浙大优学
进阶数学

高分之路拾级而上
30年教学经验精华

北京十一学校特级教师
首师大附中特级教师 联合编写
北京二中特级教师

高考数学轻松突破130分

李锦旭 韩新生 庄肃钦◎著

"全"：选材全面，一册在手，不必旁求

"精"：简明扼要，重点突出

"活"：注重数学方法的引导与点拨

"新"：瞄准新课改新高考的发展方向

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高考数学轻松突破 130 分

李锦旭　韩新生　庄肃钦　著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学轻松突破130分 /李锦旭，韩新生，庄肃钦著. —杭州：浙江大学出版社，2016.10(2016.11重印)
ISBN 978-7-308-16216-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李… ②韩… ③庄… Ⅲ.①中学数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第216898号

高考数学轻松突破130分

李锦旭 韩新生 庄肃钦 著

策　　划 陈海权(QQ:1010892859)
责任编辑 夏晓冬
责任校对 余梦洁 丁佳雯 沈炜玲
封面设计 杭州林智广告制作有限公司
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路148号 邮政编码310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷 浙江省邮电印刷股份有限公司
开　　本 889mm×1194mm 1/16
印　　张 30
字　　数 1105千
版 印 次 2016年10月第1版 2016年11月第2次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-16216-6
定　　价 59.80元

浙江大学出版社发行中心联系方式：0571－88925591；http://zjdxcbs.tmall.com

序　言

本书为三位特级教师集30多年教学经验精华的倾心之作，适合阅读的对象是高中学生，文理兼顾；既可作高三第一轮复习使用，同时也可为广大高中教师备课上课提供有益借鉴.

本书力图突出如下鲜明特色：

一是“全”，即选材全面. 不仅核心内容全有，而且考虑到目前各省市开设选修课的情况，将“极坐标与参数方程”“几何证明选讲”“不等式证明选讲”“矩阵与变换”等均纳入讲解之列，使得一册在手，不必旁求！

二是“精”，即简明扼要，突出重点. 本书三位作者都是改革开放后历次课改亲历者甚至是课标和教材的实际制定和修订者，因此书中所列例题和习题都是经过沉淀、反复筛选的构成核心知识和核心思维方法不可缺少的基本题.

三是“活”，即注重数学思维方法的引导与点拨. 我们在教学中发现：大多学生学习了一大堆知识和方法但是面临做题时却不会用，尤其是考试之时！对此，我们特别注重引导学生面对新题目如何审题、如何分析寻找简捷的解题思路、如何迅速突破思维受阻之处，甚至如何总结解题规律、如何引申推广问题，使得学生不仅这一道题，更借机学会掌握一类题的解题规律，学会数学地思考问题；这是本书着墨最多也是最有特色之处！这些主要体现在本书的如下栏目：要点的【透析】、要点示例中对例题的【解析】【评注】及要点巩固的ABC三个层次的练习.

四是“新”，即在立足基础的前提下始终瞄准新课改新高考的发展方向. 本书虽立足基础、核心，却更放眼于发展：目前新一轮课改已启动，2017年实施新课程标准并使用新版教材，其中最为重要的是突出数学核心素养的培养，其基本内容是6点：数学抽象、逻辑推理、数学建模、运算能力、直观想象和数据分析；所有这些在本书都有突出体现.

本书结构及分工如下：

本书设计为三篇，可分总论、专题、模拟三大块，由72讲和4套模拟试题组成.其中第一篇为总论（第1—3讲），以近6年新课标卷试题为例探究轻松突破130分并有望冲刺150分（满分）的秘诀，同时分题型解读全突破策略，由李锦旭老师执笔；第二篇为专题研究，即3步突破要点，分为12章共69讲，其中第4—29讲由韩新生老师执笔，第30—48讲及第68—72讲由庄肃钦老师执笔，第49—67讲由李锦旭老师执笔；第三篇为4试夺冠，编拟了4套高考模拟试题作为自测使用，由李锦旭老师执笔.最后由李锦旭老师负责全书统稿.

三位作者都是特级教师，从教30多年都有20年以上送高三毕业班的经验，所带学生130分以上的均超过95%，且多人次荣获省市状元；其送考经验得到全国各地广大师生的交口赞誉，本书就是他们总结了30余年教学经验的精华撰写而成.为便于读者更高效使用本书，再将各条目的设置要领及注意事项扼要叙述如下：

第二篇每一讲开头首先概述知识要点的本质属性，详列具体要求，为本讲总纲提要，务必通过下面几个条目将此理解深刻：

【要点透析】是将要点简要一一列出，并将其思维方法以“透析”形式提炼出来，而不仅仅是给出结论，切勿略过！

【要点示例】则是分类型将“要点”透析所讲方法选取典型例题，示范用此解题的思维方法，并设变式训练；例题的示范分【解析】和【评注】两个部分，【解析】主要是引导探索可能的解题思路、解题步骤的条理扼要叙述；【评注】则主要是引导归纳问题的类型特征及相应解题规律总结：提炼解题思维方法、提醒可能的思维受阻之处及解题注意事项；例题之后往往设置【变式题】，目的是使读者在牢固掌握例题所述解题规律的基础上灵活处理其可能的变式问题，为深入认识问题的本质属性提供“模式识别”之借鉴；此项最后往往附有【易错题示例】一项，选取重要、典型而易错的题目，详列解题可能的错误之处，并给出较为详细的错因分析，为读者提供分析自己解题可能会误入歧途的素材以便于及时矫正！

【要点巩固】为对应训练题，分 ABC 三个层级，A 为基础题，B 为中档题，C 为提高题，其中 A、B 层为必做题，C 层供学有余力的读者进一步提高提供选择，可视个人情况和时间而定.

将以上条目整体设计分印成三本，第一本侧重于讲解，为【要点透析】【要点示例】主体内容，第二本为【要点巩固】内容，留空白，极为方便于读者作定时训练之用，第三本为答案，将例题变式题及要点巩固答案汇编于此，便于读者及时查对反思.

其实吧，一书成而数人瘦！我们深深体会到在本书从策划、写作、编辑、校稿到出版全过程中的艰辛，也借此由衷感谢为本书出版而出谋划策、辛勤工作的各位老师.

