主　编◇江卫华
副主编◇李秀敏

考研概率论与数理统计讲义

KAOYAN GAILÜLUN YU SHULI TONGJI JIANGYI

电子科技大学出版社

主　编◇江卫华
副主编◇李秀敏

考研概率论与数理统计讲义

KAOYAN GAILÜLUN YU SHULI TONGJI JIANGYI

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研概率论与数理统计讲义 /江卫华 主编. —成都:
电子科技大学出版社, 2015.10
ISBN 978 -7 -5647 -3289 -9

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①江… Ⅲ. ①概率论 - 研
究生 - 入学考试 - 自学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 226064 号

内容提要

本书是《概率论与数理统计》的考研学习辅导书,基本内容与主教材相对应,全书共分八章,每章包括考试内容及要求,知识内容的基本概念、性质和公式,典型例题解析,题型练习及解答四部分,本书可供准备报考硕士研究生的读者和使用主教材的教师参考,也可供高等学校工科和其他非数学类专业的学生使用.

考研概率论与数理统计讲义

江卫华 主编

出　　版:电子科技大学出版社(成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编:610051)
策划编辑:李述娜
责任编辑:刘　愚
主　　页:www. uestcp. com. cn
电子邮箱:uestcp@ uestcp. com. cn
发　　行:新华书店经销
印　　刷:北京市通县华龙印刷厂
成品尺寸:185mm ×260mm　**印张**:10　**字数**:243 千字
版　　次:2015 年 10 月第一版
印　　次:2015 年 10 月第一次印刷
书　　号:ISBN 978 -7 -5647 -3289 -9
定　　价:25. 00 元

前　　言

《概率论与数理统计》是数学的一个十分活跃且又别具特色的分支,一方面,它有自己独特的概念和方法,与自然和社会现象紧密联系,内容丰富; 另一方面,它与其他学科又有紧密的联系,是近代数学的重要组成部分. 由于它突飞猛进的发展与应用的广泛性,目前已发展成为一门独立的一级学科.《概率论与数理统计》的理论与方法已广泛应用于科学技术、工农业生产、医疗卫生、生物遗传、气象预报、水文地质、社会经济、人文学科等各个领域中. 也是当今许多前沿学科(如控制论、信息论、可靠性理论、人工智能等)的基础,因此学好这一学科十分重要.

《概率论与数理统计》是理工科大学生的一门必修课程,也是报考硕士研究生时数学试卷中重要内容之一.《概率论与数理统计》主要考查考生对研究随机现象规律性的基本概念、基本理论和基本方法的理解,以及运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力. 常见的题型有: 填空题、选择题、计算题和证明题. 通过对多年硕士研究生考题分析,可以看出《概率论与数理统计》的试题,即使是填空题和选择题,只考单一知识点的试题也很少,大多数试题是考查考生的理解能力和综合应用能力. 要求考生能灵活地运用所学的知识,建立正确的概率模型,综合运用极限、连续函数、导数、极值、积分、广义积分以及级数等知识去解决问题.

为了帮助读者学好《概率论与数理统计》,编者集多年教学经验,在对硕士研究生考试试题的研究基础上编写了本教材,主要想对读者做一个学习方法和解题技巧的指导,本教材编写紧扣《概率论与数理统计》教学大纲,涵盖硕士研究生考试试题的各个知识点和题型,在结构处理、内容编排和题型选择等方面主要体现以下三个方面的特色.

一、本书注重基本概念、基本原理和基本方法,知识梳理清晰、简洁,教材内容表述简明扼要,便于读者快速复习,形成稳固、扎实的知识结构,从而夯实提高解题能力和数学思维水平的基础.

二、重点、难点和考点明确,题型选择多样化. 针对每一个基本题型,典型例题丰富且具代表性,通过举一反三、深入讲解,将知识掌握和解题能力提高相结合,为进一步学习打好基础.

三、内容处理模块化,有助于对各个知识点有针对性地理解,也有助于学习过程中进行专项练习. 解题方法灵活、多样、富有启发性. 例题与解答展示了基本的解题思路、解题方法与技巧,有助于学生达到考研要求的基本能力.

本教材在编写过程中,编者本着认真负责的态度,把握考研重点,紧扣考研命题思路,力求对考研大纲所要求的基本概念、基本公式、定理详细讲解,各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位,为读者备考提供科学有效的帮助,但由于编者的水平有限,难免有一些不妥之处,恳请读者批评指正.

