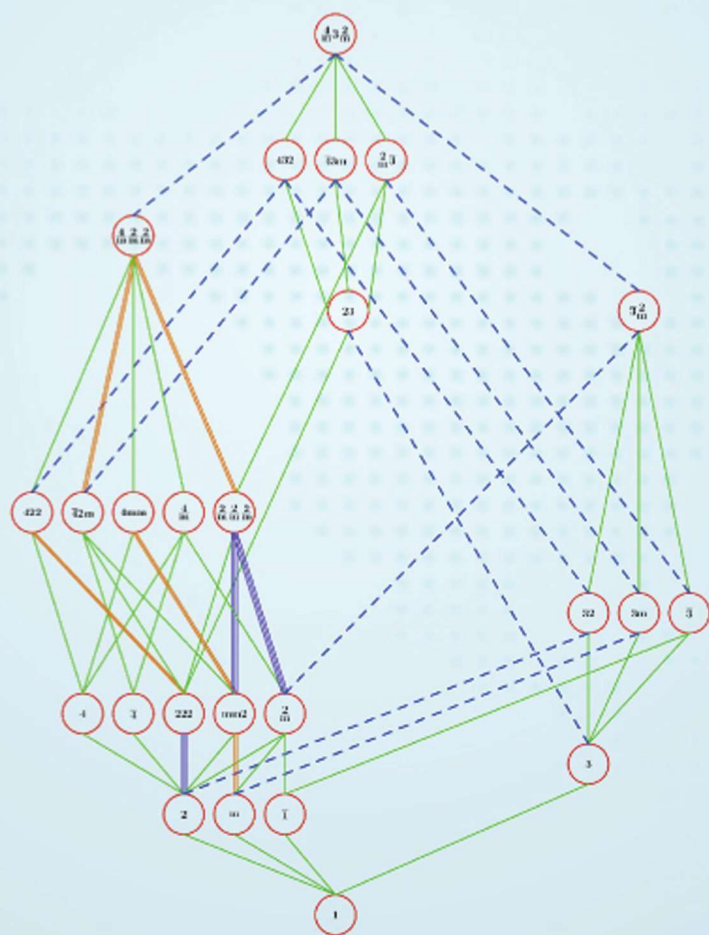


## 群论计算及其可视化

马治●编著



## 图书在版编目 (CIP)数据

GAP在群论研究中的应用：群论计算及其可视化 /  
马治编著. —银川：宁夏人民出版社, 2017.12  
ISBN 978-7-227-06869-3

I. ①G… II. ①马… III. ①群论—研究 IV.  
①O152

中国版本图书馆CIP数据核字 (2018) 第016589号

GAP 在群论研究中的应用——群论计算及其可视化 马 治 编著

责任编辑 姚小云  
责任校对 管世献  
封面设计 伊 青  
责任印制 肖 艳



黄河出版传媒集团  
宁夏人民出版社 出版发行

出 版 人 王杨宝

地 址 宁夏银川市北京东路139号出版大厦 (750001)

网 址 <http://www.nxp-ph.com> <http://www.yrpubm.com>

网上书店 <http://shop126547358.taobao.com> <http://www.hh-book.com>

电子信箱 nxrmcbs@126.com renminshe@yrpubm.com

邮购电话 0951-5019391 5052104

经 销 全国新华书店

印刷装订 宁夏银报印务有限公司

印刷委托书号 (宁) 0008222

开本 787mm × 1092mm 1/16

印张 22.5 字数 310千字

版次 2018年1月第1版

印次 2018年1月第1次印刷

书号 ISBN 978-7-227-06869-3

定价 50.00元

版权所有 侵权必究

## 序 言

对称在我们的自然界广泛地存在着,它构成了我们感知世界美感的重要组成部分。在现代生活中,从服装设计到楼宇建筑,从全球选美到生化实验,再到天空中那精灵一般翩然起舞的晶莹雪花,对称之美简直无处不在。科学是人类追求现实世界真善美的最佳途径,它时常因为对称性的研究而简单,而美丽。

人们时常说,爱是需要表达的。所谓:“言语之美,穆穆皇皇”。对称性之美仍然需要我们用科学的语言进行表达。在科学中,对称性之美的表达语言便是群论。群论是研究客观世界普遍对称性的利器。科学家用群论简化他们所遇到的困难和问题,运用群论讨论和交流任何对称性之美。群论既是语言,也成为工具。

