高考数学绿色通道系列丛书

江苏适用

2018

专题

解读与强化训练

高考数学二轮·文科

◎ 吕新华 主编　吕新民 主审

精准的导航　名师的引领

选择绿色通道　轻松赢得高考

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

专题解读与强化训练

（高考数学二轮·文科）

主编　吕新华
主审　吕新民

东南大学出版社
·南京·

内容提要

本书是高考数学第二轮复习用书(江苏文科学生专用),共分为三个部分:第一部分为模块知识篇,包含八个专题,内容涵盖考试大纲中要求掌握的主干知识点,书中不仅对高考数学的主干知识点的基础知识、基本题型、基本方法、基本技巧作了较为系统的阐述和说明,而且对高考数学的热点、重点、难点的解题策略、解题方法和技巧也作了精辟的分析,旨在进一步夯实基础,提高学生运用知识解决问题的能力;第二部分为解题方法篇,包含四个专题,主要依据高考的不同题型,分别阐述其特点,寻求其解题策略,旨在培养学生的数学思维与能力,提高学生灵活运用数学方法解决问题的能力;第三部分为强化训练篇,包含六套综合训练试卷,通过解题,让学生系统而有条理地掌握考试大纲中要求掌握的全部考点,进一步找出复习中隐藏的知识盲点,及时查漏补缺,全面提升学生的应考能力.

图书在版编目(CIP)数据

专题解读与强化训练.高考数学二轮.文科 / 吕新华主编.—南京:东南大学出版社,2017.9

ISBN 978-7-5641-6979-4

Ⅰ.①专… Ⅱ.①吕… Ⅲ.①中学数学课—高中—习题集—升学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 241025 号

专题解读与强化训练(高考数学二轮·文科)

出版发行	东南大学出版社
社　　址	南京市四牌楼 2 号(邮编:210096)
出 版 人	江建中
责任编辑	吉雄飞(联系电话:025-83793169)
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	南京玉河印刷厂
开　　本	880mm×1230mm　1/16
印　　张	11.75
字　　数	399 千字
版　　次	2017 年 9 月第 1 版
印　　次	2017 年 9 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN　978-7-5641-6979-4
定　　价	35.80 元

本社图书若有印装质量问题,请直接与营销部联系,电话:025-83791830。

前　　言

高考数学第二轮复习是在第一轮复习的基础上,对考试大纲中要求考查的主干知识点的纵向延伸和对不同知识点之间横向联系的强化.第二轮复习主要以专题为模块,使学生系统而有条理地掌握考试大纲中要求掌握的主干知识点,与此同时,强化学生的解题思维与能力,并在此基础上通过强化训练,让学生作一次全面自检自查,进一步找出复习过程中的遗漏和知识盲点,及时查漏补缺,全面提升学生的应考能力.

全书共分为如下三部分内容:

第一部分:模块知识篇,包含八个专题,内容涵盖考试大纲中的主干知识点,旨在强化基础夯实,提高学生综合解决问题的能力.在这一部分内容中,代数主要包括函数、三角函数、数列及不等式,立体几何主要包括线面关系、面积和体积的计算,解析几何主要包括直线和圆锥曲线的关系.对这一部分内容,我们严格依据考试大纲要求对相关考点结合典型实例作出归纳和总结.同时,由于平面向量是一个非常重要的工具,渗透于各章节,为使学生能够很好的掌握,本书也作专门阐述.

第二部分:解题方法篇,包含四个专题,内容涉及考试大纲要求掌握的基本题型的解题方法.解题方法是数学能力的核心与灵魂的体现,只有提高解题思维、能力与方法,才能从根本上提高数学的考试成绩.这一部分主要依据高考试题的不同题型,分别对填空题、应用题、中档题及压轴题的特点与应对策略作专门阐述,旨在提高学生灵活运用数学方法解决问题的能力.

第三部分:强化训练篇,包含六套综合训练试卷.解题是提高数学成绩不可或缺的重要手段,是学生系统而有条理地掌握考试大纲要求的根本保障.只有让学生有针对性地解一定数量的试题,才能发现他们的不足,并及时进行弥补,进而全面提升学生的应试能力.

本书具有如下特点:

(1) 针对性强:高考命题的原则在于"稳",所谓的稳即是命题必须忠实于考试大纲的要求.本书严格依据考纲,牢牢围绕考点,并用最简单实例诠释每个考点,让学生迅速掌握考试大纲中的基本知识点.

(2) 实战性强:高考命题的核心在于"变",所谓的变就是要求学生能够熟练运用考试大纲中要求掌握的基本知识解决与之相关的综合问题.本书中的部分例题来自于高考真题,还有部分例题是作者长期奋战在高考一线的经验积累,对于学生迅速掌握考试大纲中的主干知识点具有很强的引导性.