编　者

2015 年 7 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

事件和概率是概率论中的两个基本概念. 在这部分内容中,要熟记事件的关系和运算,因为在今后的计算中,经常需要将一些事件用另一些事件的运算来表示. 文氏图是帮助分析和理解事件运算的重要工具. 在计算事件的概率时,要正确使用加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式等,在理解的基础上要记住这些公式并会分析实际问题.

考试内容

随机事件与样本空间；事件的关系与运算；完备事件组；概率的概念与基本性质；古典型概率；几何型概率；条件概率；概率的基本公式；事件的独立性；独立重复试验.

考试要求

1. 了解样本空间(基本事件空间)的概念,理解随机事件的概念,掌握事件的关系及运算.

2. 理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典型概率和几何型概率,掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯(*Bayes*)公式.

3. 理解事件独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算的方法；理解独立重复试验的概念,掌握计算有关事件概率的方法.

§1　基本概念、性质和公式

一、随机事件的关系与运算

1. 随机事件与样本空间

(1) 随机试验

概率论中将满足下面三个条件的试验称为随机试验(简称为试验).

1° 在相同条件下试验可以重复进行；

2° 每次试验的可能结果不止一个,并且事先可以确知试验的所有可能结果；

3° 试验之前不能确定哪一个结果会发生.

一般用字母 E 或 $E_1, E_2, \cdots$ 表示随机试验.

(2) 样本空间

随机试验 E 的所有可能的基本结果所组成的集合称为 E 的样本空间(或基本事件空

间），记为 Ω. 样本空间中的元素（即 E 的每个结果）称为样本点，记为 ω.

（3）随机事件

样本空间 Ω 的子集称为随机事件（简称事件），记为 $A,B,C,\cdots$.

所谓一个随机事件 A 发生当且仅当 A 中的一个样本点 ω 发生.

把试验 E 的样本空间 Ω 中的每一个样本点（即由一个样本点组成的单点集）称为基本事件. 基本事件是最简单不可再分的随机事件.

在随机试验中，必然发生的事件称为必然事件，不可能发生的事件称为不可能事件.

显然，样本空间 Ω 也是一个随机事件，它是自身的子集，Ω 中包含所有的样本点（或基本事件），在每次试验中它总是发生的，所以样本空间 Ω 是一个必然事件. 空集 $\varnothing$ 也是样本空间 Ω 的子集，它不包含任何样本点（或基本事件），在每次试验中它都不发生，所以是不可能事件.

注：通常把必然事件记为 Ω，不可能事件记为 $\varnothing$；必然事件和不可能事件是两个特殊的随机事件.

2. 事件的关系与运算

（1）子事件：如果事件 A 发生则事件 B 发生，即属于事件 A 的每一个样本点都属于事件 B，称事件 A 是事件 B 的子事件，也称事件 B 包含事件 A，记为 $B \supset A$（或 $A \subset B$）.

（2）相等事件：如果事件 A 和事件 B 满足 $A \supset B$ 和 $B \supset A$，即事件 A 和事件 B 同时发生和不发生，称事件 A 与 B 相等，记为 $A = B$.

（3）和事件：事件"A 和 B 至少有一个发生"的事件称为事件 A 与 B 的和事件（或并事件），记为 $A \cup B$（或 $A + B$）.

它可推广到有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n \geqslant 2)$ 的和（或并）的情形，即"n 个事件 A_1，$A_2,\cdots,A_n(n \geqslant 2)$ 中，至少有一个事件发生"，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

它还可推广到可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和（或并）的情形，即"可列个事件 A_1，$A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中，至少有一个事件发生"，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

（4）积事件：事件"A 和 B 同时发生"的事件称为事件 A 与 B 的积事件（或交事件），记为 $A \cap B$（或 AB）.

它可推广到有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n \geqslant 2)$ 或可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积的情形，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

（5）差事件：事件"A 发生而事件 B 不发生"的事件称为事件 A 与 B 的差事件，记为 $A - B$（或 $A\overline{B}$）.

（6）对立事件（或互逆事件）：每次试验中，"事件 A 不发生"的事件称为事件 A 的对立事件或逆事件，记为 $\overline{A}$.

（7）互不相容事件（或互斥事件）：如果事件 A 和事件 B 不能同时发生，即 $AB = \varnothing$，也就是它们的积事件是不可能事件，称事件 A 和 B 互不相容（或互斥）.

