高等职业教育“十三五”规划教材

高等数学

主　审　武锡环
主　编　刘讲军
副主编　程万里　李晓东
参　编　阙凤珍　谢　毅　温少挺
　　　　芮伟芳　史慧娟　孙　玲

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书依据“以职业能力为主线构建课程体系和教学内容”的指导思想，力求贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，在保证科学性的基础上注意讲清概念，减少理论证明，注重对学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养。本书共分为十四章，分别是函数、函数的极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、常微分方程、无穷级数、行列式与矩阵、线性方程组、数学史与数学文化。

本书的基本教学学时数约为120学时。可供高职高专院校工科类和经济管理类专业不同学习层次的学生作为教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 刘讲军主编 . —北京：北京理工大学出版社，2017.8
ISBN 978 - 7 - 5682 - 4811 - 2

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①刘…　Ⅲ. ①高等数学-高等职业教育-教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 212057 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
　　　　　(010)82562903(教材售后服务热线)
　　　　　(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 /
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 21.75
字　　数 / 575 千字
版　　次 / 2017 年 8 月第 1 版　2017 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 / 48.00 元

责任编辑 / 江　立
文案编辑 / 王梦春
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 施胜娟

前　　言

为了适应高等职业技术教育培养技术应用型人才的需要，不断提高教学质量，更好地为专业课的教学服务，我们根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程基本要求》编写本书，可作为高职高专院校各专业高等数学课程的选用教材或教学参考书。

本书依据“以职业能力为主线构建课程体系和教学内容”的指导思想，在充分调研的基础上，与专业教师共同商讨，构建了教材的内容体系，加强了教材的实用性、科学性、针对性，力求贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，在保证科学性的基础上注意讲清概念，减少理论证明，注重对学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养。

本书共分十四章，分别是：函数、函数的极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、常微分方程、无穷级数、行列式与矩阵、线性方程组、数学史与数学文化，同时附上学生常用的相关公式。本书内容分章节、分层次编排，供工科类和经济管理类专业不同学习层次的学生选用。

本书的基本教学学时数约为120学时。

本书由刘讲军主编，程万里、李晓东副主编，本书由黄河交通学院武锡环教授主审。任务分配：温少挺编写第1章和第2章及其习题答案；刘讲军编写第3章和第4章第1—5节及其习题答案；史慧娟编写第5章和第12章及其习题答案；谢毅编写第6章及其习题答案；程万里编写第7章和第4章第6—8节总复习题四及其习题答案；李晓东编写第8章和第9章及其习题答案；芮伟芳编写第10章和第13章及其习题答案；阙凤珍编写第11章及其习题答案、附录3；孙玲编写第14章及其习题答案、附录1、附录2。本书在编写过程中得到有关领导与老师的大力支持，他们为本书的编写提出了许多有益的建议，在此表示衷心的感谢。

限于编者的水平，加上成书仓促，书中难免存在缺点和错误，请有关专家及使用本书的教师批评指正。

编　者

目　　录

第 1 章　函　　数

学习要求：

1. 掌握变量、函数的有关概念与性质.
2. 掌握反函数与复合函数的概念.
3. 理解初等函数的概念.

§1－1　函数的概念

一、常量与变量

1. 变量的定义

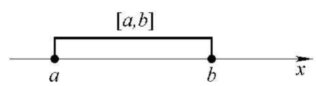
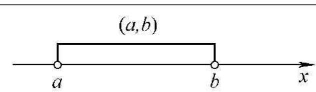
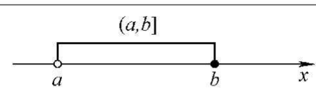
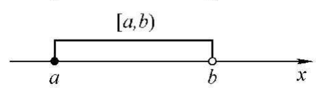
我们在观察某一现象的过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，我们将其称之为**常量**；有的量在过程中变化，也就是可以取不同的数值，我们则将其称之为**变量**.

注：在过程中还有一种量，它虽然是变化的，但是它的变化相对于所研究的对象是极其微小的，我们则把它看作常量.