(3) 方法性强:高考命题的精髓在于"新",所谓的新主要体现在压轴题的命题上.压轴题的特点为信息量大,知识点之间的联系复杂,或情景设置新颖,条件概念别致,是绝大多数学生赢取高分的瓶颈.本书通过经典实例,引导学生探索压轴题的一些规律,找寻压轴题的求解策略,并通过针对性的训练让学生从容面对压轴题的挑战.

高考,人生中的一次重大机遇与挑战.不必惊慌,不必害怕,用我们真心的付出,加上您用心的准备,我们坚信,您一定能赢得最后的胜利!

吕新华

2017 年 8 月

目 录

CONTENTS

第一部分　模块知识篇

第二部分　解题方法篇

第三部分　强化训练篇(见附页)

第一部分　模块知识篇

专题一　函数图象与性质

考纲解析

1. 函数的性质

(1) 奇偶性:设函数 $f(x)$定义在对称区间 D 上,对任意 $x\in D$,若 $f(-x)=-f(x)$,称 $f(x)$为奇函数;若 $f(-x)=f(x)$,称 $f(x)$为偶函数.

(2) 周期性:设函数 $f(x)$定义在区间 D 上,T 为非零常数,对任意 $x\in D$,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数,T 为 $f(x)$的一个周期. 周期函数的定义域必须是无界的.

(3) 单调性:设函数 $f(x)$定义在区间 I 上,如果对于 I 的某个区间 D 内的任意两个数 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$为区间 D 上的增函数;当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$为区间 D 上的减函数.

解析与点拨:奇偶性与周期性的判定主要借助于定义,而单调性的判定方法主要有两种:(1) 定义;(2) 导函数的符号.

2. 函数的零点

(1) 定义:对于函数 $f(x)$,满足 $f(x)=0$ 的实数 x 称为 $f(x)$的零点.

(2) 判别:设函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上的图象是连续不断的一条曲线,如果 $f(a)\cdot f(b)<0$,则函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有零点,即存在 $c\in(a,b)$,使得 $f(c)=0$.

解析与点拨:研究函数 $f(x)$在区间 D 上的零点的方法:(1) 解方程 $f(x)=0$;(2) 先确定函数 $f(x)$在 D 上的单调区间,再由判别法确定在每个单调区间上是否有零点.

3. 函数的图象

(1) 二次函数:$y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$.

(2) 三次函数:$y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq0)$.

(3) 幂函数:$y=x^\alpha$(α 为常数). 当 $\alpha>0$ 时,函数图象始终过点$(0,0)$与$(1,1)$,在区间$[0,+\infty)$上是增函数;当 $\alpha<0$ 时,函数图象始终过点$(1,1)$,在区间$(0,+\infty)$上是减函数.

(4) 指数函数:$y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$). 函数图象过点$(0,1)$,且当 $a>1$ 时,为 $\mathbf{R}$ 上的增函数;当 $0<a<1$ 时,为 $\mathbf{R}$ 上的减函数.

(5) 对数函数:$y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$). 函数图象过点$(1,0)$,且当 $a>1$ 时,在$(0,+\infty)$上为增函数;当 $0<a<1$ 时,在$(0,+\infty)$上为减函数.

解析与点拨:函数图象是函数性质最直观的体现,应熟练掌握上述几类函数图象. 一旦涉及上述几类函数性质讨论时,应充分结合函数图象,使问题简化.

经典实例

题型一　函数的性质

【例 1】 设 $f(x)$,$g(x)$是分别定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数与奇函数,且 $f(x)+g(x)=x\ln(1+e^x)$,则 $f(x)=$________.

解析与点拨:仅由关系式 $f(x)+g(x)=x\ln(1+e^x)$ 无法确定 $f(x)$,应利用奇偶性,以 $-x$ 替代 x,还可得到关系式 $f(x)-g(x)=-x\ln(1+e^x)+x^2$,由此即可确定 $f(x)$. 处理函数奇偶性的问题主要借助于定义.

【变式 1】 已知函数 $f(x)$满足 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$,则 $f(x)$的解析式为________.

【例 2】 设 $f(x)$是定义在 **R** 上周期为 6 的周期函数，且在区间$[0,6)$上，$f(x)=|x-3|$，则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(100)=$________.

解析与点拨：求解此类问题的方法是先求出一个周期内函数值的和，然后再利用周期性求出所有函数值的和.

【变式 2】 已知函数 $f(x)$的定义域为 **R**，对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$，且 $f(1)=\lg3-\lg2$，$f(2)=\lg3+\lg5$，则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2017)=$________.