由于作者水平加之时间有限，书中不足甚至错误之处在所难免，恳请广大读者不吝指正！以便使本书更加完善，衷心感谢！本书联系专用邮箱：cong130dao150@163.com

我们坚信：同学们使用本书会有轻松愉悦的感觉，也更为坚信通过你们不懈努力，高考可以轻松突破 130 分，向 140 分甚至满分冲刺！我们期待着：火热的六月，就是你们大展鸿图、金榜题名之时！

本书作者

执笔：李锦旭

2016 年 9 月 18 日

目　　录

第一篇　总　论

第二篇　要点恰点睛

第三篇　4 试夺冠

* **选学内容**

第一篇 总 论

第1讲 高考数学轻松突破130分探秘

当一份“决定我们命运”的试卷放在面前时，如何才能高效拿下？这里给出一些建议：

最重要的是要拥有一颗平常心！道法自然嘛，保持平稳心态，顺利进入临战状态.

一、考前准备

考前5分钟，通览全卷，获取尽量多的信息，为实施高效答题作准备，要注意两点：

(1)填好所有考生信息，检查试卷有无印刷等错漏；

(2)可心算前三道选择题，借机平稳心态、调节情绪并增强信心.

二、考试中，努力做到以下几点

1.根据题型特点寻求高效答题的技巧与策略

(1)选择题——速解三法

主要有：含技能技巧的求解对照法、数形结合法、特例法；(详参第2讲)

(2)填空题——直扑结果

填空题只要求填写完美的结果，没有过程分，最考验素养和直觉！(详参第2讲)

(3)解答题——考虑分段得分策略.(详参第3讲)

2.在做题过程中的基本策略

(1)认真审题，规范答题.

认真审题要求一定要看清题意，宁慢勿快！目的是为快速寻求简捷的解题思路而搜集全信息；“寻求解题思路”要求能较好地洞察问题的本质，尽快地转化问题；“规范作答”则要求思路清晰、主要得分点突出、步骤条理而整洁.

(2)做题的基本顺序是：由前往后，先易后难.

遇到感觉难的题目时，要敢于暂时“搁下”，先做后面的容易题而不影响注意力和情绪；等后面的容易题解决了再回头思考暂时放下的“难题”，很可能就豁然开朗！

(3)做完选择题及时涂卡，做完填空题及时填写.(检查出来错误可修改)

(4)解答题一定要在指定范围内设计合理的答题空间.

(5)合理分配答题时间.这是一个很有个性而且又极为重要的事情！每位同学必须自己寻找感觉，尝试调节到最佳状态！这里给出的基本时间仅供参考：

按时长2个小时计，可分配为：选择题+填空题保持在30～45分钟，尽量别超过50分钟，而其中任何一道选择题或填空题都尽量不能超过5分钟；前三道解答题基本都保持在10分钟左右；后三道解答题每道基本保持在15～20分钟.

(6)检查时间：若能有5分钟的时间供检查全卷，先检查规范化的东西(考生信息、选择题涂填)，之后再检查感觉留有问题的地方(重读题意、细查草稿纸的步骤)，一旦发现问题不要轻易修改！一定要再看、再验，确认是做错了再改！(因为第一感觉往往是对的！)

这里，比较近年来的新课标卷，综合权衡了一下，还是选择以2014年新课标Ⅰ卷理科试题为例来解析说明，关于2015、2016这两年新课标卷有关变化、创新点和典型试题分析详见后面.

2014年普通高等学校招生全国统一考试(新课标Ⅰ卷)
数学(理科)

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3\geqslant 0\}$，$B=\{x|-2\leqslant x<2\}$，则 $A\cap B$ 等于(　　)

A. $[-2,-1]$　　B. $[-1,2)$

C. $[-1,1]$　　D. $[1,2)$

2. $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$ 等于(　　)

A. $1+i$　　B. $1-i$

C. $-1+i$　　D. $-1-i$

3.设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，则下列结论中正确的是(　　)

A. $f(x)g(x)$是偶函数　　B. $|f(x)|g(x)$是奇函数

C. $f(x)|g(x)|$是奇函数　　D. $|f(x)g(x)|$是奇函数

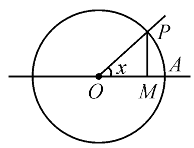
4. 已知 F 为双曲线 $C:x^2-my^2=3m(m>0)$ 的一个焦点，则点 F 到双曲线 C 的一条渐近线的距离为(　　)

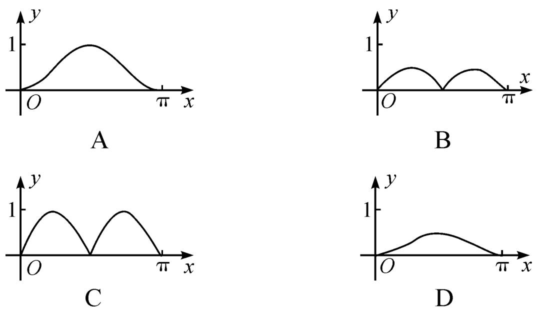
A. $\sqrt{3}$　　B. 3　　C. $\sqrt{3}m$　　D. $3m$

5. 四位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为(　　)

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{3}{8}$　　C. $\frac{5}{8}$　　D. $\frac{7}{8}$

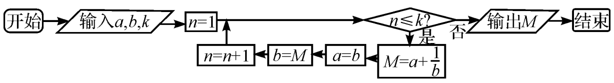
6. 如图，图 O 的半径为 1，A 是圆上的定点，P 是圆上的动点，角 x 的始边为射线 OA，终边为射线 OP，过点 P 作直线 OA 的垂线，垂足为 M，将点 M 到直线 OP 的距离 y 表示成关于 x 的函数 $f(x)$，则 $y=f(x)$ 在$[0,\pi]$上的图象大致为(　　)





7. 执行下面的程序框图，若输入的 a,b,k 分别为 1,2,3，则输出的 M 等于(　　)

A. $\frac{20}{3}$　　B. $\frac{7}{2}$　　C. $\frac{16}{5}$　　D. $\frac{15}{8}$



8. 设 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，则(　　)