在随机试验中，基本事件都是两两互斥的.

（8）完备事件组：若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，且和事件为必然事件，即满足：

（ⅰ）$A_iA_j = \varnothing, 1 \leqslant i < j \leqslant n$；

（ⅱ）$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，

则事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组.

可推广为：若可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互斥，且和事件为必然事件，即满足：

（ⅰ）$A_iA_j = \varnothing, 1 \leqslant i < j < +\infty$；

（ⅱ）$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$，

则事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$ 是一个完备事件组.

3. 文氏图

事件的关系与运算可以用图 1 － 1 所示图形直观地表示出来.

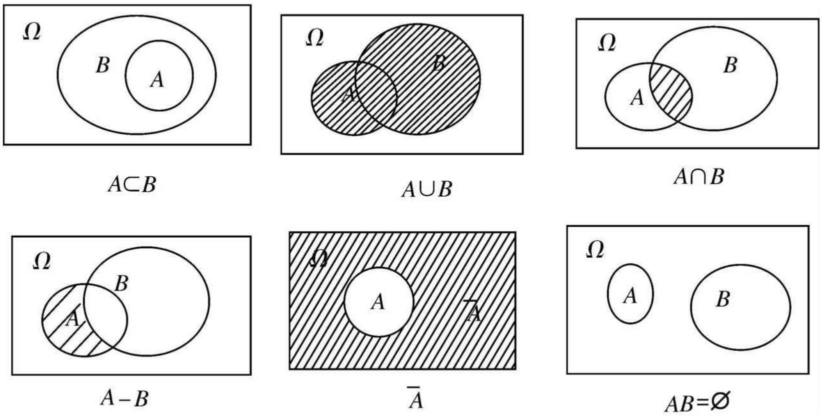

图 1 － 1

4. 事件的运算法则及常用结论

事件的运算法则：

设试验 E 的样本空间为 Ω，随机事件为 $A, B, C, A_i (i = 1, 2, \cdots)$，则有

（1）吸收律　若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B, A \cap B = A$；

（2）交换律　$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$；

（3）结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$；$A(BC) = (AB)C = ABC$；

（4）分配律　$A(B \cup C) = AB \cup AC$；$A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C)$；$A \cap \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i)$；

（5）摩根律　$\overline{A \cup B} = \overline{A}\ \ \overline{B}$；$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$；$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$；$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$；

$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$；$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$.

常用的运算公式：

（1）$A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$；$A \cap (A \cup B) = A, B \cap (A \cup B) = B$；$A \cup A = A$.

（2）$A - B \subset A$；$(A - B) \cup A = A$；$(A - B) \cup B = A \cup B$；$(A - B) \cap A = A - B$；$(A - B) \cap B = \varnothing$；$A - B = A\overline{B}$；$A - B = A - AB$.

（3）$A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$；$(A \cap B) \cup A = A, (A \cap B) \cup B = B$；$A \cap A = A$.

（4）$A + \overline{A} = \Omega$；$A\overline{A} = \varnothing$；$\overline{\overline{A}} = A$.

二、事件的概率及其性质

1. 概率的公理化定义

设 E 是一随机试验，Ω 为它的样本空间，以 E 中所有的随机事件组成的集合为定义域，对于任一个事件 A，规定一个实数 $P(A)$，如果满足：

(1) 非负性：$P(A) \geqslant 0$；

(2) 规范性：$P(\Omega) = 1$；

(3) 可列可加性：如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为两两互不相容的事件，有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$，则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

注：概率 $P(A)$ 是事件 A 发生的可能性大小的数值度量.

2. 概率的基本性质

(1) $P(\varnothing) = 0$.

(2) 对于任意事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

(3) 逆事件的概率：对于任意事件 A，有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(4) 加法公式：对于任意事件 A, B, C，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - [P(AB) + P(BC) + P(AC)] + P(ABC).$$

(5) 减法公式：对于任意两个事件 A 和 B，有

$$P(A - B) = P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB);$$

特别地，当 $B \subset A$ 时，$P(A - B) = P(A) - P(B)$，$P(B) \leqslant P(A)$.