【例 3】 已知 $f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数，且在区间$(0,+\infty)$上是增函数，则对任意 $a\in(-1,0)$，则 $f(-2a)$，$f(a)$，$f(a^2)$按从小到大的顺序排列为________.

解析与点拨：利用单调性比较函数值的大小，必须确保是在一个单调区间内进行比较. 因此，本题应首先比较 $f(a^2)$，$f(-a)$及 $f(-2a)$的大小.

【变式 3】 已知函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$，则 $f(-1)$，$f\left(\frac{3}{2}\right)$，$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$按从小到大的顺序排列为________.

题型二 函数的零点

【例 4】 若 $a<b<c$，则函数

$$f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$$

的零点的个数为________.

解析与点拨：直接检验函数 $f(x)$在 $x=a,b,c$ 各处取值的符号，然后利用判别法即可. 如果需要判断函数 $f(x)$在$-\infty$或$+\infty$时的符号，可以通过取极限，或通过取充分小的数或充分大的数替代$-\infty$或$+\infty$即可.

【变式 4】 已知 x_0 是 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\frac{1}{x}$的一个零点，如果 $x_1\in(-\infty,x_0)$，$x_2\in(x_0,0)$，则 $f(x_1)$，$f(x_2)$与 0 的大小关系为________.

【例 5】 已知 $f(x)$是定义在 **R** 上且以 3 为周期的奇函数，当 $x\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$时，$f(x)=\ln(x^2-x+1)$，则函数 $f(x)$在区间$[0,6]$上的零点个数为________.

解析与点拨：考查周期函数的零点个数问题，应先考查函数在一个周期内零点的个数，然后再借助于周期函数的特点考查相应区间上零点的个数.

【变式 5】 函数 $f(x)=x\cos x^2$ 在区间$[0,4]$上的零点个数为________.

题型三 函数图象的变换

【例 6】 已知曲线 C：$y=2x^2-4x+1$，先将曲线在 y 轴的方向上向下平行移动 2 个单位，再关于直线 $x=1$ 对称移动后，所得曲线的方程为________.

解析与点拨：设 $a>0$，$b>0$，则

(1) 曲线 $y=f(x)$在 x 轴的方向上向右平行移动 a 个单位所得曲线方程为 $y=f(x-a)$；在 y 轴的方向上向上平行移动 b 个单位所得曲线方程为 $y-b=f(x)$.

(2) 曲线 $y=f(x)$关于直线 $x=a$ 对称移动所得曲线方程为 $y=f(2a-x)$；关于直线 $y=b$ 对称移动所得曲线方程为 $2b-y=f(x)$；关于点(a,b)对称移动所得曲线方程为 $2b-y=f(2a-x)$.

(3) 曲线 $y=f(x)$关于直线 $y=x$ 对称移动所得曲线方程为 $x=f(y)$；关于直线 $y=-x$ 对称移动所得曲线方程为 $-x=f(-y)$.

【变式 6】 若将函数 $f(x)=\sin4x$ 的图象向左平行移动 $\frac{\pi}{24}$个单位，所得曲线的方程为 $g(x)=$________.

题型四　函数图象的性质

【例 7】 函数 $y=|\log_{\frac{1}{2}}(x-1)|$ 的单调递增的区间是________.

解析与点拨：先利用函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图象确定函数 $y=|\log_{\frac{1}{2}}x|$ 的图象，再借助于该图象确定函数 $y=|\log_{\frac{1}{2}}x|$ 的单调递增区间，进而确定 $y=|\log_{\frac{1}{2}}(x-1)|$ 的单调递增区间.

【变式 7】 已知函数 $f(x)=\lg(x^2-ax+3a)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上是增函数，则 a 的取值范围是________.

【例 8】 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\geqslant 0,\\ 2x-x^2, & x<0,\end{cases}$$

若 $f(2-a^2)>f(a)$，则实数 a 的取值范围是________.

解析与点拨：充分借助于函数 $y=f(x)$ 图象，可使问题清晰，从而简化解题思维与解题过程.

【变式 8】 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，有 $xf'(x)<f(-x)$. 若 $\frac{1}{3}(2x-1)f(2x-1)<f(3)$，则实数 x 的取值范围是________.

解析与点拨：$f(x)$ 是一个抽象函数，不易借助于其图象进行讨论. 条件 $xf'(x)<f(-x)$ 蕴含 $(xf(x))'<0$，利用单调递减的偶函数 $F(x)=xf(x)$ 进行讨论，可使问题得到解决.