A. $3\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　B. $3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

C. $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　D. $2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

9. 不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant1,\\x-2y\leqslant4\end{cases}$的解集为 D，有下面四个命题：

$P_1:\forall(x,y)\in D,x+2y\geqslant-2$，

$P_2:\exists(x,y)\in D,x+2y\geqslant2$，

$P_3:\forall(x,y)\in D,x+2y\leqslant3$，

$P_4:\exists(x,y)\in D,x+2y\leqslant-1$，

其中的真命题是(　　)

A. P_2,P_3　　B. P_1,P_2

C. P_1,P_3　　D. P_1,P_4

10. 已知抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 是 l 上一点，Q 是直线 PF 与 C 的一个交点，若 $\overrightarrow{PF}=4\overrightarrow{FQ}$，则$|QF|$等于(　　)

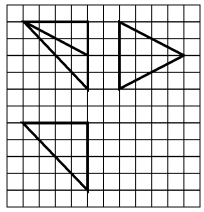
A. $\frac{7}{2}$　　B. 3　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 2

11. 已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$，若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，则 a 的取值范围是(　　)

A. $(2,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-2)$　　D. $(-\infty,-1)$

12. 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的各条棱中，最长的棱的长度为(　　)



A. $6\sqrt{2}$　　B. 6

C. $4\sqrt{2}$　　D. 4

第Ⅱ卷

二、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分)

13. $(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为________.(用数字填写答案)

14. 甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A,B,C 三个城市时，甲说：我去过的城市比乙多，但没去过 B 城市；乙说：我没去过 C 城市；丙说：我们三个去过同一城市.由此可判断乙去过的城市为________.

15. 已知 A,B,C 为圆 O 上的三点，若 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为________.

16. 已知 a,b,c 分别为$\triangle ABC$三个内角 A,B,C 的对边，$a=2$ 且$(2+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$，则$\triangle ABC$面积的最大值为________.

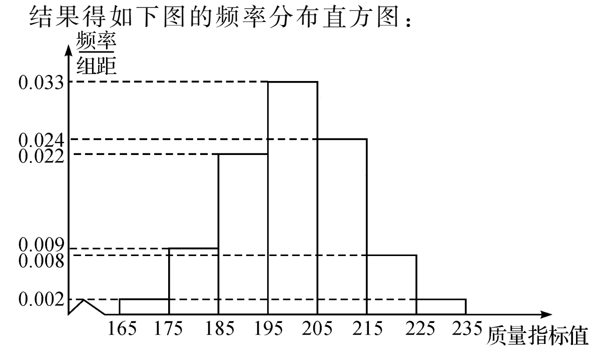
三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_n\neq0$，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，其中 λ 为常数.

(Ⅰ)求证：$a_{n+2}-a_n=\lambda$；

(Ⅱ)是否存在 λ，使得$\{a_n\}$为等差数列？并说明理由.

18. (本小题满分 12 分)从某企业生产的某种产品中抽取 500 件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量结果得如下图的频率分布直方图：



(Ⅰ)求这 500 件产品质量指标值的样本平均值 $\bar{x}$ 和样本方差 s^2;(同一组的数据用该组区间的中点值作代表)

(Ⅱ)由直方图可以认为,这种产品的质量指标 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$,σ^2 近似为样本方差 s^2.

(ⅰ)利用该正态分布,求 $P(187.8<Z<212.2)$;

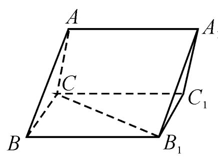
(ⅱ)某用户从该企业购买了 100 件这种产品,记 X 表示这 100 件产品中质量指标值位于区间 $(187.8,212.2)$ 的产品件数.利用(ⅰ)的结果,求 EX.

附:$\sqrt{150}\approx 12.2$;若 $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)=0.6826$,$P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)=0.9544$.

19.(本小题满分 12 分)如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧面 BB_1C_1C 为菱形,$AB\perp B_1C$.

(Ⅰ)求证:$AC=AB_1$;

(Ⅱ)若 $AC\perp AB_1$,$\angle CBB_1=60°$,$AB=BC$,求二面角 $A-A_1B_1-C_1$ 的平面角的余弦值.



20.(本小题满分 12 分)已知点 $A(0,-2)$,椭圆 E:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,$F$ 是椭圆 E 的右焦点,直线 AF 的斜率为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$,O 为坐标原点.

(Ⅰ)求椭圆 E 的方程;

(Ⅱ)设过点 A 的动直线 l 与椭圆 E 相交于 P,Q 两点,当$\triangle OPQ$ 的面积最大时,求直线 l 的方程.

21.(本小题满分 12 分)设函数 $f(x)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$,曲线 $y=f(x)$ 在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y=e(x-1)+2$.

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)求证:$f(x)>1$.

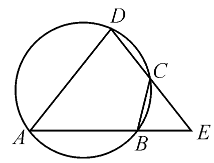
【选考题】

22.(本小题满分 10 分)选修 4-1:几何证明选讲

如图,四边形 $ABCD$ 是$\odot O$ 的内接四边形,AB 的延长线与 DC 的延长线交于点 E,且 $CB=CE$.

(Ⅰ)求证:$\angle D=\angle E$;

(Ⅱ)设 AD 不是$\odot O$ 的直径,AD 的中点为 M,且 $MB=MC$,求证:$\triangle ADE$ 为等边三角形.



23.(本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

已知曲线 C:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$,直线 l:$\begin{cases}x=2+t,\\ y=2-2t,\end{cases}$($t$ 为参数)

(Ⅰ)写出曲线 C 的参数方程和直线 l 的普通方程;

(Ⅱ)过曲线 C 上任意一点 P 作与 l 夹角为 30°的直线,交 l 于点 A,求$|PA|$的最大值与最小值.

24.(本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

若 $a>0$,$b>0$,且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$.

(Ⅰ)求 a^3+b^3 的最小值;

(Ⅱ)是否存在 a,b,使得 $2a+3b=6$?并说明理由.

【评注】整份试卷就难度而言，可分为三个部分：

第一部分，基本题，即 1～11，13～15，17～19，22～24(选考)，基本占 60%(约 90 分)；

第二部分，中档题，即 12，16 及 20，约占 30%(约 45 分)；

第三部分，提高题，即 21 题，约占 10%(约 15 分).