当我们用群论语言表达万物对称性的存在以及彼此之间的关联状态之后,对称才真正地变得精确起来。当然,这种精确的表达是通过数学的筹算实现的。物理学的一个好方法,便是根据事物对称性,确定该物理系统应选择什么样的群。规定好科学计算的流程和方法,得到结果就是毋庸置疑的了。由此可见,自然界万物不同的对称性是可用不同的“群”进行精确划分的。《周易·系辞上》说:“方以类聚,物以群分”。《礼记·大学》上说:“致知在格物,物格而后知至”。古之人不余欺也!

《荀子·劝学》有言:“君子生非异也,善假于物也”。《说苑·建本》亦言:“鱼乘于水,鸟乘于风,草木乘于时”。《论语》则言:“工欲善其事,必先利其器”。劳动创造人本身,而人的劳动是从制造工具开始的。群论这个

工具的发明者是年仅 20 岁的天才数学家——伽罗瓦(有时译作:伽罗华 E. Galois, 1811—1832)。在 1890 年,费德洛夫(Federov)和熊夫利(Schoenflies)用群论方法证明了晶体学中总共有 7 大晶系,32 个点群,73 个点式空间群,230 个完整空间群。在 1893 年,挪威数学家索菲斯·李(S. Lie)和希弗尔斯(G. Scheffer)将群论与微分方程结合起来,建立了现代李群。群论至此开辟了全新的研究领域,以结构研究代替计算,把从偏重计算研究的思维方式转变为用结构观念研究的思维方式,并把数学运算归类,使群论迅速发展成为一门崭新的数学分支,对近世代数的形成和发展产生了巨大影响。自群论于 1831 年发明以来,嘉当(E. Cartan)、维格纳(E. P. Wigner)、卡拉(G. Racah)、外尔(C. H. Weyl)、赫尔曼(C. Hermann)、莫金(C. V. Mauguin)、萨博尼科夫(Shubnikov)、科顿(F. A. Cotton)、克莱因(F. Klein)、若尔当(C. Jordan)、达布(J. G. Darboux)、布拉菲(A. Bravais)、希尔伯特(D. Hilbert)、伯克霍夫(G. Birkhoff)、威尔逊(K. G. Wilson)等数学大师竞相涌现,将群论的研究推向了一个又一个新的高潮。正所谓“虎啸风生,龙腾云起,英贤奋发,亦各因时”。群论也被公认为 19 世纪最杰出的数学成就之一。

然而,群论学习中繁多的概念与引理之枯燥乏味简直让人“生无可恋”。能把群论的“三山五岳”讲清说明,又让人感觉如沐春风,至今未见。究其原因,有两个方面。一方面,群论作为一门交叉数学,其难度跨度极大,所涉及的数学领域知识极广。其内容包含分析、流形、拓扑、集合、近代代数、微分几何、图论、矩阵论、优化控制、系统论、控制论、突变论、分形、非线性、复杂网络、函数论、泛函分析等。纵观群论与近代代数,让人颇生“观沧海”之感,所谓“日月之行,若出其中。星汉灿烂,若出其里”。另一方面,群论理论结合专业实际问题的计算实例凤毛麟角,直观化、平易化讲解群论的书籍太少。

GAP 是“Group, Algorithms and Programming”的缩写,主要用于研究群及其表示,包括环、向量空间、代数、组合结构、格论等。该软件自 1986

年正式发行以来,已经取得了长足发展,它已经包含了众多可用的库(包),这极大扩展了 GAP 的研究领域。“不要重复发明轮子”,“珍爱生命,远离傻算”是程序员的座右铭,这也适合于群论研究领域。

GAP 的发展已经为群论的计算提供了一个简单便捷的窗口,基于 GAP 的群论计算与可视化,使得群论学习变得生动有趣起来。在考虑本书的写作时,我期望将群论的计算与可视化方法结合起来,这样便于对群论研究结果进行直观理解,也便于对一些理论结果提供几何解释。基于这样的考虑,全书在写作中,不止介绍 GAP 的使用,也介绍了其他的包,比如晶体学 `cryst` 包的使用。在可视化方面,我注重介绍了一些最实用的工具,一个是 `GraphViz`,其他的还有 `Group Explorer`、`Asymptote` 和 `SpaceGroupViz`。