题型五　函数的值域与最值

【例 9】 已知 I 是关于原点对称的区间，则函数

$$f(x)=\frac{3x^2-\sin x+6}{x^2+2}$$

在 I 上的最大值与最小值的和为________.

解析与点拨：求一个函数的值域或最值，可以考虑以下几种方法：

(1) 反函数法：形如 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 的函数，先求其反函数，再求反函数的定义域即可得到原函数的值域，类似的还有 $y=\frac{a\sin x+b}{c\sin x+d}$ 等；

(2) 配方法：形如 $y=ax^2+bx+c$ 的二次函数，类似的还有 $y=a\sin^2x+b\sin x+c$ 等；

(3) 换元法：形如 $y=ax+b+\sqrt{cx+d}$ 的无理函数，令 $t=\sqrt{cx+d}$，可转化为关于 t 的二次函数，然后利用配方法求即可；

(4) 判别式法：形如 $y=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ 的函数；

(5) 性质法：利用函数的单调性求函数的最值，例如求函数 $y=x+\frac{4}{x}(x\in(0,1])$ 的最小值；

(6) 基本不等式法：例如求函数

$$y=\frac{4x}{x^2+5x+4}\quad(x>0)$$

的最大值；

(7) 几何法：例如已知 x,y 满足方程 $x^2+y^2=4$，其中 $y\geqslant 0$，求 $\frac{y+1}{x+4}$ 的最大值和最小值；

(8) 导数法：例如求函数 $y=\ln x-ax+1$ 在 $[1,2]$ 上的最大值和最小值.

【变式 9】 求函数

$$f(x)=x^2-2ax-a\quad(x\in[-1,1],a>0)$$

的值域.

【例 10】 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2, & x\leqslant 0,\\ x+\frac{1}{x}+a, & x>0,\end{cases}$ 若 $f(0)$ 是函数 $f(x)$ 的最小值，则实数 a 的取值范围是________.

解析与点拨:分段函数的最小值是分段函数中各段最小值中的最小者;同样的,分段函数的最大值是分段函数中各段最大值中的最大者.

【变式 10】 已知函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数,且函数 $y=f(x-1)$的图象关于点$(1,0)$对称.当 $x,y\in\mathbf{R}$ 时,若不等式 $f(x^2-6x+21)+f(y^2-8y)\leqslant 0$ 恒成立,则当 $x\geqslant 3$ 时,x^2+y^2 的最大值为________,最小值为________.

综合提高

【例 11】 已知函数 $f(x)=(2a+1)e^x+(a^2-1)e^{-x}$,其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$是奇函数,求 a 的值.

(2) 是否存在实数 a,使得 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数?若存在,求出 a 的取值范围;若不存在,请说明理由.

解析与点拨:(1) 利用奇函数满足 $f(0)=0$ 的特性可以确定 a 的值,但利用特殊值确定的 a 的值还应就奇函数满足的条件作进一步验证;(2) 讨论函数单调性最有力的工具是利用其导函数的符号,但就本题而言,由于函数表达式相对比较复杂,求导后的函数表达式不易判别其符号,这里直接利用定义结合分类讨论的思想更具优势.

【变式 11】 若在区间 I 内,对任意 $x_1\in I$,总存在 $x_2\in I$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$成立,则称函数 $f(x)$在区间 I 上被 $g(x)$覆盖.已知函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x+1}, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1,\\ -\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{12}, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

$$g(x)=a\sin\frac{\pi}{6}x-a+1,\quad 其中\ a>0.$$

(1) 求函数 $f(x)$的值域;

(2) 若 $f(x)$在$[0,1]$上被 $g(x)$覆盖,求实数 a 的取值范围.

解析与点拨:此题属于新概念题.求解第(2)问必须理解 $f(x)$在$[0,1]$上被 $g(x)$覆盖的含义,即 $f(x)$在$[0,1]$上的值域被包含在 $g(x)$在$[0,1]$上的值域内.

【例 12】 已知 a,b 是实数，且 $a\neq 0$，函数

$$f(x)=ax^2+\frac{b}{x}\quad(x>0).$$

(1) 试就 a,b 的值讨论函数 $f(x)$ 的零点个数；

(2) 若函数 $g(x)=f(x)-f(2)$ 在区间 $(0,2)$ 内有零点，求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围.

解析与点拨：此题函数形式简单，相应零点可以通过解方程 $f(x)=0$ 直接求出.

【变式 12】 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 是定义在同一区间 $[a,b]$ 上的两个函数，若 $y=f(x)-g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有两个不同的零点，则称 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是"友好函数". 若

$$f(x)=x^2-3x+4,\quad g(x)=2x+m$$

在 $[0,3]$ 上是"友好函数"，求实数 m 的取值范围.