对于本卷而言(几乎是所有的情况)，拿到了基本题和中档题的分，就已经稳稳当当地超过 130 分了(不低于 135 分)！其实，本套新课标卷的真正难题只有第 21 题！本题满分 12 分，第 1 小题求 a,b，属于容易题，真正难点在于第 2 小题，也就 8 分左右！除了构造双函数的基本解法，再给出如下分析：

本题突破只构造一个辅助函数来解决问题的常规思维，构造了两个函数，一个有最小值，一个有最大值，解法巧妙.其实，这并非是新奇的方法，而是基于如果，按常规构造将出现“无法求出导数的零点，从而无法求出函数的最小值”的困惑，由此所做出的变式处理策略而已！对本例若心中存在“模型”意识，还有以下解法.

$\ln x>\frac{1}{e^x}-\frac{2}{ex}\Leftrightarrow e\ln x-\frac{1}{e^{x-1}}+\frac{2}{x}>0$，而 $e^{x-1}\geqslant x$(对任意 $x>0$)，可得 $-\frac{1}{e^{x-1}}\geqslant-\frac{1}{x}$；

故只要证明 $e\ln x-\frac{1}{x}+\frac{2}{x}=e\ln x+\frac{1}{x}>0$；于是尝试构造辅助函数 $h(x)=e\ln x+\frac{1}{x}(x>0)$，

$h'(x)=\frac{e}{x}-\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow x=\frac{1}{e}$；$h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{e}\right)=0$，

而从 $-\frac{1}{e^{x-1}}\geqslant-\frac{1}{x}$ 到 $h(x)=e\ln x+\frac{1}{x}\geqslant 0$，等号不能同时成立，故原不等式成立.

有兴趣的同学还可再做些尝试！现在，构造辅助函数已经成为解答多数高考试卷压轴题的基本技巧，为使同学们眼界更为开阔，求解策略更为灵活，请注意 2010 年～2014 年新课标卷导数解答题均为当年压轴题，解决的基本策略都是构造辅助函数，具体方法如二次甚至多次构造(2010 年)、选择关键部分构造(2011 年)、参变分离转化构造(2010 年、2011 年)、参考几何意义构造(2012 年)、搭桥构造(2013 年)、先放缩后构造(2013 年、2014 年)、构造双函数(2013 年、2014 年)消元后构造(2016 年Ⅰ卷)复合函数分层构造(2016 年Ⅱ卷)等；若同学们还想借鉴其他省市在此处命题与解答的一些技巧，笔者特推荐拙著《高考压轴题破题 36 计》(内有系统讲述).

2016 年新课标Ⅰ、Ⅱ卷，2016 年新课标Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ卷文理科试题有几个值得关注的地方，在这里结合一些典型试题作初步探析：

第一，整卷难度明显降低，尤其是三角、数列、立体几何、解析几何均比以往简单(其实导数也是!)如数列，就放在 2014 年解答题的第一个，而且考查的是递推数列和不等式放缩性的证明，使得太多考生思维受阻，2015 年则又完全回归为常规题型.

第二，在整卷难度下降的背景下，对概率统计，尤其是统计的考查近年来明显加强.其特点是难度不大，但综合性与联系实际的要求明显提高.从 2010 年初次尝试在第 16 题(最后一个填空题)考查正态分布(与电子元件串并联，即可转化为互斥与独立事件概率交汇)，堪称经典；2011 年则为随机模拟、几何概型与定积分整合；2012 年、2013 年主要是随机变量为分段函数型；2014 年Ⅰ卷考查正态分布、Ⅱ卷则为线性回归分析；2015 年Ⅰ卷考查线性回归方程及其实际意义，Ⅱ卷则属基本题型：茎叶图与独立互斥事件概率.

第三，以核心知识为载体考查核心思维方法与数学思维本质的主旨更为明显，如加强对于数形结合思想、逻辑分析等思维方式的考查.

例 1 (2016 年新课标 Ⅱ 卷理 12)已知函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$，若函数 $y=\frac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_m,y_m)，则 $\sum_{i=1}^{m}(x_i+y_i)$ 等于(　　)

A. 0　　B. m　　C. $2m$　　D. $4m$

【解析】可用特例法求解：由于 $f(-x)+f(x)=2$，不妨设 $f(x)=x+1$，与函数 $y=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$ 的交点分别为 $(1,2)$，$(-1,0)$，故 $x_1+x_2+y_1+y_2=2$，故选 B.

【评注】本题中两个函数都有对称中心 $(0,1)$. 可用通法求解：设两个图象从左到右的交点依次为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_m,y_m)，由于对称中心为 $(0,1)$，故有 $x_1+x_m=x_2+x_{m-1}=x_3+x_{m-2}=\cdots=0$，$y_1+y_m=y_2+y_{m-1}=y_3+y_{m-2}=\cdots=2$. 所以 $\sum_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=\sum_{i=1}^{m}y_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(y_i+y_{m+1-i})=\frac{1}{2}\cdot 2m=m$.

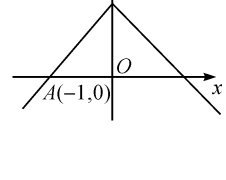
例 2 (2015 年新课标Ⅱ卷理 12)设函数 $f(x)$ 为奇函数，$f(-1)=0$，当 $x>0$ 时 $xf'(x)-f(x)<0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$　B. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$　D. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

【解析】当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0\Leftrightarrow\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'<0$.

构造辅助函数 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $F'(x)<0$；得 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减；又 $F(-1)=0=-F(1)$，得 $F(1)=0$；$f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 为偶函数，结合偶函数性质画出函数 $F(x)$ 的示意图如图所示. 易知：



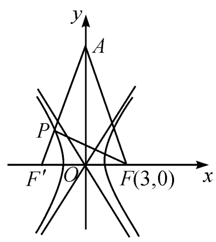
使得$f(x)>0$成立的x的取值范围是$(-\infty,-1)\cup(0,1)$，选 A.