本书的第一章首先介绍 GAP 的入口和出口,这是计算机操作的共有基本动作和学习框架。在第二章中,介绍了 GAP 包的使用,特别是晶体学 `cryst` 包的使用。此外还介绍了 GAP 绘图工具——`GraphViz`。这里介绍的 `cryst` 包的使用是为材料学、物理、化学等学科,研究晶体的物理化学相关对称性的人们所准备的。第三章注重介绍 GAP 的编程语言和语法,在第四章则介绍循环控制。将循环控制单独成章,是为了帮助人们编写完整功能的复杂程序。第五章、第六章则介绍群论基础知识与群的基本作用。在这两章写作时,顺便提及了群论的基本概念和基础定理,将群论基本理论与计算结合,这有利于加深理论理解和对软件计算过程的认知。第七、八、九、十章则介绍置换群、矩阵群、多循环群、有限表示群,因为这些群的研究在很多学科中都有极为广泛的应用。在第十一章,主要介绍 `Tietze` 变换。第十二章隆重介绍李代数。李代数是挪威数学家索菲斯·李在 19 世纪后期研究连续变换群时引进的一个数学概念,它与李群的研究密切相关。到 20 世纪 80 年代,李代数不再仅仅被理解为群论问题线性化的工具,它还是有限群理论及线性代数中许多重要问题的来源,其理论与方法已渗透到数学和物理的许多领域。第十三章,主要介绍多项

式与有理函数。第十四章则介绍群论的可视化工具 Group Explorer。在这一章,特别介绍了 Asymptote 的语法和使用,因为它与 Latex 的结合能够展现出强大的可视化能力。第十五章则关注 230 个晶体空间群的可视化—空间群可视化软件 SpaceGroupViz。230 个晶体空间群是所有材料学、物理学、化学、生物学等学科研究物质对称性的基础,其重要性不言而喻。

从前面的介绍可以看出,本书的内容是十分庞杂的。基于此,我在写作时将命令做了归纳和总结,整理在表格之中。而一些命令的使用则直接采用了软件参考手册中的相关例子,读者肯定能从本书的示例阅读中收到举一反三之功效。这样的归纳整理便于使用者直接检索软件操作的相关命令。另一方面,为了初学者的方便,我在介绍 GAP 相关命令之前,首先介绍群论的相关概念和引理。这既有利于加深学习者对众多概念和引理的理解,也有助于对软件计算结果进行准确全面地分析。此外,对于一些更加晦涩难懂的概念和知识,我则添加了许多拓展阅读的资料信息作为脚注,以便学习者知识能力的进一步提升。由此看来,这是一次大胆的尝试。我希望,对于群论计算与可视化的研究者或者是进行群论教学的教师来说,这本书都是有所裨益。

李白诗云:“夫天地者,万物之逆旅也;光阴者,百代之过客也”。群论的应用太广泛了,天地间任何一小小领域的研究均可单独成著。对于文明之艰难而漫长的进程而言,人类对群论的研究和应用可谓鸿蒙始辟,门径初窥。圣人有云:“言之无文,行而不远”。奈何我学浅识薄,仅止于此。但又觉“见一叶落而知岁之将暮,睹瓶中之冰而知天下之寒”,“千里之行,始于足下”!“不有佳咏,何伸雅怀”?困知而勉行。诚惶诚恐之中,辗转反侧之下,遂成此书。浅陋谬误之处,恐难免却,瞽言菑议,冀以雅正。是为序。