高考零距离

【例 13】 (2017 高考全国卷(Ⅱ))已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=2x^3+x^2$，则 $f(2)=$________.

【例 14】 (2017 高考江苏卷)已知函数 $f(x)=x^3-2x+e^x-\frac{1}{e^x}$，其中 e 是自然对数的底数，若 $f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$，则实数 a 的取值范围是________.

高考评析、本专题要领及易错点警示

【高考评析】 函数是贯穿于中学数学的一条主线. 高考对函数的考查是全方位、多层次、多角度的，既有小题，也有大题. 一般来说，小题难度属于中档题，但大题综合性强，求解具有一定技巧性，属于较大难度题.

【本专题要领】 高考对函数的考查主要是围绕函数的解析式，函数的六大性质（定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性、对称性），函数的图象以及函数的零点而展开的.

1. 求解析式的常用方法：(1) 换元法，应注意换元后新变量的范围；(2) 代换法；(3) 待定系数法；(4) 性质法，即利用函数的奇偶性、周期性求函数的解析式.

2. 求函数值域的常用方法：(1) 数形结合法；(2) 反函数法；(3) 配方法；(4) 换元法；(5) 判别式法；(6) 性质法；(7) 基本不等式法；(8) 几何法；(9) 导数法.

3. 单调性

(1) 求函数的单调性常用方法：(ⅰ) 图象法；(ⅱ) 定义法；(ⅲ) 复合函数法；(ⅳ) 导数法. 其中导数法是最基本且最实用的方法.

(2) 证明函数的单调性常用的方法：(ⅰ) 定义法；(ⅱ) 导数法.

4. 奇偶性：判断或证明函数的奇偶性一般都是用定义法.

5. 周期性

处理函数周期性的问题除了定义外，还应掌握下列几条性质：

(1) 若 $f(x+2)=-f(x)$，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $T=4$；

(2) 若 $f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $T=4$；

(3) 若 $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $T=4$；

(4) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(b+x)$，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $T=|a-b|$；

(5) 若函数 $f(x)$ 关于 $x=a$, $x=b$ 对称，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $T=2|b-a|$.

6. 对称性

关于函数的对称性要掌握以下结论：

(1) 若 $f(a+x)=f(b-x)$，则 $f(x)$ 关于 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称；

(2) 若 $f(x-1)$ 关于点 $(1,0)$ 对称，则 $f(x)$ 关于原点对称；

(3) 若 $f(x+a)$ 是偶函数，则 $f(x)$ 关于 $x=a$ 对称；

(4) $y=f(x)$ 关于 $y=x+b$ 对称的曲线的解析式为

$$x+b=f(y-b);$$

(5) $y=f(x)$ 关于 $y=-x+b$ 对称的曲线的解析式为

$$-x+b=f(b-y).$$

7. 方程与不等式中的几个典型问题

(1) $a>f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a>[f(x)]_{\max}$；

(2) $a>f(x)$ 有解 $\Leftrightarrow a>[f(x)]_{\min}$；

(3) $a=f(x)$ 有解 $\Leftrightarrow a\in f(x)$ 的值域.

【易错点警示】

1. 在解决与函数相关问题时，易忽略函数的定义域，从而导致不必要的错误. 因此，应牢记不论涉及函数的什么问题，都应从定义域出发.

2. 求函数的单调区间时，易错误地将多个单调区间之间添加符号“∪”和“或”.

3. 在处理函数的某些问题时，易忽略对函数自身性质(如奇偶性、单调性、周期性、对称性等)的考虑，从而将问题复杂化.

4. 不善于结合函数图象将抽象问题变为直观问题进行处理，导致错误.

自我检测题一

时间：60 分钟；满分：84 分

一、填空题：本大题共 14 个小题，每小题 5 分，共 70 分.

1. 函数 $y=\lg(1+2^x+3^x+4^xa)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上有意义，则实数 a 的取值范围是________.

2. 设函数 $f(x)=x^2-4x+5$ 在区间 $[0,m]$ 上的最大值为 5，最小值为 1，则实数 m 的取值范围是________.

3. 已知 $f(t)=\log_2 t$，其中 $t\in[\sqrt{2},8]$，对于 $f(t)$ 值域内的所有实数 m，不等式 $x^2+mx+4>2m+4x$ 恒成立，则 x 的取值范围是________.

4. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}+1$，当 $x<0$ 时，$f(x)=$________.

5. 已知函数 $y=x+\frac{k}{x}(k>0)$ 在 $[2,+\infty)$ 上为增函数，则 k 的取值范围是________.

6. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的可导函数，且 $xf'(x)-f(x)>0$. 对于任意的正数 a,b，若 $a>b$，则 $af(b)$ 与 $bf(a)$ 的大小关系为________.

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a, & x\leqslant 0,\\ x^2-3ax+a, & x>0\end{cases}$ 有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是________.

8. 若函数 $f(x)=\begin{cases}-x+6, & x\leqslant 2,\\ \log_a x+3, & x>2\end{cases}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的值域为 $[4,+\infty)$，则实数 a 的取值范围是________.

9. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且以 2 为周期，则“$f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的增函数”是“$f(x)$ 为 $[5,6]$ 上的减函数”的________条件.

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+4)=f(x)+f(2)$ 成立. 如果 $f(0)=0$，$f(1)=2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2017)=$________.

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^x, & x>0,\\ ax+3a-8, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，则 a 的取值范围为________.

12. 已知 $f(x)=\sin\frac{\pi}{6}x+\dfrac{16}{2+\sin\frac{\pi}{6}x}$，则 $f(x)$ 的最小值为________.

13. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(-4)=f(1)=0$，且在 $[0,3]$ 与 $[3,+\infty)$ 上分别为递减与递增，则不等式 $xf(x)<0$ 的解集为________.

14. 定义映射 $f:A\to B$，其中 $A=\{(m,n)\mid m,n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\mathbf{R}$. 若所有的正整数对 (m,n) 满足下列条件：

(1) $f(m,1)=1$；

(2) $n>m$ 时，$f(m,n)=0$；

(3) $f(m+1,n)=2[f(m,n)+f(m,n-1)]$，

则 $f(2,2)=$________，$f(n,2)=$________.

二、解答题：本题满分 14 分.

15. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的奇函数，且在 $[-1,1]$ 上是增函数，$f(-1)=-1$. 若不等式 $f(x)\leqslant t^2-2at+1$ 对任意 $x\in[-1,1]$ 及任意 $a\in[-1,1]$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

专题二　导数及其应用

考纲解析

1. 导数的定义、几何意义与运算

(1) 定义：设函数 $y=f(x)$，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx 变为 $x_0+\Delta x$，相应的，函数的增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，称函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且称该极限为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$.

(2) 几何意义：函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率. 因此，曲线 $y=f(x)$ 过点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

(3) 基本初等函数的求导公式：

$$(C)'=0,\quad (x^n)'=nx^{n-1}\quad (n\in\mathbf{Q}),$$

$$(\sin x)'=\cos x,\quad (\cos x)'=-\sin x,$$

$$(e^x)'=e^x,\quad (a^x)'=a^x\ln a\quad (a>0\text{ 且 }a\neq 1),$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x},\quad (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}\quad (a>0\text{ 且 }a\neq 1).$$

(4) 导数的运算法则：设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 均可导.

(ⅰ) 加、减运算法则：$(u\pm v)'=u'\pm v'$；

(ⅱ) 乘法运算法则：$(uv)'=u'v+uv'$；

(ⅲ) 除法运算法则：$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\quad (v\neq 0)$；

(ⅳ) 复合函数法则：设 $u=g(x)$ 在 x 处可导，$y=f(u)$ 在 $u=g(x)$ 处可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 处可导，且

$$[f(g(x))]'=f'(u)\cdot g'(x),\quad 即\quad y'_x=f'_u\cdot g'_x.$$

解析与点拨：(1) 若函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $f'(x_0)$ 即是一个确定的数；(2) $f'(x)=\tan\alpha$，其中 α 即是曲线 $y=f(x)$ 上过点 $(x,f(x))$ 的切线与 x 轴正向的夹角(注意当切线与 x 轴垂直时，斜率不存在，但切线存在)；(3) 熟练掌握基本初等函数的求导公式及求导的运算法则是利用导数研究函数的前提.

2. 导数的应用

(1) 可导函数的导数与单调性的关系：在某个区间 (a,b) 内，如果 $f'(x)>0$，则函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内单调递增；如果 $f'(x)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内单调递减；如果 $f'(x)=0$ 恒成立，那么函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是常数函数.

(2) 利用导数求函数 $f(x)$ 的单调区间的步骤：

(ⅰ) 先确定函数 $f(x)$ 的定义域；

(ⅱ) 求导数 $f'(x)$；

(ⅲ) 令 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$)解出相应 x 的范围，即是函数 $f(x)$ 的单调递增区间(或单调递减区间).

(3) 求函数 $y=f(x)$ 极值的方法：

(ⅰ) 先解方程 $f'(x)=0$.

(ⅱ) 当 $f'(x_0)=0$ 时，如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，那么 $f(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 的极大值；如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，那么 $f(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 的极小值.