(6) 有限可加性：设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

一般地，对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

3. 古典型概率与几何型概率

(1) 古典型概率 如果随机试验的样本空间 Ω 只有有限个基本事件（样本点），且每个基本事件（样本点）发生的可能性相同，则称这样的试验为古典概型（也称等可能概型）的随机试验. 此时事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{ 中所包含的样本点数}}{\text{样本空间 }\Omega\text{ 中样本点数}}.$$

(2) 几何型概率 如果随机试验的样本空间 Ω 是一个可度量的几何区域（直线上的区间，平面或立体空间上的区域），并且每个试验结果落在 Ω 中的任一区域的可能性与该区域的几何度量成正比，则称该试验为几何概型的随机试验. 用 A 表示试验结果落在区域 A 中，此时事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{ 的长度（或面积、体积）}}{\Omega\text{ 的长度（或面积、体积）}}.$$

注 1 古典概型与几何概型都具有某种等可能性，对此要特别注意的是，两个等可能概

型的区别在于：古典概型的样本空间是有限的，而几何概型的样本空间是无限的.

注 2 古典概型问题的主要计算工具是排列组合，而几何概型问题的主要计算工具是用几何“坐标法”计算长度、面积、体积等，也常用到微积分计算.

注 3 古典概型的难点在于正确选择样本空间，而几何概型的难点在于如何化实际问题为几何概型问题（如候车问题、会面问题等）.

4. 条件概率

设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，在已知事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率称为条件概率，记为 $P(B\mid A)$，且 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}\ (P(A)>0)$.

注 对于给定的事件 A，条件概率 $P(B\mid A)$ 也是事件的概率，它具有概率的一切性质，即当 $P(A)>0$ 时，有

(1) $P(B\mid A)\geqslant 0$;

(2) $P(\Omega\mid A)=1, P(A\mid A)=1$;

(3) $P(\overline{B}\mid A)=1-P(B\mid A)$，（注意：$P(B\mid A)+P(B\mid \overline{A})$ 不一定等于 1）；

(4) 如果事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$ 两两互不相容，则 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i\mid A\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(B_i\mid A)$.

5. 计算概率的几个公式

(1) 乘法公式：设 $P(A)>0, P(B)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B)$. 一般地，若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

(2) 全概率公式：设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是一个完备事件组，即 $B_iB_j=\varnothing, i\neq j, \bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，且 $P(B_i)>0, i=1,2,\cdots,n$，则对事件 A，有 $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$.

注：上式中当 $n=+\infty$ 时也成立.

(3) 贝叶斯公式：在全概率公式的条件下，如果 $P(A)>0$，则有

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(B_j)P(A\mid B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)}, j=1,2,\cdots,n.$$

注 1 乘法公式主要用来计算没有相互独立性的若干个事件之积的概率.

注 2 全概率公式与贝叶斯公式使用的关键是要找到导致事件 A 发生的完备事件组，完备事件组可以由有限个事件构成，也可以由可列个事件构成.

三、事件的独立性与独立重复试验

1. 事件的独立性

(1) 两个事件独立：对于两个事件 A 与 B，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 独立.

注 1 事件 A 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 的独立性等价；

注 2 若 $P(A)=0$ 或 $P(A)=1$，则事件 A 与任何事件 B 独立；

注 3 若 $P(A)>0$，则事件 A 与事件 B 独立的充要条件是 $P(B\mid A)=P(B)$;

注4　若$0 < P(A) < 1$,则事件A与事件B独立的充要条件是$P(B\mid A) = P(B\mid \overline{A})$;

注5　设两事件组$A_1,A_2,\cdots,A_n$与事件组$B_1,B_2,\cdots,B_m$独立,则事件$\varphi(A_1,A_2,\cdots,A_n)$与事件$\psi(B_1,B_2,\cdots,B_m)$独立;

注6　设$P(A) > 0,P(B) > 0$,如果事件A与B独立,则A与B不互斥;如果事件A与B互斥,则A与B不独立.

(2)多个事件相互独立:对于任意n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$,如果其中任意两个事件相互独立,即对任意$1 \leqslant i < j \leqslant n$,有$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$,则称$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两独立.

对于任意n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$,如果其中任意k个事件$A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}(2 \leqslant k \leqslant n,1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n)$,均有$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$,则称事件组$A_1,A_2,\cdots$,相互独立$A_n$.

注1　若事件组$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立,则$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两独立,反之未必.

例　均匀四面体分别标有数字1,2,3和123,事件$A=$\{朝下面的数字有1\},事件$B=$\{朝下面的数字有2\},事件$C=$\{朝下面的数字有3\},则

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2},P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{4},P(ABC) = \frac{1}{4}.$$

易知:A,B,C两两独立,但不是独立事件组.

