 \in I$,若当 $x_1 < x_2$ 时,都有 $f(x_1) < f(x_2)$ 成立,则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**,区间 I 称为**单调增区间**;若当 $x_1 < x_2$ 时,都有 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立,则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**,区间 I 称为**单调减区间**,单调增区间和单调减区间统称为**单调区间**.

单调增加的函数的图像是一条沿着 x 轴正向上升的曲线,如图 1-5 所示;单调减少的函数的图像是一条沿着 x 轴正向下降的曲线,如图 1-6 所示.

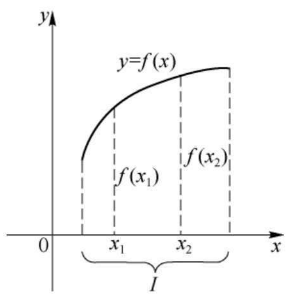


图 1-5

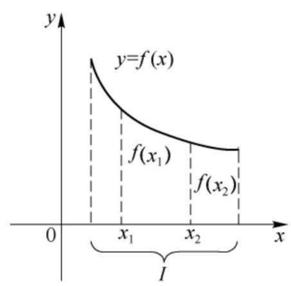


图 1-6

例 1　判断函数 $y=\sqrt{x}$ 的单调性.

解:函数定义域为 $[0,+\infty)$,任取两数 $x_1, x_2 \in [0,+\infty)$,若 $x_1 < x_2$,则 $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$,因此,$y=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加.

例 2　判断函数 $y=x^2$ 的单调性.

解:设 $y=f(x)=x^2$,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$,任取两数 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$,若 $x_1 < x_2$,$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)$.

由于 $x_1, x_2 < 0$,$x_1 < x_2$,所以 $(x_1-x_2) < 0$,$(x_1+x_2) < 0$,于是 $f(x_1)-f(x_2) > 0$,由单调减少的定义知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少.

类似地,可得出 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

二、奇偶性

在 $f(x)$ 的定义域 D 内,是否由一部分区间内的情况就可推知 $f(x)$ 在整个定义域内的情况呢?具有某些性质的函数就可做到这点,满足下面定义的函数就可由 $x<0$ 时函数的情况推知 $x>0$ 时函数的情况.

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对于任意 $x \in D$,都有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立,则称 $f(x)$ 为**奇函数**;若对于任意 $x \in D$,都有

$$f(-x)=f(x)$$

成立,则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

对于奇函数,因 $f(-x)=-f(x)$,所以如果点 $Q(x, f(x))$ 在图形上,则与它关于原点对称的点 $Q'(-x,-f(x))$ 也在此图形上. 因此,奇函数的图形关于原点对称,如图 1-7 所示.

对于偶函数,因 $f(-x)=f(x)$,所以如果点 $P(x, f(x))$ 在图形上,则与它关于 y 轴对称的

点 $P'(-x,f(x))$ 也在此图形上. 因此,偶函数的图形关于 y 轴对称,如图 1-8 所示.

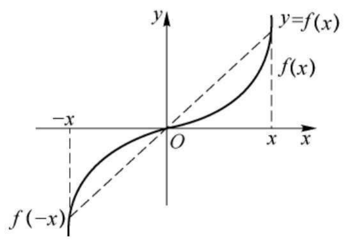


图 1-7

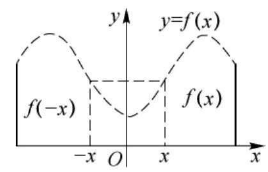


图 1-8

例 3 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^2\cos x$; (2) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$;

(3) $f(x)=x^3+1$; (4) $f(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x\leqslant 0\\ \mathrm{e}^x-1, & x>0\end{cases}$.

解: (1) 由于 $f(-x)=(-x^2)\cos(-x)=x^2\cos x=f(x)$,故 $f(x)=x^2\cos x$ 是偶函数;

(2) 由于 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=-f(x)$,故 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$是奇函数;

(3) 由于 $f(-x)=-(x)^3+1=-x^3+1$,故 $f(x)=-x^3+1$ 是非奇非偶函数;

(4) 由于 $f(-x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-(-x)}, & -x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-x}-1, & -x>0\end{cases}=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{x}, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-x}-1, & x<0\end{cases}=\begin{cases}-(\mathrm{e}^{x}-1), & x>0,\\ -(1-\mathrm{e}^{-x}), & x\leqslant 0\end{cases}=-f(x)$,故$f(x)$是奇函数

例 4 设 $f(x)$,$g(x)$ 都是 $[-a,a]$ 上的偶函数,证明 $f(x)+g(x)$ 也是 $[-a,a]$ 上的偶函数.