(4) 求函数 $y=f(x)$ 最值的方法：

如果函数 $y=f(x)$ 的图象在闭区间 $[a,b]$ 上是一条连续不断的曲线，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值和最小值. 求函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值的步骤如下：先求函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的极值，再求出函数 $f(x)$ 在端点处的值 $f(a)$，$f(b)$，比较上述求出的值，其中最大的一个就是最大值，最小的一个就是最小值.

解析与点拨：导数是一种运算，其最突出之处在于利用导数可以研究函数的单调性，进而可以研究与单调性相关的一系列问题，如极值与最值、函数的零点以及不等式的证明等. 因此，一旦涉及诸如此类的问题，均可考虑借助于导数这个工具.

经典实例

题型一　导数的定义与运算

【例 1】 设函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处可导，且

$$f(x)=xe^x+f'(3)x^2,$$

则 $f'(3)=$________.

解析与点拨：$f'(3)$ 是一个常数，由求导的运算法则得 $f'(x)=e^x+xe^x+2f'(3)x$，再令 $x=3$ 可建立 $f'(3)$ 的一个关系式从而求出 $f'(3)$.

【变式 1】 设函数 $f(x)$ 在 $x=-\frac{1}{3}$ 处可导，且 $f(x)=x^2+2f'\left(-\frac{1}{3}\right)x+\frac{1}{3}$，则 $f'\left(-\frac{1}{3}\right)=$________.

【例 2】 设函数 $f(x)=x^2$，若实数 x_0,h,θ 满足

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h),\quad 这里 h\neq 0,$$

则 $\theta=$________.

解析与点拨：(1) 此题形式复杂，但问题简单，主要涉及函数 $f(x)$ 在 x_0 及 x_0+h 处的函数值和导函数 $f'(x)$ 在 $x_0+\theta h$ 处的函数值；(2) 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则

$$f'(x_0)=f'(x)\Big|_{x=x_0}.$$

【变式 2】 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_1=1,a_6=4$，函数 $f(x)=x(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)(x-a_6)$，则 $f'(0)=$________.

题型二 导数的几何意义

【例 3】 已知点 P 在曲线 $y=\frac{4}{e^x+1}$ 上，α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角，则 α 的取值范围是________.

解析与点拨：由导数的几何意义可知 $\tan\alpha=f'(x)$（注意 α 本身有一个范围，即 $\alpha\in[0,\pi)$），因此只需确定 $f'(x)$ 的值域即可确定 α 的范围.

【变式 3】 已知点 P 在曲线 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$ 上，如果 α 为曲线在 P 点的切线的倾斜角，则 α 的取值范围是________.

【例 4】 已知直线 $y=ax(a\neq 0)$ 是曲线 $y=b\ln x$ 的一条切线，则 $\frac{b}{a}=$________.

解析与点拨：通过设切点的坐标为 $(x_0,y_0)(x_0>0)$ 可以同时建立三个关系式：$y_0=ax_0$，$y_0=b\ln x_0$ 及 $a=\frac{b}{x_0}$，为解决问题提供了充足的条件.

【变式 4】 过点 $P(2,3)$ 作曲线 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}$ 的切线，求切线的方程.

题型三 单调性、极值与最值

【例 5】 若函数 $f(x)=x^3+3ax^2+3(a+2)x+1$ 既有极大值，也有极小值，则实数 a 的取值范围是________.

解析与点拨：可导函数的极值点一定是使 $f'(x)=0$ 的点，此处 $f'(x)$ 是二次函数，题设条件蕴含方程 $f'(x)=0$ 有两个不同的根.

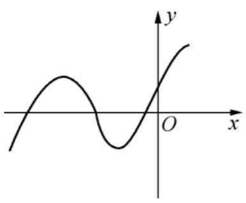
【变式 5】 函数 $f(x)=x^2e^{-x}$ 的极大值为________，极小值为________.

【例 6】 求函数 $f(x)=\ln x-ax+1$ 在区间$[1,4]$上的单调区间.

解析与点拨:利用导数研究含有字母的函数的单调性是高考考查的一个热点、重点和难点,通常解题步骤如下:一是求定义域;二是求 $f'(x)$;三是考察 $f'(x)$能否恒正或恒负;四是令 $f'(x)>0$ 与定义域求交集得单调递增区间,再令 $f'(x)<0$ 与定义域求交集得单调递减区间.

【变式 6】 求函数 $f(x)=(a+1)\ln x+ax^2+1$ 的单调区间.

【例 7】 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图所示,则 a,b,c 的取值符号分别为_______.