马 治

二〇一七年十二月二十五日

于宁夏大学金波湖畔博远楼

# 目 录

## CONTENTS

### 第一章 GAP 软件的初步认识

#### 1.1 GAP 软件的下载与安装 / 1

##### 1.1.1 GAP 软件的下载 / 1

##### 1.1.2 GAP 可执行软件的安装 / 2

##### 1.1.3 GAP 软件压缩包的安装 / 6

##### 1.1.4 GAP 软件在 Intel Itanium (IA64) 下窗口崩溃的问题 / 8

##### 1.1.5 GAP 软件与 Sagemath / 8

##### 1.1.6 GAP 软件在 Sagemath 在线系统中的使用 / 8

##### 1.1.7 GAP 软件载入文件运行模式 / 9

##### 1.1.8 GAP 软件所容载的文件类型 / 10

#### 1.2 GAP 软件包含的文件包(Package) / 10

### 第二章 GAP 包的使用

#### 2.1 安装 GAP 的包 / 17

#### 2.2 载入 GAP 的包 / 17

#### 2.3 关于 GAP 包操作的相关函数 / 19

#### 2.4 晶体学 Cryst 包的使用(Affine Crystallographic Groups) / 20

##### 2.4.1 仿射晶体学群的构建(Construction) / 20

##### 2.4.2 点群(Point Group) / 21

- 2.4.3 晶格平移(Translation Lattice) / 22
- 2.4.4 特殊方法与判断(Special Methods) / 22
- 2.4.5 最大子群(Maximal Subgroups) / 23
- 2.4.6 给定点群的空间群(Space Groups with a Given Point Group) / 23
- 2.4.7 Wyckoff 位置(Wyckoff Positions) / 25
- 2.4.8 正规化子(Normalizers) / 26
- 2.4.9 色群(Color Groups) / 27
- 2.4.10 有色仿射晶体群(Colored AffineCrystGroups) / 28
- 2.4.11 晶体空间群国际表(International Tables) / 28
- 2.5 GAP 绘图工具——GraphViz / 29
  - 2.5.1 初识 GraphViz / 29
  - 2.5.2 GraphViz 的下载与安装 / 30
  - 2.5.3 GraphViz 的代码编辑与运行 / 31
  - 2.5.4 GraphViz 的绘图保存 / 35
  - 2.5.5 GraphViz 的其他运行方式 / 36
  - 2.5.6 GraphViz 绘图三要素 / 36

## 第三章 GAP 的编程语言

- 3.1 Python 语言的基本数据结构 / 38
  - 3.1.1 Python 中的 list、tuple、dictionaries、set、matrix / 38
  - 3.1.2 Python 常用函数 lambda、map、filter、zip、reduce 等 / 40
  - 3.1.3 GAP 中的 list、set、record、domain 与性质探测 / 41
- 3.2 GAP 语言的基本语法 / 44
  - 3.2.1 GAP 命令执行的快捷键和命令帮助 / 44
  - 3.2.2 GAP 命令书写的基本要求 / 45
  - 3.2.3 基本运算符 / 47
  - 3.2.4 GAP 中的注释添加 / 48
- 3.3 常用函数与函数的定义 / 48

|       |                                                             |
|-------|-------------------------------------------------------------|
| 3.3.1 | 阶乘函数 / 48                                                   |
| 3.3.2 | 最大公约数与最小公倍数 / 48                                            |
| 3.3.3 | 屏幕打印函数 Print 以及写入外部文件 PrintTo / 48                          |
| 3.3.4 | 简单的自定义函数 / 49                                               |
| 3.3.5 | 是否为函数的判断 / 50                                               |
| 3.3.6 | 是否为操作的判断 / 50                                               |
| 3.3.7 | 设置对象名称(SetNameObject) / 50                                  |
| 3.3.8 | 对象的格式化输出(Display) / 51                                      |
| 3.3.9 | 排列与组合的枚举 / 51                                               |
| 3.4   | GAP 中的关键字与标识符 / 51                                          |
| 3.4.1 | GAP 中的关键字 / 51                                              |
| 3.4.2 | GAP 中的标识符 / 52                                              |
| 3.4.3 | GAP 中的变量与相关检查 / 52                                          |
| 3.5   | 函数与过程的调用 / 54                                               |
| 3.5.1 | 赋值表达式 / 54                                                  |
| 3.5.2 | 函数的调用 / 54                                                  |
| 3.5.3 | 条件表达式或表达式的运算 / 55                                           |
| 3.5.4 | 过程的调用 / 55                                                  |
| 3.6   | 映射 / 56                                                     |
| 3.6.1 | 创建映射(Creating Mappings) / 56                                |
| 3.6.2 | 映射的属性(Properties and Attributes of (General) Mappings) / 57 |
| 3.6.3 | 映射下的像/Images under Mappings) / 57                           |
| 3.6.4 | 映射下的初像(Preimages under Mappings) / 58                       |
| 3.6.5 | 同态(Magma Homomorphisms) / 58                                |
| 3.6.6 | 参考乘法的映射(Mappings that Respect Multiplication) / 58          |
| 3.6.7 | 参考加法的映射(Mappings that Respect Addition) / 59                |
| 3.6.8 | 线性映射(Linear Mappings) / 59                                  |