证明: 设 $\varphi(x)=f(x)+g(x)$,则

$$\varphi(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=\varphi(x)$$

$\varphi(x)$ 满足偶函数的定义,故是偶函数.

用类似的方法可证明下列结论:

设所考虑的函数都在 $[-a,a]$ 上有定义,则

(1) 两个偶函数之和、之积为偶函数;

(2) 两个奇函数之和为奇函数,之积为偶函数;

(3) 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.

常见函数有奇函数,有偶函数,也有的即非奇函数也非偶函数,例如,$f(x)=x^4+x^2+1$,$f(x)=\sqrt{1-x^2}$,$f(x)=|x|$,$f(x)=\sqrt[3]{x^2}$,$f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$,$f(x)=\cos x$,$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$等皆为偶函数;$f(x)=\sqrt[3]{x}$,$f(x)=\sin x$,$f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$,$f(x)=x\cos x$ 等皆为奇函数;而 $f(x)=x^3+x^2$,$f(x)=\lg x$,$f(x)=\sin x+\cos x$ 等皆为非奇非偶函数.

三、有界性

有时候,想要对函数 $f(x)$ 在定义域 D 上的取值有一个“概貌”,即要了解 $f(x)$ 的取值是否

在一个有限范围内，于是引入了有界性的定义.

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在正数 M，使得对于区间 I 内所有 x，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上**有界**或称 $f(x)$ 是 I 上的**有界函数**，如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 I 上**无界**或称 $f(x)$ 是 I 上的**无界函数**.

例如，$f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为对任何实数 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$；而 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 内无界，在 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ 内有界.

例 5　证明函数 $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ 是有界函数.

证明：$y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且 $|y|=\left|\dfrac{x^2}{x^2+1}\right|=\dfrac{x^2+1-1}{x^2+1}=1-\dfrac{1}{1+x^2}<1$.

因此，$y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ 是有界函数.

四、周期性

满足下面定义的函数可由在部分定义域 $[0,T]$ 内的情况反映出它在整个定义域内的情况.

定义 4　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个正数 T，使得对于任意 $x\in D$，有 $(x+T)\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的**周期**，通常就说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

例 6　设函数 $f(x)$ 是以 $T(T>0)$ 为周期的周期函数，证明 $f(ax)\ (a>0)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

证明：　依题意，$f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，所以有

$$f(ax+T)=f(ax)$$

因此，有

$$f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax+T)=f(ax)$$

即是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

根据例 6，我们可知 $\sin kx$ 和 $\cos kx$ 以 $\dfrac{2\pi}{|k|}$ 为周期；$\tan kx$ 和 $\cot kx$ 以 $\dfrac{\pi}{|k|}$ 为周期. 例如，$y=\sin\dfrac{3}{2}x$ 是以 $\dfrac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\dfrac{4}{3}\pi$ 为周期的周期函数，$\tan(-2x)$ 是以 $\dfrac{\pi}{|-2|}=\dfrac{\pi}{2}$ 为周期的周期函数.

例 7　求函数 $f(x)=\cos^4x-\sin^4x$ 的周期.

解：$f(x)=\cos^4x-\sin^4x=(\cos^2x-\sin^2x)(\cos^2x+\sin^2x)=\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$

因为 $\cos x$ 的周期是 2π，所以 $\cos 2x$ 的周期是 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

因此，$f(x)=\cos^4 x-\sin^4 x$ 的周期为 π.

习题 1-2

1. 讨论下列函数的单调性:

(1) $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$;　　(2) $y=2-\ln x$;

(3) $y=2^x$;　　(4) $y=(x-1)^2$.

2. 判断下列函数的奇偶数:

(1) $f(x)=x^4-2x^2$;　　(2) $h(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$;

(3) $f(x)=\sin x+\cos x$;　　(4) $g(x)=x(x-1)(x+1)$;

(5) $F(x)=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;　　(6) $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ 1+x, & x\geqslant 0\end{cases}$.

3. 判断下列函数在所给定区间上的有界性:

(1) $y=x^2(-\infty,+\infty)$;　　(2) $y=\cos x(-\infty,+\infty)$;

(3) $y=\ln x(0,+\infty)$;　　(4) $y=\dfrac{1}{x+1}[0,1]$;

(5) $y=\tan x\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$;　　(6) $y=\sin\dfrac{1}{x}(0,+\infty)$.