解析与点拨:函数图象不仅提供了函数 $y=f(x)$ 的某些信息,同时也提供了其导函数 $f'(x)$ 的某些信息,应将二者综合考虑.

【变式 7】 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+2x+1$ 在区间$[1,4]$上为减函数,则 a 的取值范围是_______.

【例 8】 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$,曲线 $y=f(x)$在点 $P(1,f(1))$的切线方程为 $y=3x+1$.

(1) 若函数 $f(x)$在 $x=-2$ 处有极值,求函数 $f(x)$的表达式;

(2) 若函数 $y=f(x)$在区间$[-2,1]$上单调递增,求实数 b 的取值范围.

解析与点拨：

(1) 单变量的恒成立、有解及无解的转化：

(ⅰ) 对任意 $x\in[m,n]$，$a>f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a>[f(x)]_{\max}$；若存在 $x\in[m,n]$，$a>f(x)$ 有解 $\Leftrightarrow a>[f(x)]_{\min}$；对任意 $x\in[m,n]$，$a>f(x)$ 无解 $\Leftrightarrow a\leqslant[f(x)]_{\min}$.

(ⅱ) 对任意 $x\in[m,n]$，$a<f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a<[f(x)]_{\min}$；若存在 $x\in[m,n]$，$a<f(x)$ 有解 $\Leftrightarrow a<[f(x)]_{\max}$；对任意 $x\in[m,n]$，$a<f(x)$ 无解 $\Leftrightarrow a\geqslant[f(x)]_{\max}$.

(2) 双变量的恒成立、有解及无解的转化：

(ⅰ) 对任意 $x\in[a,b]$，不等式 $f(x)>g(x)$ 恒成立，只需 $[f(x)-g(x)]_{\min}>0$；

(ⅱ) 若存在 $x_0\in[a,b]$，不等式 $f(x_0)>g(x_0)$ 成立，只需 $[f(x)-g(x)]_{\max}>0$；

(ⅲ) 对任意 $x_1\in[a,b]$，$x_2\in[c,d]$，不等式 $f(x_1)>g(x_2)$ 恒成立，只需 $[f(x)]_{\min}>[g(x)]_{\max}$；

(ⅳ) 若存在 $x_1\in[a,b]$，$x_2\in[c,d]$，不等式 $f(x_1)>g(x_2)$ 成立，即 $[f(x)]_{\max}>[g(x)]_{\min}$；

(ⅴ) 对任意 $x_1\in[a,b]$，存在 $x_2\in[c,d]$，不等式 $f(x_1)>g(x_2)$ 成立，即 $[f(x)]_{\min}>[g(x)]_{\min}$.

【变式 8－1】 已知函数 $f(x)=x^3-3x+C$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点，求 C 的值.

【变式 8－2】 已知函数 $f(x)=x\ln x$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值；

(2) 若 $f(x)\geqslant ax-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

题型四 导数与不等式

【例 9】 对任意的 $x\in[0,+\infty)$，证明：

(1) $x\geqslant\sin x$；

(2) $\cos x\geqslant 1-\dfrac{1}{2}x^2$.

解析与点拨： 在证明函数不等式时，通常需要构作辅助函数来结合导数这个工具. 具体步骤如下：先移项使不等式一端为零，另一端即是所需要构作的辅助函数；然后进一步考察辅助函数的单调性即可.

【变式 9】 已知实数 $a>0$，函数 $f(x)=e^x-ax-1$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间及最小值；

(2) 若 $f(x)\geqslant 0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 a 的值；

(3) 证明：$\ln\left(1+\dfrac{2}{2\times 3}\right)+\ln\left(1+\dfrac{4}{3\times 5}\right)+\ln\left(1+\dfrac{8}{5\times 9}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{2^n}{(2^{n-1}+1)\times(2^n+1)}\right)<1$.

【例 10】 已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-x$.

(1) 求函数 $f(x)$的单调区间；

(2) 若 $x>-1$,求证:$\frac{x}{1+x}\leqslant\ln(x+1)\leqslant x$.

解析与点拨:若辅助函数在所讨论的区间上不是单调的,此时问题可以转化为寻求辅助函数在所讨论区间上的最值.以上例 9 与例 10 是证明不等式的两种最有效的方法.

【变式 10】 已知 $f(x)=\ln x-px+1$.

(1) 求 $f(x)$的单调区间；

(2) 当 $p>0$ 时,若对任意 $x>0$,恒有 $f(x)\leqslant 0$,求 p 的取值范围；

(3) 证明:$\frac{\ln 2^2}{2^2}+\frac{\ln 3^2}{3^2}+\cdots+\frac{\ln n^2}{n^2}<n-1-\frac{n-1}{2(n+1)}$.