3.6.9 环同态(Ring Homomorphisms) / 60

3.6.10 宏观映射(General Mappings) / 60

3.6.11 宏观映射的技术材料(Technical Matters Concerning General Mappings)  
/ 60

3.7 关系 / 61

3.7.1 常规二元关系(General Binary Relations) / 61

3.7.2 二元关系的属性(Properties and Attributes of Binary Relations) / 61

3.7.3 对点的二元关系(Binary Relations on Points) / 62

3.7.4 封闭操作与其他构建子(Closure Operations and Other Constructors)  
/ 62

3.7.5 等价关系(Equivalence Relations) / 63

3.7.6 等价关系操作属性(Attributes and Operations on Equivalence Relations)  
/ 63

3.7.7 等价类(Equivalence Classes) / 64

## 第四章 循环控制

4.1 if 循环结构 / 65

4.2 while 循环控制结构 / 66

4.3 repeat...until...循环结构控制 / 67

4.4 for 循环结构控制 / 69

4.5 break 中断循环 / 72

4.6 continue 结构控制 / 72

4.7 function 结构控制 / 73

4.8 return 返回控制 / 76

## 第五章 群的初步知识

5.1 群的创建与判断 / 77

5.1.1 群论与物理学、群、李群、李群的无限小生成元 / 77

5.1.2 群的创建 / 82

|        |                                              |       |
|--------|----------------------------------------------|-------|
| 5.1.3  | 群的种类和资料库(Libraries)                          | / 83  |
| 5.1.4  | 典型群(Classical Group)                         | / 86  |
| 5.1.5  | 典型群的共轭类                                      | / 89  |
| 5.1.6  | 置换群、轮换、对换、共轭元素、传递置换群                         | / 91  |
| 5.1.7  | 转动群 $SO(3)$ 、二维特殊酉群 $SU(2)$ 、小群(Small Group) | / 92  |
| 5.1.8  | 有限群、无限群、有限完美群(Finite Perfect Groups)         | / 96  |
| 5.1.9  | 基本置换群(Primitive Permutation Groups)          | / 99  |
| 5.1.10 | 不可约可解矩阵群(Irreducible Solvable Matrix Groups) | / 101 |
| 5.1.11 | 群的判断与信息                                      | / 104 |
| 5.1.12 | 群的性质                                         | / 104 |
| 5.1.13 | 特殊生成元、生成集                                    | / 107 |
| 5.2    | 子群、闭包与结构描述                                   | / 108 |
| 5.2.1  | 子群(Subgroup)                                 | / 108 |
| 5.2.2  | 指数(Index)                                    | / 109 |
| 5.2.3  | 子群的判断、共轭子群                                   | / 110 |
| 5.2.4  | 特殊子群与参数化子群                                   | / 111 |
| 5.2.5  | Sylow 子群与 Hall 子群                            | / 113 |
| 5.2.6  | 子群的共轭类、最大子群、正规子群(不变子群)                       | / 114 |
| 5.2.7  | 子群级数(Subgroup Series)                        | / 118 |
| 5.2.8  | 子群格(Subgroup Lattice)                        | / 120 |
| 5.2.9  | 子群格计算的特殊方法                                   | / 123 |
| 5.2.10 | 质数幂(Prime Powers)表征的子群                       | / 125 |
| 5.2.11 | 群的闭包(Closures)                               | / 125 |
| 5.2.12 | 群元的表达、分解                                     | / 126 |
| 5.2.13 | 群的结构描述(群的类型)                                 | / 127 |
| 5.3    | 群的陪集(Coset)、商群                               | / 128 |
| 5.3.1  | 群的陪集定义                                       | / 128 |