【评注】本题为含技能技巧的求解对照法与数形结合互用，当然也可取一个符合题意的具体函数验证(方法3)；考查的知识和方法主要有奇偶性、合成函数、函数图象特征、导函数与单调性关系等，属于对函数性质的深度考查！本卷第10题也是考查函数图象，其背景是平面图形，其实不必求函数$f(x)$的解析表达式，只要用运动变化的观点作一个过程考查，并切取几个关键瞬间即可！这考查的是运动变化，是函数的本质属性！注意，换背景考查运动变化的思维方式，还可见下例3.

例3　(2015年新课标Ⅰ卷文16)F是双曲线C：$x^2-\frac{y^2}{8}=1$的右焦点，$A(0,6\sqrt{6})$，P是双曲线C左支上的一点，当$\triangle APF$的周长最小时，该三角形的面积为________.

【解析】$a=1$，$b=2\sqrt{2}$，$c=3$，$l_{\triangle}=|AF|+|AP|+|PF|=|AF|+|AP|+2a+|PF'|=|AF|+2+|AP|+|PF'|\geqslant|AF|+2+|AF'|$，

故$(l_{\triangle})_{\min}=|AF|+2+|AF'|$，当且仅当$A,P,F'$三点共线.



直线AF'的方程为$\frac{x}{-3}+\frac{y}{6\sqrt{6}}=1$，即$y=2\sqrt{6}(x+3)$，代入$x^2-\frac{y^2}{8}=1$可得$x^2+9x+14=0\Rightarrow x=-2$或$x=-7$(舍)，即$P(-2,2\sqrt{6})$.

直线AF的方程为$\frac{x}{3}+\frac{y}{6\sqrt{6}}=1$，即$2\sqrt{6}x+y-6\sqrt{6}=0$.

点P到直线AF的距离为$d=\frac{|-4\sqrt{6}+2\sqrt{6}-6\sqrt{6}|}{\sqrt{25}}=\frac{8\sqrt{6}}{5}$，

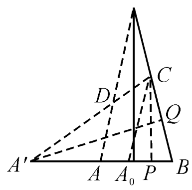
故$S_{\triangle APF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8\sqrt{6}}{5}\cdot\sqrt{3^2+(6\sqrt{6})^2}=12\sqrt{6}$.

【评注】本题要用到双曲线定义进行转化，并分析图形几何特征，考虑三点共线时三角形周长最小；再在最小的情况下计算三角形面积.既需要分析几何特征并转化为代数形式，又要进行必要的字符运算，凸显了解析几何的本质特征.

第四，新课标卷中的“平面几何”类型也值得关注.除了专门的选做题(第22题)，必做题(如2009年第16题、2010年第16题)，平面几何的味道都较浓.再如：

例4　(2015年新课标Ⅰ卷理16)在四边形$ABCD$中，$\angle A=\angle B=\angle C=75^\circ$，$BC=2$，则$AB$边的取值范围为________.

【解析】如图所示，从运动变化观点考查，AB的极端位置如下：



“最小化”是过点C作AD平行线CA_0，此时A_0B最短(但取不到：为极限位置)；

“最大化”则是延长CD与BA交于点A'，此时$A'B$最长(但也取不到：为极限位置)；

分别作垂线CP，$A'Q$，计算即可：

$$A_0B=2\times2\sin15^\circ=4\sin(45^\circ-30^\circ)$$
$$=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{6}-\sqrt{2};$$
$$A'B=\frac{1}{\sin15^\circ}=\frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

故AB边的取值范围为$(\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

第五，关于对压轴题——函数与导数的考查，其基本策略还是分题把关，主要分布在第12、16、21题的位置.

1.对于函数核心知识与核心思维方法的深度考查.

例5　(2016年新课标Ⅰ卷理12)已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2})$，$x=-\frac{\pi}{4}$为$f(x)$的零点，$x=\frac{\pi}{4}$为$y=f(x)$图象的对称轴，且$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$上单调，则$\omega$的最大值为(　　)

A. 11　　B. 9　　C. 7　　D. 5

【解析】因为$x=\frac{\pi}{4}$为$y=f(x)$图象的对称轴，所以$\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{T}{4}+kT$，$\frac{\pi}{2}=\frac{4k+1}{4}T=\frac{4k+1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}$，所以$\omega=4k+1(k\in\mathbf{N}^*)$.

又因为$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$上单调，所以$\frac{5\pi}{36}-\frac{\pi}{18}=\frac{\pi}{12}\leqslant\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{2\omega}$，即$\omega\leqslant12$.

由此可得ω的最大值为9，选B.

【评注】本题将三角函数单调性与对称性结合在一起进行考查，新颖有趣.注意本题解法中用到的两个结论：

①$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A\neq0,\omega\neq0)$的单调区间的长度是半个周期；

②若$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A\neq0,\omega\neq0)$的图象关于直线$x=x_0$对称，则$f(x_0)=A$或$f(x_0)=-A$.

例6　(2015年新课标Ⅰ卷文12)曲线$y=f(x)$与曲线$y=2^{x+a}$关于直线$y=-x$对称，且$f(-2)+f(-4)=1$，则a等于(　　)

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 4

【解析】设(x,y)为函数$y=f(x)$图象上任意一点，则此点关于直线$y=-x$的对称点为$(-y,-x)$，且在函数$y=2^{x+a}$图象上，即$-x=2^{-y+a}\Rightarrow y=a-\log_2(-x)$ $\Rightarrow f(x)=a-\log_2(-x)$.

于是，有$1=f(-2)+f(-4)=a-\log_2 2+a-\log_2 4=2a-3\Rightarrow a=2$.

【评注】本题难度不大，但考查函数与曲线的关系，其本质是考查对应，这里其实蕴含着反函数的概念，体现的是函数与曲线的本质区别！

例7 (2015年新课标Ⅱ卷文12)设$f(x)=\ln(1+|x|)-\dfrac{1}{1+x^2}$，则使得$f(x)>f(2x-1)$成立的$x$的取值范围是(　　)

A. $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$

B. $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

C. $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

D. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$

【解析】观察所给函数$f(x)=\ln(1+|x|)-\dfrac{1}{1+x^2}$的结构特征，可看出$f(x)$为偶函数，且在$[0,+\infty)$上为增函数，故在$(-\infty,0]$上为减函数. 于是有$f(x)>f(2x-1)\Leftrightarrow f(|x|)>f(|2x-1|)\Leftrightarrow|x|>|2x-1|\Leftrightarrow x^2>(2x-1)^2\Rightarrow\dfrac{1}{3}<x<1$.