2. 变量的表示

如果变量的变化是连续的，则常用**区间**来表示其变化范围.

在数轴上来说，区间是指介于某两点之间的线段上点的全体.

区间的名称	区间满足的不等式	区间的记号	区间在数轴上的表示
闭区间	$a \leqslant x \leqslant b$	$[a,b]$	
开区间	$a < x < b$	(a,b)	
半开区间	$a < x \leqslant b$ 或 $a \leqslant x < b$	$(a,b]$ 或 $[a,b)$	 

以上所述的都是有限区间，除此之外，还有无限区间：

$[a,+\infty)$ 表示不小于 a 的实数的全体，也可记为：$\{x \mid x \geqslant a\}$；

$(-\infty,b)$ 表示小于 b 的实数的全体，也可记为：$\{x \mid x < b\}$；

$(-\infty,+\infty)$ 表示全体实数，也可记为 $\mathbf{R}$.

注:其中 $-\infty$ 和 $+\infty$ 分别读作“负无穷大”和“正无穷大”,它们不是数,仅仅是记号.

3. 邻域

以点 x_0 为中心的任何开区间称为点 x_0 的**邻域**,记作 $U(x_0)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$.

所谓点 x_0 的 δ 邻域,是指以 x_0 为中心,以 $2\delta(\delta>0)$ 为长度的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$,记作 $U(x_0,\delta)$.即 $U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$.

在 x_0 的 δ 邻域中去掉 x_0,所得集合记作 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$,称为点 x_0 的去心 δ 邻域,即 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$,或用区间的并表示为 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$.

例如,$U(3,0.5)=\{x \mid |x-3|<0.5\}$ 表示点 3 的 0.5 邻域,也可表示为开区间 $(2.5,3.5)$.$\overset{0}{U}(1,0.25)=\{x \mid 0<|x-1|<0.25\}$ 表示点 1 的 0.25 去心邻域,它可用两个开区间的并表示为 $(0.75,1)\cup(1.1.25)$.

注:$0<|x-x_0|$ 表示 $x\neq x_0$,即邻域内不含点 x_0.

二、函数的定义

1. 函数的定义

如果变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时,变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的**函数**.变量 x 的变化范围叫做这个**函数的定义域**.通常 x 叫做**自变量**,y 叫做**因变量**.

注:为了表明 y 是 x 的函数,我们用记号 $y=f(x)$,$y=F(x)$ 等来表示.这里的字母“f”,“F”表示 y 与 x 之间的对应法则即函数关系,它们可以任意采用不同的字母来表示.

注:如果自变量在定义域内任取一个确定的值时,函数只有一个确定的值和它对应,这种函数叫做单值函数,否则叫做多值函数.这里我们只讨论单值函数.

2. 函数的三要素

函数的定义域、对应法则和值域.

3. 函数的表示

① 解析法:用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法即是解析法.

例 1 直角坐标系中,半径为 r、圆心在原点的圆的方程是:$x^2+y^2=r^2$.

② 表格法:将一系列的自变量值与对应的函数值列成表格来表示函数关系的方法即是表格法.

例 2 在实际应用中,我们经常会用到的平方表、三角函数表等都是用表格法表示的函数.

③ 图示法:用坐标平面上的曲线来表示函数的方法即是图示法.一般用横坐标表示自变量,纵坐标表示因变量.

例 3 直角坐标系中,半径为 r、圆心在原点的圆用图示法表示为图1-1.

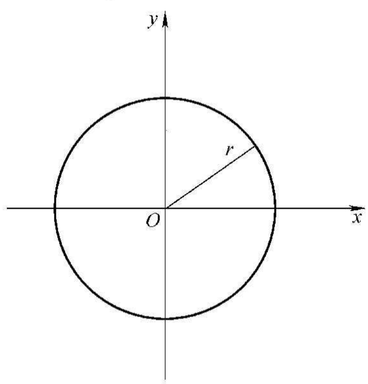


图 1-1

4. 分段函数

在实际应用中经常遇到这样的函数:在其定义域的各个不相交的子集(多为子区间)上,函数分别用不同的解析

表达式表示，这类函数称为分段函数.例如绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

和符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

都是分段函数.