- 5.3.2 群的右陪集及相关操作 / 129
- 5.3.3 群的陪集分解(Decomposition) / 130
- 5.3.4 断面(Transversal) / 133
- 5.3.5 双陪集的相关操作 / 133
- 5.3.6 商群(Factor Group) / 134
- 5.3.7 舒尔覆盖、乘子、方法测试 / 136
- 5.3.8 1-上同调 / 138
- 5.4 群之积 / 139
  - 5.4.1 群的直积 / 139
  - 5.4.2 群的半直积 / 140
  - 5.4.3 子直积(Subdirect Products) / 142
  - 5.4.4 环积(Wreath Products) / 142
  - 5.4.5 自由积(Free Products) / 143
  - 5.4.6 群积的嵌入与映射(Embeddings and Projections) / 144
- 5.5 群的同态(Homomorphisms) / 144
  - 5.5.1 创建群的同态(Creating) / 144
  - 5.5.2 群同态的操作(Operations) / 147
  - 5.5.3 好的同态(Nice Homomorphisms) / 148
  - 5.5.4 群的自同构(Group Automorphisms) / 148
  - 5.5.5 自同构的群(Groups of Automorphisms) / 150
  - 5.5.6 群自同构的计算(Calculations) / 151
  - 5.5.7 寻找同态(Searching for Homomorphisms) / 151
  - 5.5.8 群同态的表示(Representations for Homomorphisms) / 153
- 第六章 群的作用(Actions)
- 6.1 基本作用(Basic Actions) / 154
  - 6.1.1 关于群的作用 / 154
  - 6.1.2 基本作用(Basic Actions) / 154

|                           |                                                       |       |
|---------------------------|-------------------------------------------------------|-------|
| 6.2                       | 群表示、忠实表示、等价表示、可约表示、么正表示、正则表示、舒尔引理                     | / 156 |
| 6.3                       | 群函数、正交性定理、完备性定理、群表示的特征标理论                             | / 158 |
| 6.4                       | 群的轨道(Orbits)                                          | / 160 |
| 6.5                       | 稳定子(Stabilizers)                                      | / 161 |
| 6.6                       | 描述像的元(Elements with Prescribed Images)                | / 161 |
| 6.7                       | 作用的交换像(Permutation Image of an Action)                | / 162 |
| 6.8                       | 群自身的作用(Action of a Group on Itself)                   | / 163 |
| 6.9                       | 交换诱导的元与循环(Permutation Induced by Elements and Cycles) | / 164 |
| 6.10                      | 作用测试与阻截系统(Action Tests and Block Systems)             | / 166 |
| 6.11                      | 外部集合(External Sets)                                   | / 167 |
| <b>第七章 置换群 / 排列群、组合数学</b> |                                                       |       |
| 7.1                       | 排列(Permutation)                                       | / 170 |
| 7.1.1                     | 判断                                                    | / 170 |
| 7.1.2                     | 排列的比较(Comparison of Permutations)                     | / 171 |
| 7.1.3                     | 排列的移动点(Moved Points of Permutations)                  | / 171 |
| 7.1.4                     | 符号与循环结构(Sign and Cycle Structure)                     | / 172 |
| 7.1.5                     | 创建排列(Creating Permutations)                           | / 172 |
| 7.2                       | 置换群/排列群(Permutation Groups)                           | / 173 |
| 7.2.1                     | 基本操作(The Natural Action)                              | / 173 |
| 7.2.2                     | 排列表示(Permutation Representation)                      | / 174 |
| 7.2.3                     | 对称与交错群(Symmetric and Alternating Groups)              | / 175 |
| 7.2.4                     | 基本群(Primitive Group)                                  | / 175 |
| 7.3                       | 稳定子链(Stabilizer Chains)                               | / 177 |
| 7.3.1                     | 排列群的随机方法                                              | / 177 |
| 7.3.2                     | 稳定子链的构建(Construction of Stabilizer Chains)            | / 177 |
| 7.3.3                     | 稳定子链的操作(Operations for Stabilizer Chains)             | / 178 |