2. 对于导数的考查. 考查切线的有2015年新课标Ⅰ卷第20(1)题、第21(1)题、2015年新课标Ⅱ卷文第16题、2016年新课标Ⅱ卷理第16题、2016年新课标Ⅱ卷文第20(Ⅰ)题、2016年新课标Ⅲ卷文第16题；仍需要构造辅助函数的是2015年新课标Ⅱ卷理第12题、文理第21题；而2015年新课标Ⅰ卷第21题不需要构造辅助函数，而是回归常态：在研究单调性和极值情况下讨论含参函数的零点；2015年新课标Ⅰ卷理第12题则别有趣味：用导数求解，抽象且麻烦，可考虑归纳转化为数列单调性来解决(本质上还是函数)！

2016年新课标卷对导数的考查既有常规继承，又有突破创新. 常规继承的有Ⅰ卷理第21题、Ⅱ卷文第20题等，突破创新的有：Ⅱ卷文第21题构造辅助函数求导要用到公式$(C^x)'=C^x\ln C$，较少使用；新课标Ⅲ卷理第21题，在三函数求导之后就不用导数，而是要放缩不等式了！新课标Ⅱ卷理第21题则需要从复合函数单调性角度求值域.

例8 (2015年新课标Ⅱ卷理21)设$f(x)=e^{mx}+x^2-mx$，

(Ⅰ)求证：$f(x)$在$(-\infty,0)$上递减，在$(0,+\infty)$上递增；

(Ⅱ)若对任意$x_1,x_2\in[-1,1]$，都有$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant e-1$，求$m$的取值范围.

【解析】(Ⅰ)略；(Ⅱ)“对任意$x_1,x_2\in[-1,1]$，$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant e-1$”等价于$f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\leqslant e-1$；

由(Ⅰ)知，$f(x)_{\min}=f(0)=0$，$f(x)_{\max}=\max\{f(-1),f(1)\}$；

故(Ⅱ)成立$\Leftrightarrow\begin{cases}f(-1)\leqslant e-1\\f(1)\leqslant e-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^m-m\leqslant e-1\\e^{-m}+m\leqslant e-1\end{cases}$①；

根据其特征构造辅助函数$g(t)=e^t-t-e+1$，则$g'(t)=e^t-1$.

容易得到：$g(t)$在$[0,+\infty)$上递增，在$(-\infty,0)$上递减；又$g(1)=0$，$g(-1)=e^{-1}+2-e<0$；

故当$m\in[-1,1]$时，$g(m)\leqslant 0$，$g(-m)\leqslant 0$，①式成立；当$m>1$时，$g(t)$单调递增，$g(m)>0\Rightarrow e^m-m>e-1$，①式不成立；当$m<-1$时，$g(-m)>0\Rightarrow e^{-m}+m>e-1$，①式不成立；

总之，$m\in[-1,1]$为所求.

【评注】本题两小问为递进式设问，解决(Ⅱ)要在(Ⅰ)讨论单调性的基础上，但更为重要的是突出了两个特色：一是转化问题，即原问题等价于“$f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\leqslant e-1$”；二是根据①式结构特征构造相应的辅助函数$g(t)$. 相应的文科压轴题也是构造辅助函数$g(a)=\ln a+a-1$，但要简单得多！值得说明的是：新课标Ⅰ卷第21题第(Ⅱ)小题作为压轴题，则不必构造辅助函数，只需在讨论单调性和极值的基础上研究函数的零点个数即可，很常规的做法！这里只给出试题，解答略(留给同学们尝试).

(2015年新课标Ⅰ卷理21)设函数$f(x)=x^3+ax-\dfrac{1}{4}$，$g(x)=-\ln x$.

(Ⅰ)问a为何值时，x轴是曲线$y=f(x)$的切线？

(Ⅱ)设$\min\{a,b\}$表示a,b中的最小值，讨论函数$h(x)=\min\{f(x),g(x)\}$的零点的个数.

例9 (2016年新课标Ⅰ卷理21)已知函数$f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$有两个零点.

(1)求a的取值范围；

(2)设x_1,x_2是$f(x)$的两个零点，求证：$x_1+x_2<2$.

【解析】(1) $f'(x)=(x-1)e^x+2a(x-1)=(x-1)(e^x+2a)$.

①设$a=0$，则$f(x)=(x-2)e^x$，$f(x)$只有一个零点；

②设$a>0$，则当$x\in(-\infty,1)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$. 所以$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增. 又$f(1)=-e$，$f(2)=a$，取b满足$b<0$且$b<\ln\dfrac{a}{2}$，则$f(b)>\dfrac{a}{2}(b-2)+a(b-1)^2$

$=a\left(b^2-\dfrac{3}{2}b\right)>0$,

故 $f(x)$ 存在两个零点.

③设 $a<0$,由 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=\ln(-2a)$.

若 $a\geqslant-\dfrac{e}{2}$,则 $\ln(-2a)\leqslant1$;故当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$;因此 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.又当 $x\leqslant1$ 时,$f(x)<0$,所以 $f(x)$ 不存在两个零点.

若 $a<-\dfrac{e}{2}$,则 $\ln(-2a)>1$,故当 $x\in(1,\ln(-2a))$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(\ln(-2a),+\infty)$ 时,$f'(x)>0$.因此 $f(x)$ 在 $(1,\ln(-2a))$ 上单调递减,在 $(\ln(-2a),+\infty)$ 上单调递增.又当 $x\leqslant1$ 时,$f(x)<0$,所以 $f(x)$ 不存在两个零点.

综上,a 的取值范围为 $(0,+\infty)$.

(2)不妨设 $x_1<x_2$,由(1)知 $x_1\in(-\infty,1)$,$x_2\in(1,+\infty)$,$2-x_2\in(-\infty,1)$,$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减,所以,$x_1+x_2<2$ 等价于 $f(x_1)>f(2-x_2)$.