注:分段函数在其整个定义域上是一个函数，而不是几个函数.

习题 1-1

1. 解下列不等式.

(1) $x^2>9$；　　(2) $0<|x-2|\leqslant 2$；

(3) $|x-2|<2$；　　(4) $|x+1|<|x|$.

2. 用区间表示下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　　(2) $y=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

3. 求函数值 $f(0)$，$f(-1)$，$f(1.5)$，$f(1+a)$.

(1) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x^2-1, & |x|>1\end{cases}$；

(2) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ 2x+3, & x>1\end{cases}$.

§1-2　函数的性质

一、函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义(区间 I 可以是函数 $f(x)$ 的整个定义域，也可以是其定义域的一部分)，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in I$，若对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 I 内**有界**.如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 I 内**无界**.换句话说，如果对于任意给定的一个正数 M(不论它多么大)，总有某个 $x\in I$，使得 $|f(x)|>M$，那么 $f(x)$ 在 I 内无界.

注:一个函数 $f(x)$ 如果在其整个定义域内有界，则称 $f(x)$ 为**有界函数**.

例 1　函数 $\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内是有界的.

例 2　函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内有界.因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|\sin x|\leqslant 1$，因此 $f(x)=\sin x$ 是在$(-\infty,+\infty)$ 内的有界函数.

二、函数的单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间(a,b) 内随着 x 增大而增大，即：对于(a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2，

当 $x_1 < x_2$ 时,有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内是**单调增加**的.

如果函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内随着 x 增大而减小,即:对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内是**单调减小**的.

例 3 函数 $f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$上是单调减小的,在区间$(0,+\infty)$上是单调增加的.

三、函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足

$$f(-x)=f(x),$$

则 $f(x)$ 叫做偶函数;

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足

$$f(-x)=-f(x),$$

则 $f(x)$ 叫做奇函数.

注:偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

四、函数的周期性

对于函数 $f(x)$,若存在一个不为零的数 l,使得关系式

$$f(x+l)=f(x).$$

对于定义域内任何 x 值都成立,则 $f(x)$ 叫做**周期函数**,l 是 $f(x)$ 的周期.

注:我们所说的周期函数的周期是指最小正周期.

例 4 函数 $\sin x,\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数;函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

习 题 1-2

1. 单项选择题.

(1) 下列函数中,偶函数是(　　);

A.$x^3+\cos x$　　B.$x\sin x$　　C.$x^3a^{-x^2}$　　D.$\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}\sin x$

(2) 下列函数中,奇函数是(　　);

A.$\sin^3 x+1$　　B.$x|x|$　　C.$x^3\tan x$　　D.$\sin x\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x+1}(a>1)$

(3) 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有定义,下列函数中必为偶函数的是(　　);

A.$y=f(x^3)$　　B.$y=5$　　C.$y=xf(x^2)$　　D.$y=-f(-x)$

(4) 下列函数在其定义域内不为单调函数的是(　　);

A.$y=x^2+1$　　B.$y=6^x$

C.$y=2-\lg(x+1)$　　D.$y=\arcsin x$

(5) 设函数 $f(x)=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\sin\dfrac{x}{n}$（其中 $n\in\mathbf{Z}^{+}$），则 $f(x)$ 是(　　)；

A.无界函数　　B.单调函数　　C.有界函数　　D.以 $3n\pi$ 为周期的函数

(6) 在 R 上，下列函数中为周期函数的是(　　)；

A.$\sin x^{3}$　　B.$x\cos x$　　C.$\sin 2x$　　D.$x\sin x$

(7) 下列函数在 $(0,+\infty)$ 内为有界函数的是(　　)；

A.$y=\dfrac{1}{x}$　　B.$y=\arctan x$　　C.$y=\ln(1+x)$　　D.$y=x^{2}$

(8) 下列函数为无界函数的是(　　).

A.$y=\sec x$　　B.$y=\cos x$　　C.$y=\sin x$　　D.$y=\operatorname{arccot} x$

2. 讨论下列函数的单调性.