7.3.4 修改与创建稳定子链的一些方法(Low Level Routines) / 179

7.3.5 大度排列群(Backtrack) / 180

7.3.6 大度排列群(Large Degree Permutation Groups) / 180

7.4 组合数学(Combinatorics) / 181

7.4.1 组合数(Combinatorial Numbers) / 181

7.4.2 组合、重排与元组(Combinations, Arrangements and Tuples) / 183

7.4.3 斐波那契数与卢卡斯序列(Fibonacci and Lucas Sequences) / 188

## 第八章 矩阵与矩阵群

8.1 矩阵 / 190

8.1.1 矩阵的操作(Operators for Matrices) / 190

8.1.2 基本性质(Properties and Attributes of Matrices) / 191

8.1.3 矩阵构建(Matrix Constructions) / 192

8.1.4 随机矩阵(Random Matrices) / 194

8.1.5 线性方程的矩阵表示(Matrices Representing Linear Equations) / 195

8.1.6 本征矢与本征值(Eigenvectors and Eigenvalues) / 196

8.1.7 初等因子(Elementary Divisors) / 197

8.1.8 阶梯矩阵(Echelonized Matrices) / 198

8.1.9 作为行空间基的矩阵(Matrices as Basis of a Row Space) / 199

8.1.10 三角矩阵(Triangular Matrices) / 200

8.1.11 线性映射的矩阵(Matrices as Linear Mappings) / 201

8.1.12 有限域上的矩阵(Matrices over Finite Fields) / 202

8.1.13 逆矩阵与模(Inverse and Nullspace) / 203

8.1.14 分块矩阵(Block Matrices) / 204

8.1.15 矩阵之迹(Permanent of a Matrix) / 204

8.2 矩阵群判断与属性 / 205

8.2.1 矩阵群的判断 / 205

8.2.2 属性 / 205

|                                    |                                                   |       |
|------------------------------------|---------------------------------------------------|-------|
| 8.3                                | 基本作用、GL 与 SL                                      | / 206 |
| 8.3.1                              | 基本作用                                              | / 206 |
| 8.3.2                              | GL 与 SL                                           | / 207 |
| 8.4                                | 不变式(Invariant Forms)                              | / 207 |
| 8.4.1                              | 不变式操作                                             | / 207 |
| 8.4.2                              | 特殊情形(Matrix Groups in Characteristic 0)           | / 208 |
| 8.5                                | 左操作与右操作(Acting OnRight and OnLeft)                | / 209 |
| <b>第九章 多循环群(Polycyclic Groups)</b> |                                                   |       |
| 9.1                                | 多循环群                                              | / 210 |
| 9.1.1                              | 多循环群的计算                                           | / 210 |
| 9.1.2                              | 基本操作                                              | / 211 |
| 9.2                                | 特殊积与子群                                            | / 212 |
| 9.2.1                              | 特殊积(Special Products)                             | / 212 |
| 9.2.2                              | 子群(Subgroups of Polycyclic Groups–Induced Pcps)   | / 213 |
| 9.2.3                              | 子群(Subgroups of Polycyclic Groups–Canonical Pcps) | / 214 |
| 9.3                                | 商群(Factor Groups of Polycyclic Groups)            | / 214 |
| 9.3.1                              | 多循环群的模                                            | / 214 |
| 9.3.2                              | 自表示的商群(in their Own Representation)               | / 215 |
| 9.4                                | Pcps 与正则级数                                        | / 216 |
| 9.5                                | 求和与交集及特殊 Pcps(Sum and Intersection of Pcps)       | / 217 |
| 9.5.1                              | 求和与交集                                             | / 217 |
| 9.5.2                              | 特殊 Pcps(Special Pcps)                             | / 217 |
| 9.6                                | 子商群的操作与轨道稳定子方法                                    | / 218 |
| 9.6.1                              | 子商群的操作                                            | / 218 |
| 9.6.2                              | 轨道稳定子方法(Orbit Stabilizer Methods)                 | / 219 |
| 9.6.3                              | 可解群中的共轭类(Conjugacy Classes in Solvable Groups)    | / 220 |
| 9.7                                | 多循环群表示(Pc Groups)                                 | / 220 |