2. 独立试验

(1)独立重复试验:在相同的条件下,将试验重复进行n次,若各次试验的结果互不影响,即每次试验的结果与其他各次试验的结果无关,且同一事件在各次试验中发生的概率相同,则称这n次重复的试验为n次独立重复试验.

(2)贝努利试验:如果在一次试验中,只考虑A与$\overline{A}$两个对立的结果,则称之为贝努利试验.将贝努利试验独立重复进行n次,若每次试验中事件A发生的概率均相等,即$P(A) = p(0 < p < 1)$,则称为n重贝努利试验,这样的试验模型称为n重贝努利概型.

3. 贝努利公式(二项概率公式)

在n重贝努利试验中,若每次试验中事件A发生的概率为$p\ (0 < p < 1)$,则事件A恰好发生k次的概率为$P_n(k) = C_n^kp^k\,(1-p)^{n-k},k = 0,1,2,\cdots,n$.

注1　贝努利概型的特征是只论事件A在n次试验中发生的次数,不论位置.

注2　如果用X表示n重贝努利概型中事件A发生的次数,则X服从二项分布$B(n,p)$.

§2　典型例题解析

题型一　有关事件的关系、概率性质、条件概率及独立性的命题

【提示】这类问题常以填空题和选择题的形式出现,只要充分利用事件的关系、运算和概率的基本性质不难求解.

例1　设A,B为随机事件,且$P(AB) = 0$,则(　　).

(A) A和B不相容;　　(B) AB是不可能事件;

(C) AB未必是不可能事件;　　(D) $P(A) = 0$或$P(B) = 0$.

解：(A)(B)(D) 错，反例：在 $[0,1]$ 区间随机投一点，事件 $A=[0,0.5]$，$B=[0.5,1]$，$P(AB)=0$，$AB=\{0,5\}$，$P(A)=P(B)=0.5$.(C) 正确. 因为不可能事件的概率为 0，但是概率为 0 的事件不一定是不可能事件. 所以选(C).

例2 设事件 A 与事件 B 互不相容，则(　　).

(A) $P(\overline{A}\,\overline{B})=0$；　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$；

(C) $P(\overline{A})=1-P(B)$；　　(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$.

解：(A) (B) (C) 错. 反例：掷骰子，$A=\{1\}$，B $=\{2,3\}$，$\overline{A}\,\overline{B}=\{4,5,6\}$；$P(AB)=0\neq P(A)P(B)$；$P(\overline{A})=\dfrac{5}{6}\neq 1-P(B)$. 因为事件 A 与 B 互不相容，即 $AB=\varnothing$，则 $\overline{AB}=\Omega$，于是 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=P(\Omega)=1$，应选(D) .

例3 若 A,B 为任意两个随机事件，则(　　) .

(A) $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$；　　(B) $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$；

(C) $P(AB)\leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$；　　(D) $P(AB)\geqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

解：由于 $AB\subset A$，$AB\subset B$，按概率的基本性质，我们有 $P(AB)\leqslant P(A)$ 且 $P(AB)\leqslant P(B)$，从而 $P(AB)\leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$. 选(C) .

例4 设 A,B 是任意两个概率不为 0 的互不相容事件，则下列结论中肯定正确的是(　　).

(A) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容；　　(B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容；

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$；　　(D) $P(A-B)=P(A)$.

解：(A) (C) 错. 反例：掷骰子 $A=\{1\}$，$B=\{2,3\}$，$\overline{A}\,\overline{B}=\{4,5,6\}$；(B) (C) 错. 反例：$A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5,6\}$；(D) 正确. 由于 $AB=\varnothing$，$A-B=A-AB=A$，所以选(D).

例5 设当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则(　　).

(A) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$；　　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$；

(C) $P(C)=P(AB)$；　　(D) $P(C)=P(A\cup B)$.

解：根据已知条件，$AB\subset C$，则 $P(AB)\leqslant P(C)$，于是

$P(C)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$. 所以选(B).

例6 设 X 和 Y 为两个随机变量，且 $P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\dfrac{3}{7}$，$P\{X\geqslant 0\}=P\{Y\geqslant 0\}=\dfrac{4}{7}$，则 $P\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}=$ ________.