(1) $y=\sqrt{2x-x^{2}}$；　　(2) $y=\mathrm{e}^{|x|}$；　　(3) $y=\cos x, x\in[0,2\pi]$.

3. 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x\cos x+\sin x$；　　(2) $f(x)=x^{3}-x^{5}-1$.

4. 判断下列函数是否为周期函数，如果是周期函数，求其周期.

(1) $f(x)=\cos(x-3)$；　　(2) $f(x)=|\sin x|$.

§1－3　反函数与复合函数

一、反函数

1. 反函数的定义

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 R_f，如果对任意一个 $y\in R_f$，D_f 内只有一个数 x 与 y 对应，此 x 适合 $f(x)=y$，这时把 y 看作自变量，x 视为因变量，就得到一个新的函数，称为直接函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$.

由于自变量的记号是任取的，习惯上，把函数 $y=f(x)$ 的反函数写作 $y=f^{-1}(x)$.反函数的定义域记为 $D_{f^{-1}}$，值域记为 $R_{f^{-1}}$，显然，即反函数的定义域等于直接函数的值域，反函数的值域等于直接函数的定义域.

例如，在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内，函数 $y=\tan x$，其值域为 $(-\infty,+\infty)$，与其对应的反函数，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

注：$y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 表示变量 x 和 y 之间的同一关系，因而它们的图形是同一条曲线，而 $y=f^{-1}(x)$ 是 $x=f^{-1}(y)$ 中将 x，y 交换后得到的，因此 $x=f^{-1}(y)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关系自然也相当于把 x 轴和 y 轴互换一下，也就是说把曲线 $x=f^{-1}(y)$ 以直线 $y=x$ 为轴翻转 180° 后所得到曲线就是反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形. 它与直接函数 $y=f(x)$ 所表示的曲线关于直线 $y=x$ 是对称的.

2. 反函数的存在定理

若 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上严格增(减)，其值域为 R，则它的反函数必然在 R 上确定，且严格增(减).

注：严格增(减)即是单调增(减).

例 1 $y=x^2$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$.对于 y 取定的非负值,可求得 $x=\pm\sqrt{y}$.若我们不加条件,由 y 的值就不能唯一地确定 x 的值,也就是说在区间$(-\infty,+\infty)$上,函数不是严格增(减)的,故其没有反函数.如果我们加上条件,要求 $x\geqslant 0$,则对于 $y\geqslant 0$,$x=\sqrt{y}$ 就是 $y=x^2$ 在要求 $x\geqslant 0$ 时的反函数,且该反函数在此要求下严格增.

例 2 函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$上是单调递增的,因此根据反函数存在定理可知它的反函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在$(-\infty,+\infty)$上存在且也是单调增加的.

3. 反函数的性质

在同一坐标平面内,$y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

例 3 函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数,则它们的图形在同一直角坐标系中是关于直线 $y=x$ 对称的.如图 1-2 所示.

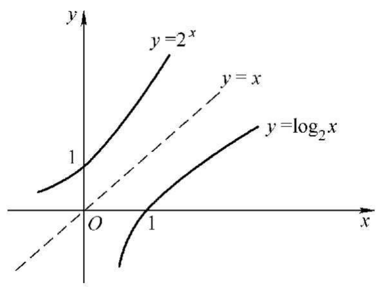


图 1-2

二、复合函数的定义

若 y 是 u 的函数:$y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数:$u=\varphi(x)$,且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内,那么,y 通过 u 的联系也是 x 的函数,我们称后一个函数是由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数,简称**复合函数**,记作 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 叫做中间变量.

注:并不是任意两个函数就能复合;复合函数还可以由更多函数构成.

例 4 函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=2+x^2$ 是不能复合成一个函数的.

因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$中的任何 x 值所对应的 u 值(都大于或等于 2),使 $y=\arcsin u$ 都没有定义.

习 题 1-3

1. 单项选择题.