9.8 构建与计算 Pc 群(Constructing and Computing Pc Groups) / 222

9.8.1 构建 Pc 群(Constructing Pc Groups) / 222

9.8.2 计算 Pc 群(Computing Pc Groups) / 223

9.9 2-上同调与扩展(2-Cohomology and Extensions) / 224

9.10 Pc 的表示与随机测试 / 227

9.10.1 Pc 的表示(Coding a Pc Presentation) / 227

9.10.2 随机测试(Random Isomorphism Testing) / 228

**第十章 有限表示群(Finitely Presented Groups)**

10.1 有限表示群(Fp Groups) / 229

10.1.1 有限表示群的判断与创建 / 229

10.1.2 有限表示群元的比较 / 231

10.2 自由群中的初像与有限表示群操作 / 231

10.2.1 自由群中的初像(Preimages in the Free Group) / 231

10.2.2 有限表示群的操作(Operations for Finitely Presented Groups) / 232

10.3 陪集表和陪集枚举(Coset Tables and Coset Enumeration) / 233

10.4 陪集表的标准化与子群陪集表 / 235

10.4.1 陪集表的标准化(Standardization of coset tables) / 235

10.4.2 子群的陪集表(Coset tables for subgroups in the whole group) / 235

10.5 陪集表重写与低指数子群 / 235

10.5.1 陪集表重写(Augmented Coset Tables and Rewriting) / 235

10.5.2 低指数子群(Low Index Subgroups) / 236

10.6 将群转化为有限表示群与子群表示 / 237

10.6.1 将群转化为有限表示群(Converting Groups to Fp Groups) / 237

10.6.2 子群表示(Presentations for Subgroups) / 238

10.7 初像与求商方法 / 240

10.7.1 初像(Preimages under Homomorphisms from an FpGroup) / 240

10.7.2 求商方法(Quotient Methods) / 240

|                               |                                                        |       |
|-------------------------------|--------------------------------------------------------|-------|
| 10.8                          | 子群的交换不变性与有限表示群的有限性测试                                   | / 242 |
| 10.8.1                        | 子群的交换不变性(Abelian Invariants for Subgroups)             | / 242 |
| 10.8.2                        | 有限表示群的有限性测试(Testing Finiteness)                        | / 243 |
| <b>第十一章 表示与 Tietze 转换</b>     |                                                        |       |
| 11.1                          | 表示的创建与子群的表示                                            | / 245 |
| 11.1.1                        | 创建表示(Creating Presentations)                           | / 245 |
| 11.1.2                        | 子群的表示(Subgroup Presentations)                          | / 247 |
| 11.2                          | 表示关系、输出表示、表示改变                                         | / 248 |
| 11.2.1                        | 表示中的关系子(Relators in a Presentation)                    | / 248 |
| 11.2.2                        | 表示输出(Printing Presentations)                           | / 248 |
| 11.2.3                        | 表示的改变(Changing Presentations)                          | / 250 |
| 11.3                          | Tietze 转换(变换)                                          | / 251 |
| 11.3.1                        | Tietze 转换(Tietze Transformations)                      | / 251 |
| 11.3.2                        | 初级 Tietze 转换(Elementary Transformations)               | / 253 |
| 11.3.3                        | Tietze 转换引入新生成元(Introduce new Generators)              | / 253 |
| 11.3.4                        | 依 Tietze 转换跟踪生成元像(Tracing generator images)            | / 255 |
| 11.3.5                        | Tietze 可选项(Tietze Options)                             | / 257 |
| 11.4                          | 解码的三个过程(The Decoding Tree Procedure)                   | / 257 |
| <b>第十二章 李代数(Lie Algebras)</b> |                                                        |       |
| 12.1                          | 李代数的对象与构建李代数                                           | / 260 |
| 12.1.1                        | 李代数的对象(Lie Objects)                                    | / 261 |
| 12.1.2                        | 构建李代数(Constructing Lie algebras)                       | / 262 |
| 12.2                          | 子代数、理想、中心、直和、半直和、同构、同态                                 | / 264 |
| 12.3                          | 理想的级数(Series of Ideals)                                | / 266 |
| 12.4                          | 李代数的性质(Properties of a Lie Algebra)                    | / 267 |
| 12.5                          | 半纯李代数、半单李代数、内导子、嘉当判据、卡塞米尔算子                            | / 268 |
| 12.6                          | 半单李代数与 Weyl 群(Semisimple Lie Algebras and Weyl Groups) | / 270 |