解：事件 $\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}=\{X\geqslant 0\}\cup\{Y\geqslant 0\}$，应用加法公式有

$$\begin{aligned}&P\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}\\&=P\{\{X\geqslant 0\}\cup\{Y\geqslant 0\}\}\\&=P\{X\geqslant 0\}+P\{Y\geqslant 0\}-P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}\\&=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}.\end{aligned}$$

例7 设 $P(A)=a$，$P(B)=b$，$P(AB)=c$，则 $P(A\overline{B})=$ ______，$P(\overline{A}\cap\overline{B})=$ ______.

解:$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = a - c$,

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] = 1 - a - b + c.$

例8 设 A,B 为两个随机事件,且 $P(B) > 0, P(A \mid B) = 1$,则必有(　　).

(A) $P(A \cup B) > P(A)$;　　(B) $P(A \cup B) > P(B)$;

(C) $P(A \cup B) = P(A)$;　　(D) $P(A \cup B) = P(B)$.

解:根据乘法公式与加法公式有 $P(AB) = P(B)P(A \mid B) = P(B)$,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A)$,应选(C).

注:若选项(C)、(D)改为:(C)$P(A\overline{B}) = 0$ 和(D)$P(\overline{A}B) = 0$,则该考点为减法公式,应选(D).

例9 已知 $0 < P(B) < 1$,且 $P[(A_1 \cup A_2) \mid B] = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$,则下列选项成立的是(　　).

(A) $P[(A_1 \cup A_2) \mid \overline{B}] = P(A_1 \mid \overline{B}) + P(A_2 \mid \overline{B})$;

(B) $P(A_1B \cup A_2B) = P(A_1B) + P(A_2B)$;

(C) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$;

(D) $P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)$.

解:(B)正确.

法一:因为 $P[(A_1 \cup A_2) \mid B] = \dfrac{P(A_1B \cup A_2B)}{P(B)}$, $P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) = \dfrac{P(A_1B) + P(A_2B)}{P(B)}$,比较上面两式,可知(B)成立.

法二:等式 $P[(A_1 \cup A_2) \mid B] = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$ 两边同乘以 $P(B)$ 得

$$P(B)P[(A_1 \cup A_2) \mid B] = P(B)P(A_1 \mid B) + P(B)P(A_2 \mid B)$$

即

$$P((A_1 \cup A_2)B) = P(A_1B) + P(A_2B).$$

(A)(C)(D)错.

反例:掷骰子 $A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{1,3,4,6\}, B = \{2,4,6\}$.

$P[(A_1 \cup A_2) \mid \overline{B}] = \dfrac{2}{3} \neq P(A_1 \mid \overline{B}) + P(A_2 \mid \overline{B}) = \dfrac{4}{3}$,(A)错;

$P(A_1 \cup A_2) = \dfrac{5}{6} \neq P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} = 1$,(C)错;

取 $A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{1,3,4\}$

$P(B) = \dfrac{1}{2} \neq P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$,(D)错.

例10 设 A,B 为任意两个事件,且 $A \subset B, P(B) > 0$,则下式成立的是(　　).

(A) $P(A) < P(A \mid B)$;　　(B) $P(A) \leqslant P(A \mid B)$;

(C) $P(A) > P(A \mid B)$;　　(D) $P(A) \geqslant P(A \mid B)$.

解:$P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} \geqslant P(A)$,所以选(B).

注:若条件改为:$A \subset B, 0 < P(B) < 1$,则正确选项为(A).

例11 设A,B是两个随机事件，$0<P(A)<1,P(B)>0,P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则必有(　　).

(A) $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$；　　(B) $P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$；

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$；　　(D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$.

解：在 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$ 两边同乘 $P(\overline{A})$ 得

$$P(\overline{A})P(B|A)=P(B|\overline{A})P(\overline{A}),$$

而
$$P(B|\overline{A})P(\overline{A})=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB),$$

$$P(\overline{A})P(B|A)=(1-P(A))P(B|A)=P(B|A)-P(AB)$$

可推出 $P(B|A)=P(B)$，所以选(C).

例12 设A,B,C为随机事件，A与C互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2},P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB|\overline{C})$ $=$ ________.

分析：由已知得 $AB\subset\overline{C}$.

解：$P(AB|\overline{C})=\dfrac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\dfrac{P(AB)}{P(\overline{C})}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{4}$. 所以应填$\dfrac{3}{4}$.