4. 下列各函数中，哪些是周期函数? 对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos 2x$;　　(2) $y=\sin^2 x$;　　(3) $y=x\sin x$;

(4) $y=\sin x+\cos x$　　(5) $y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(6) $y=\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$.

5. 已知 $f(x)$ 是周期为 1 的周期函数，在 $[0,1)$ 上 $f(x)=x^2$，求 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的表达式.

1.3 初等函数

一、反函数

函数关系的实质就是从定量分析的角度来描述运动过程中变量之间的相互依赖关系. 但在研究过程中，哪个量作为自变量，哪个量作为因变量(函数)是由具体问题来决定的.

例如，某种商品的单价为 p，销售量为 x，则对收入 y 有: $y=Px$. 这时 x 是自变量，y 是 x 的函数. 若已知收入 y，反过来求销售量 x，则有 $x=\dfrac{y}{P}$. 这时 y 是自变量，x 变成 y 的函数了.

上面的两个式子是同一关系的两种写法，但从函数的角度来看，由于对应法则不同，它们是两个不同的函数，一般称它们互为**反函数**.

定义 1　设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的函数，其值域为 R_f. 若对于数集 R_f 中的每个数 y，数集 D 中都有唯一的一个数 x，使 $f(x)=y$，这就是说变量 x 是变量 y 的函数，这个函数称为$y=f(x)$

的**反函数**,记为 $x=f^{-1}(y)$,其定义域为 R_f,值域为 D_f.

函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 两者的图形是相同的.

由于人们习惯于用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因此,我们将函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 用 $y=f^{-1}(x)$ 表示. 注意,这时两者的图形关于直线 $y=x$ 对称,如图 1-9 所示.

由函数 $y=f(x)$ 求它的反函数的步骤是: 由方程 $y=f(x)$ 解出 x,得到 $x=f^{-1}(y)$;将函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 和 y 分别换为 y 和 x,这样,得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

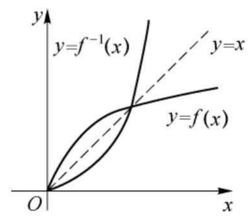


图 1-9

例 1　求函数 $y=\dfrac{2x}{x-1}$ 的反函数.

解: 由原式解得 $x=\dfrac{y}{y-2}$,把 x 和 y 分别换为 y 和 x,即得所求的反函数

$$y=\frac{x}{x-2}$$

二、基本初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数是六类基本初等函数. 由于在中学数学中,已经深入学习过这些函数,这里只作简要介绍.

1. 常值函数

常值函数 $y=c$,定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为单点集 $\{c\}$. 它的图像是平行于 x 轴的直线,如图 1-10 所示.

2. 幂函数

幂函数 $y=x^\alpha$(α 是任意实数),其定义域要与 α 的取值有关. 当 $\alpha=1,2,3,\dfrac{1}{2},-1$ 时是最常用的幂函数,如图 1-11 所示.

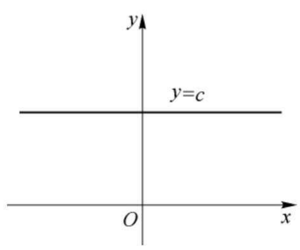


图 1-10

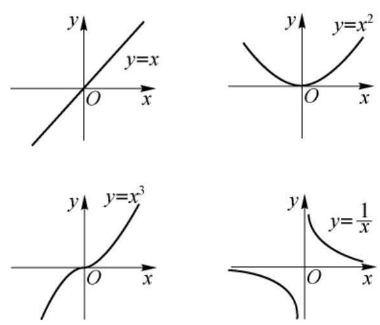


图 1-11

3. 指数函数

指数函数 $y=a^x$(a 为常数,且 $a>0,a\neq1$),其定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 单调增加;当 $0<a<1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 单调减少. $y=a^{-x}$ 与 $y=a^x$ 的图形关于 y 轴对称,如图 1-12 所示. 其中最为常用的是以 $\mathrm{e}=2.718\,281\,8\cdots$ 为底数的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$.

4. 对数函数

指数函数 $y=a^x$ 的反函数称为对数函数,记为 $y=\log_a x$(a 为常数,且 $a>0,a\neq1$). 其定义

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com