(1) 下列各对函数中,互为反函数的是( );

A. $y=\sin x, y=\cos x$ B. $y=2^x, y=-2^x$

C. $y=\sec x, y=\cos x$ D. $y=2x, y=\dfrac{x}{2}$

(2) 函数 $y=\log_4 2+\log_4\sqrt{x}$ 的反函数是( );

A. $y=2^{x-1}$ B. $y=2^{2x-1}$ C. $y=4^{2x-1}$ D. $y=4x-1$

(3) 函数 $y=3^x+2$ 的反函数是( );

A. $y=\log_3 x-2$ B. $y=\log_3(x-2)$

C. $y=\log_3 x+2$ D. $y=\log_3(x+2)$

(4) 函数 $y=\pi+\arctan\dfrac{x}{2}$ 的反函数是( );

A. $y=2\tan(x-\pi)$ $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ B. $y=\tan\dfrac{x}{2}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

C. $y=2\tan\frac{x}{2}\quad(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$　　D. $y=\frac{1}{2}\tan x\quad(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

(5) 设 $f(x)=\frac{1-3x}{x-2}$ 与 $g(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，则 $g(x)=(\quad)$；

A. $\frac{1+2x}{x+3}$　　B. $\frac{1-3x}{x-2}$　　C. $\frac{x+3}{1+2x}$　　D. $\frac{x-2}{1-3x}$

(6) 下列各对函数能构成复合函数的是(　　).

A. $y=\lg u, u=1-x^3, x\in(-\infty,1)$

B. $y=\sqrt{u}, u=\cos x, x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$

C. $y=\sqrt{1+u}, u=4-x, x>5$

D. $y=\arccos u, u=\sqrt{2+x^2}, x\in(-\infty,+\infty)$

2. 求下列函数的反函数及反函数的定义域.

(1) $y=\lg(1-x), x\in(-\infty,0)$；　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}, x\in[-2,0]$；

(3) $y=10^{2x+3}$.

3. 在下列各题中，求由所给函数复合而成的复合函数，并求各复合函数的定义域.

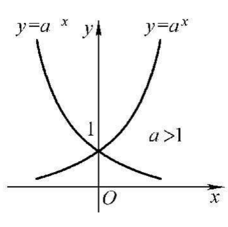
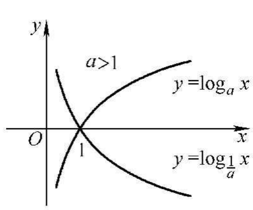
(1) $y=10^u, u=1+x^2$；　　(2) $y=u^2, u=\sin v, v=1+2x$；

(3) $y=\sqrt{u}, u=1-e^x$.

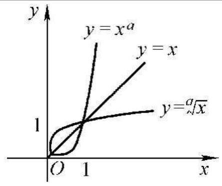
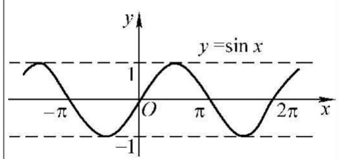
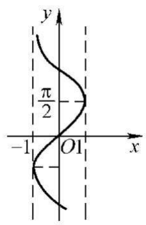
§1-4　初等函数

一、基本初等函数

我们最常用的有五种基本初等函数，分别是：指数函数、对数函数、幂函数、三角函数及反三角函数. 下面我们用表格来把它们总结一下.

函数名称	函数的符号	函数的图形	函数的性质
指数函数	$y=a^x(a>0, a\neq 1)$		① 不论 x 为何值，y 总为正数； ② 当 $x=0$ 时，$y=1$.
对数函数	$y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$		① 其图形总位于 y 轴右侧，并过 $(1,0)$ 点； ② 当 $a>1$ 时，在区间 $(0,1)$ 的值为负；在区间 $(1,+\infty)$ 的值为正；在定义域内单调增.