而 $f(x_1)=0$,故等价于 $f(2-x_2)<0$.

由于 $f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}+a(x_2-1)^2$,而 $f(x_2)=(x_2-2)e^{x_2}+a(x_2-1)^2=0$,消去 a 可得 $f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}-(x_2-2)e^{x_2}$.

设 $g(x)=-xe^{2-x}-(x-2)e^x$,则 $g'(x)=(x-1)\cdot(e^{2-x}-e^x)$.

所以当 $x>1$ 时,$g'(x)<0$,而 $g(1)=0$,故当 $x>1$ 时,$g(x)<0$.

从而 $g(x_2)=f(2-x_2)<0$,故 $x_1+x_2<2$.

【评注】顺利解决本题,值得研究的"重点"有三个:一是借助于导数来研究函数零点问题,需要对求导函数中的参数进行分类讨论,分类讨论的基本标准是导函数零点的范围问题;二是在某单调区间内巧取自变量的值以便于容易判断函数值的符号;三是对于第(Ⅱ)小题,消掉参数 a 和 x_1 后构造辅助函数 $g(x)$ 来解决问题.

例 10 (2016 年新课标Ⅱ卷理 21)

(1)讨论函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}e^x$ 的单调性,并证明当 $x>0$ 时,$(x-2)e^x+x+2>0$;

(2)求证:当 $a\in[0,1)$ 时,函数 $g(x)=\dfrac{e^x-ax-a}{x^2}$ $(x>0)$ 有最小值.设 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$,求函数 $h(a)$ 的值域.

【解析】 (1)$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x+2)e^x-(x-2)e^x}{(x+2)^2}=\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\geqslant0,$$

且仅当 $x=1$ 时,$f'(x)=0$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(-2,+\infty)$ 上单调递增,

因此当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f(x)>f(0)=-1$,

所以 $(x-2)e^x>-(x+2)$,$(x-2)e^x+x+2>0$

(2)$g(x)=\dfrac{(x-2)e^x+a(x+2)}{x^2}=\dfrac{x+2}{x^2}(f(x)+a)$,

由(1)知,$f(x)+a$ 单调递增,对任意 $a\in[0,1)$,$f(0)+a=a-1<0$,$f(2)+a=a\geqslant0$,因此,存在唯一 $x_0\in(0,2]$,使得 $f(x_0)+a=0$,即 $g'(x_0)=0$,

当 $0<x<x_0$ 时,$f(x)+a<0$,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减;

当 $x>x_0$ 时,$f(x)+a>0$,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增.

因此 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最小值,最小值为 $g(x_0)$.

由于 $f(x_0)+a=0$,即 $a=-f(x_0)=-\dfrac{x_0-2}{x_0+2}e^{x_0}$ (※),

$$故\ g(x_0)=\frac{e^{x_0}-a(x_0+1)}{x_0^2}=\frac{e^{x_0}+f(x_0)(x_0+1)}{x_0^2}$$

$$=\frac{e^{x_0}+\frac{x_0-2}{x_0+2}e^{x_0}(x_0+1)}{x_0^2}=\frac{e^{x_0}}{x_0+2}.$$

于是 $h(a)=g(x_0)=\dfrac{e^{x_0}}{x_0+2}$.

由于我们无法从(※)式中直接解出 x_0,从而深入观察以下两个关键函数:

$$\begin{cases}a=-f(x_0)=-\dfrac{x_0-2}{x_0+2}e^{x_0},\\ h(a)=\dfrac{e^{x_0}}{x_0+2}.\end{cases}$$

我们发现:可借助于其单调性,从复合函数角度尝试求解:

由 $\left(\dfrac{e^x}{x+2}\right)'=\dfrac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}>0$ 可知 $\dfrac{e^x}{x+2}$ 单调递增,

所以由 $x_0\in(0,2]$ 得 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{e^0}{0+2}<h(a)=\dfrac{e^{x_0}}{x_0+2}\leqslant\dfrac{e^2}{2+2}=\dfrac{e^2}{4}$.

因为 $\dfrac{e^2}{x+2}$ 单调递增,

又由(1)知:$f(x)$ 在 $(0,2]$ 上递增,即 $a=-f(x)$ 在 $(0,2]$ 上递减,故对任意 $\lambda\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{e^2}{4}\right]$,存在唯一的 $x_0\in(0,2]$,使得 $a=-f(x_0)\in[0,1)$,且有 $h(a)=\lambda$,

所以 $h(a)$ 的值域是 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{e^2}{4}\right]$,

综上,当 $a\in[0,1)$ 时,$g(x)=h(a)$,$h(a)$ 的值域是 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{e^2}{4}\right]$.

【评注】顺利解决本题需注意以下两点:(1)分式型函数求导要准确而快速;(2)(Ⅱ)是一个典型的复合函数求值域问题,难度较大,注意:(Ⅰ)(Ⅱ)是典型的递进式设问,即解答(Ⅱ)要用到(Ⅰ)的结论:由于 x_0 作为导

函数的隐零点，无法直接求解，需要巧妙地借助复合函数的单调性来解决问题，这是一道考查数学理性思维的好题，值得深入思考！2015年四川卷压轴题有类于此，可资借鉴.

例11 （2016年新课标Ⅲ卷理21）设函数 $f(x)=a\cos2x+(a-1)(\cos x+1)$，其中 $a>0$，记 $|f(x)|$ 的最大值为 A.

(1)求 $f'(x)$； (2)求 A； (3)求证：$|f'(x)|\leqslant 2A$.

【解析】(1)$f'(x)=-2a\sin2x-(a-1)\sin x$.

(2)当 $a\geqslant1$ 时，由绝对值不等式和余弦函数的有界性可得

$|f(x)|=|a\cos2x+(a-1)(\cos x+1)|\leqslant a+2(a-1)=3a-2=f(0)$，

因此，$A=3a-2$.

当 $0<a<1$ 时，将 $f(x)$ 变形为 $f(x)=2a\cos^2x+(a-1)\cos x-1$.