续表

函数名称	函数的符号	函数的图形	函数的性质
幂函数	$y = x^a$,a 为任意实数	 这里只画出部分函数图形的局部	令 $a = m/n$ ① 当 m 为偶数、n 为奇数时,y 是偶函数; ② 当 m、n 都是奇数时,y 是奇函数; ③ 当 m 为奇数、n 为偶数时,y 在 $(-\infty,0)$ 无意义.
三角函数	$y = \sin x$(正弦函数) 这里只写出了正弦函数		① 正弦函数是以 2π 为周期的周期函数; ② 正弦函数是奇函数且 $\lvert\sin x\rvert \leqslant 1$.
反三角函数	$y = \arcsin x$(反正弦函数) 这里只写出了反正弦函数		由于此函数为多值函数,因此我们将函数值限制在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 内,并称其为反正弦函数的主值.

二、初等函数

由基本初等函数与常数经过有限次的有理运算及有限次的函数复合所产生的、并且能用一个解析式表出的函数称为**初等函数**.

例如,$y=\sqrt{1-x^2}$,$y=\sin^2 x$,$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$ 等都是初等函数.在本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.初等函数是高等数学的主要研究对象.

注:分段函数一般不是初等函数.但是,由于分段函数在其定义域的各个子区间上常由初等函数表示,故我们仍可通过初等函数来研究它们.

习 题 1-4

1. 单项选择题.

(1) 已知 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$,则 $f(x-y)=($　　$)$;

A. $f(x)-f(y)$　　B. $f(y-x)$　　C. $\dfrac{f(x)}{f(y)}$　　D. $\dfrac{f(y)}{f(x)}$

(2) 已知 $f(x)=\log_3 x$,则 $f(x)+f(y)=($　　$)$;

A. $f(\dfrac{x}{y})$　　B. $f(x+y)$　　C. $f(\dfrac{y}{x})$　　D. $f(xy)$

(3) 设 $f(x)=e^2$,则 $f(x+2)-f(x+1)=($　　$)$;

A. e^3　　B. e　　C. 0　　D. $e^{\frac{x+2}{x+1}}$

(4) 函数 $y=f(x)$ 与 $y=-f(x)$ 的图形关于(　　).

A. 原点对称　　B. x 轴对称　　C. y 轴对称　　D. $y=x$ 对称

2. 将下列函数分解为基本初等函数的复合.

(1) $y=\sin^2\sqrt{x}$;　　(2) $y=5^{\arcsin x}$;

(3) $y=\ln\tan x$;　　(4) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$;

(5) $y=(\arccos x)^3$;　　(6) $y=e^{\cot x^2}$.

3. 设 $f(u)$ 的定义域为 $0<u\leqslant 1$,求下列函数的定义域.

(1) $f(\sin x)$;　　(2) $f(e^x)$;

(3) $f(\frac{1}{x})$;　　(4) $f(x+a)$.

总复习题一

1. 填空题.

(1) 函数 $y=\frac{\sqrt{2x+1}}{2x^2-x-1}$ 的定义域是________;

(2) 设 $f(x)=3x+5$,则 $f[f(x)-2]=$________;

(3) 设 $f(x)=\frac{1}{x}(x\neq 0)$,如果 $f(x)+f(y)=f(z)$,则 $z=$________;

(4) 函数 $y=e^x+1$ 与 $y=\ln(x-1)$ 的图形关于直线 $y=$________对称;

(5) 函数 $f(x)=\sin x\sin 3x$ 的周期 $T=$________;

(6) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},|x|\leqslant 1,\\ 0,|x|>1,\end{cases}$ 则函数 $f[f(x)]=$________.

2. 单项选择题.

(1) 函数 $y=\sqrt{5-x}+\ln(x-1)$ 的定义域是(　　);

A. $(0,5]$　　B. $[1,5)$　　C. $(1,5)$　　D. $(1,+\infty)$

(2) 如果 $f(\frac{1}{x})=(\frac{x+1}{x})^2(x\neq 0)$,则 $f(x)=($　　$)$;

A. $(\frac{x}{x+1})^2(x\neq -1)$　　B. $(\frac{x+1}{x})^2$

C. $(1+x)^2$　　D. $(1-x)^2$

(3) 函数 $y=-\sqrt{x-1}$ 的反函数是(　　);

A. $y=x^2+1(-\infty<x<+\infty)$　　B. $y=x^2+1(x\geqslant 0)$

C. $y=x^2+1(x\leqslant 0)$　　D. $y=x^2+1(x\neq 0)$

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}|2x+1|+\frac{|x-1|}{x+1},x\neq -1,\\ 0,x=-1,\end{cases}$ 则 $f(-2)=($　　$)$;

A. -6　　B. 6　　C. 1　　D. 0

(5) 设 $f(x)$ 是奇函数,且 $\varphi(x)=f(x)\left(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)$,则 $\varphi(x)$ 是(　　).

A. 偶函数　　B. 奇函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 无定义

(6) $f(x)=x\sin x\,\mathrm{e}^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$ 是(　　).

A. 有界函数　　B. 单调函数　　C. 周期函数　　D. 偶函数

3. 设 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^3-x}{x^4+1}(x\neq 0)$,求 $f(x)$.

4. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}$;　　(2) $y=\ln\frac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$.

5. 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有定义,且对于任意的 x,y,$f(x)\neq 0$ 且 $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$,求 $f(2005)$.

6. 求由 $f(x)=\arcsin x$,$\varphi(x)=\ln x$ 复合而成的函数 $\varphi[f(x)]$ 的定义域.

7. 判断函数 $f(x)=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}(a>0,-\infty<x<+\infty)$ 的奇偶性.

8. 讨论函数 $f(x)=\frac{2x}{1+x}(0\leqslant x<+\infty)$ 的单调性和有界性.

第 2 章　函数的极限

学习要求：

1. 掌握极限的有关概念.
2. 理解极限的四则运算法则及两个重要极限.
3. 了解无穷大与无穷小的概念以及函数的连续性.

微积分与初等数学有着很大的不同.初等数学主要研究事物相对静止时的数量关系，而微积分则主要研究事物运动、变化过程中的数量关系.因研究对象不同，所以其研究方法也不同.初等数学主要是以静止的观点去研究问题，而微积分则是以运动的、变化的观点去研究问题.极限是微积分学中最基本、最重要的概念，极限方法也是微积分学中处理问题的最基本方法.因此，掌握极限的思想和方法是学好微积分的前提条件.本章介绍极限以及与极限概念密切相关的函数连续性的基本知识.

§2－1　函数的极限

一、极限的概念

如图 2－1，钳工师傅在用平锉锉出一个圆形工件时，先粗锉成一个正多边形，再逐个地把角锉平而得到了一个边数多了一倍的正多边形，这样继续下去，边数越锉越多，边长越锉越短，工件就逐渐地接近于圆形.虽然用平锉进行有限次的加工，所能得到的只是一个近似的圆，但是不难想象，如果把这个过程无限地进行下去，就可以得到一个精确的圆形工件.

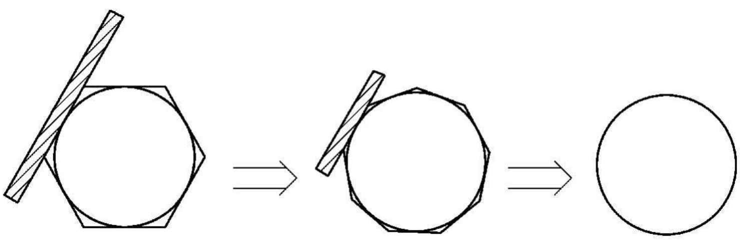


图 2－1

类似地，有我国古代的"割圆术"：使半径为 R 的圆内接正多边形的边数 n 一倍一倍地增多，多边形的面积 A_n 就越来越接近圆的面积 πR^2.在有限次的过程中，用正多边形的面积来逼近圆的面积，只能达到近似的程度，但可以想象，如果把这个过程无限地继续下去，就能得到精确的圆面积.

在观察摆的运动时，由于转动部分的摩擦和空气阻力的影响，摆的幅角 α（摆臂与铅垂线之间的夹角）是随时间变化而变化的，总趋势是逐步减小的，如图 2－2 所示.所以，随着时间的无限增长，这个幅角 α 就趋近于零了.