令 $g(t)=2at^2+(a-1)t-1$，由于 A 是 $|g(t)|$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值，而根据二次函数在闭区间上的单调性可知，最值只能在端点与顶点处取得，这里 $g(-1)=a$，$g(1)=3a-2$，且当 $t=\frac{1-a}{4a}$ 时，$g(t)$ 取得极小值，极小值为 $g(\frac{1-a}{4a})=-\frac{(a-1)^2}{8a}-1=-\frac{a^2+6a+1}{8a}$.

令 $-1<\frac{1-a}{4a}<1$，解得 $a<-\frac{1}{3}$（舍去），或 $a>\frac{1}{5}$.

于是，作如下讨论：

①当 $0<a\leqslant\frac{1}{5}$ 时，$g(t)$ 在 $(-1,1)$ 内无极值点，$|g(-1)|=a$，$|g(1)|=2-3a$，$|g(-1)|<|g(1)|$，所以 $A=2-3a$.

②当 $\frac{1}{5}<a<1$ 时，由 $g(-1)-g(1)=2(1-a)>0$ 知 $g(-1)>g(1)>g\left(\frac{1-a}{4a}\right)$.

又 $\left|g\left(\frac{1-a}{4a}\right)\right|-|g(-1)|=\frac{(1-a)(1+7a)}{8a}>0$，

所以 $A=\left|g\left(\frac{1-a}{4a}\right)\right|=\frac{a^2+6a+1}{8a}$.

综上，有

$$A=\begin{cases}2-3a,0<a\leqslant\frac{1}{5},\\ \frac{a^2+6a+1}{8a},\frac{1}{5}<a<1,\\ 3a-2,a\geqslant1.\end{cases}$$

(3)由(1)得 $|f'(x)|=|-2a\sin2x-(a-1)\sin x|\leqslant 2a+|a-1|$.

结合(2)的结论可得：

①当 $0<a\leqslant\frac{1}{5}$ 时，$|f'(x)|\leqslant 2a+|a-1|=1+a$，而 $2A=2(2-3a)$，

$2(2-3a)-(1+a)=3-7a>3-7\times\frac{1}{5}=\frac{8}{5}>0$，

故 $|f'(x)|\leqslant 2A$；

②当 $\frac{1}{5}<a<1$ 时，$A=\frac{a}{8}+\frac{1}{8a}+\frac{3}{4}\geqslant1$，所以 $|f'(x)|\leqslant1+a<2\leqslant2A$.

③当 $a\geqslant1$ 时，$|f'(x)|\leqslant3a-1\leqslant3a-1+3(a-1)=6a-4=2A$，所以 $|f'(x)|\leqslant2A$.

【评注】本题值得注意的考查动向是：考查导数的知识与方法极为弱化（只有三角函数的求导），其实是借助于三角函数恒等变换、三角函数有界性来等价转化问题，转化为在闭区间上含参二次函数最值的讨论，以及通过绝对值不等式、均值不等式以及作差、逆向分析等逻辑推理，尝试放缩来证明不等式，最终达到综合与灵活考查数学核心素养的目的.

例12 （2015年新课标Ⅰ卷理12）设 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$，$a<1$. 若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0)<0$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $[-\frac{3}{2e},1)$　　B. $[-\frac{3}{2e},\frac{3}{4})$

C. $[\frac{3}{2e},\frac{3}{4})$　　D. $[\frac{3}{2e},1)$

【解析】作为选择题，快速选出正确答案并不难：观察所给四个选择支的结构特征可见，只要关注4个值：$-\frac{3}{2e},\frac{3}{2e},\frac{3}{4},1$，逐一验证即可（略）. 其实，观察所给函数的结构特征，容易作如下归纳：

$f(0)=a-1<0$（即0是整数解）；

向右归纳：$f(1)=3e^2-a>3e^2-1>0$，然后越来越大，不可能了！

向左归纳：$f(-1)=-\frac{3}{e}+2a\geqslant0\Rightarrow a\geqslant\frac{3}{2e}$，$f(-2)=-\frac{5}{e^2}+3a\geqslant0\Rightarrow a\geqslant\frac{5}{3e^2}\left(<\frac{3}{2e}\right)$；

也不必再算了！故有 $a\in\left[\frac{3}{2e},1\right)$，选D.

【评注】本题很容易考虑用导数求解：仔细观察求导式 $f'(x)=e^x(2x+1)-a$ 才发现判断其符号并非易事！（有兴趣的同学可尝试）这里给出解决此类问题的另一常规思路：分离参变量法，并弥补上述归纳不严密的缺陷！若将原题“小题大做”，可推广为：

求 a 的取值范围，使得恰有 k 个整数满足 $f(x_0)<0$（对任意给定 $k\in\mathbf{N}^*$）.

解析如下：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(n)=e^n(2n-1)-a(n-1)>(2n-1)-(n-1)=n>0$；

而 $f(-n)=e^{-n}(-2n-1)-a(-n-1)\geqslant0\Rightarrow a\geqslant\frac{2n+1}{n+1}\cdot\frac{1}{e^n}$.

令 $a_n=\frac{2n+1}{n+1}\cdot\frac{1}{e^n}$，则

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+3}{n+2}\cdot\frac{n+1}{2n+1}\cdot\frac{1}{e}=\frac{2n^2+5n+3}{2n^2+5n+2}\cdot\frac{1}{e}<1\Rightarrow a_n>a_{n+1}$，

即数列$\{a_n\}$为单调递减数列！

“恰有 k 个整数满足 $f(x_0)<0$”等价于

$$\begin{cases}f(-k)\geqslant 0\\ f(-k+1)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\geqslant\frac{2k+1}{(k+1)e^k},\\ a<\frac{2k-1}{ke^{k-1}},\end{cases}$$

即 $a\in\left[\frac{2k+1}{(k+1)e^k},\frac{2k-1}{ke^{k-1}}\right)(k=1,2,\cdots)$为所求.（当 $k=1$ 时，恰为原试题答案！）

注意：例 11、例 12 反映了导数考查的一个新动向，即：导数与其他相关知识与方法的交汇融合，有时可很少使用导数知识甚至可不用！

纵观近两年 5 套新课标卷都较以前几年简单，这也是与全国教育改革大环境接轨的.近两年其他省市试题总体也较往年简单，其目的之一就是为大学先修进入高中学习和高考选拔作过渡.