例13 设A,B,C是三个相互独立且概率不为零的随机事件，且$0<P(C)<1$，则在下列给定的四对事件中不相互独立的是(　　).

(A) $\overline{A+B}$与C；　　(B) $\overline{AC}$与$\overline{C}$；

(C) $\overline{A-B}$与$\overline{C}$；　　(D) $\overline{AB}$与$\overline{C}$.

解：$P(AC\cap C)=P(AC)\neq P(AC)P(C)$，(因为 $0<P(C)<1,P(AC)=P(A)P(C)\neq0$). 故应选(B).

例14 设A,B,C三个事件两两独立，则A,B,C相互独立的充要条件(　　).

(A) A与BC独立；　　(B) AB与$A\cup C$独立；

(C) AB与AC独立；　　(D) $A\cup B$与$A\cup C$独立.

解：由A与BC独立，可得$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，反之也成立，所以应选(A).

例15 对于任意事件A,B，有(　　).

(A) 若$AB\neq\varnothing$，则A,B一定独立；

(B) 若$AB\neq\varnothing$，则A,B有可能独立；

(C) 若$AB=\varnothing$，则A,B一定独立；

(D) 若$AB=\varnothing$，则A,B一定不独立.

解：(A) 错. 反例：掷骰子 $A=\{1\},B=\{1,2,3\},AB=\{1\}$，

但 $P(AB)=\frac{1}{6}\neq P(A)P(B)=\frac{1}{12}$，或 $P(B|A)=1\neq P(B)=\frac{1}{2}$；

(C) 错. 反例：掷骰子 $A=\{1\},B=\{2\},AB=\varnothing$，

但是 $P(B|A)=0\neq P(B)=\frac{1}{6}$.

(D) 错. 反例：$A=\{1\},B=\varnothing$，此时A,B独立.

综上知，应选(B).

例16 将一枚硬币独立地掷两次，$A_1=\{$第一次出现正面$\}$，$A_2=\{$第二次出现正面$\}$，$A_3=\{$正反面各出现一次$\}$，$A_4=\{$正面出现两次$\}$，则事件（　　）.

(A) A_1,A_2,A_3 相互独立；　　(B) A_2,A_3,A_4 相互独立；

(C) A_1,A_2,A_3 两两独立；　　(D) A_2,A_3,A_4 两两独立.

解：由题意，$P(A_1)=\frac{1}{2}$，$P(A_2)=\frac{1}{2}$，$P(A_3)=\frac{1}{2}$，$P(A_4)=\frac{1}{4}$，$P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=P(A_2A_3)=\frac{1}{4}$，$P(A_1A_4)=\frac{1}{4}$，$P(A_1A_2A_3)=0$，可以验证(C)正确.

例17 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为$\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$ ________.

解：依题意：$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$，故 $P(AB)+P(A\overline{B})=P(AB)+P(\overline{A}B)$，即 $P(A)=P(B)$，又因为 A 和 B 相互独立，故 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 也相互独立，于是有

$$P(\overline{A}\ \overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=[P(\overline{A})]^2=\frac{1}{9},$$

所以 $P(\overline{A})=\frac{1}{3}$，$P(A)=\frac{2}{3}$.

例18 设 $P(A\mid B)=P(B\mid A)=\frac{1}{4}$，$P(\overline{A})=\frac{2}{3}$，则（　　）.

(A) 事件 A,B 独立且 $P(A\cup B)=\frac{7}{12}$；

(B) 事件 A,B 独立且 $P(A\cup B)=\frac{5}{12}$；

(C) 事件 A,B 不独立且 $P(A\cup B)=\frac{7}{12}$；

(D) 事件 A,B 不独立且 $P(A\cup B)=\frac{5}{12}$.

解：由 $P(A\mid B)=P(B\mid A)=\frac{1}{4}$ 得 $P(A)=P(B)$，再由 $P(\overline{A})=\frac{2}{3}$，得

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{3}，且\ P(AB)=\frac{1}{4}P(A)=\frac{1}{12},$$

因为 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，所以 A,B 不独立.

且 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{2}{3}-\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$，所以应选(C).

例19 设事件 A,B 相互独立，且 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$（　　）

(A) 0.1；　(B) 0.2；　(C) 0.3；　(D) 0.4.

解：由 $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=0.5P(A)=0.3$，得 $P(A)=0.6$，从而 $P(B-A)=P(B\overline{A})=P(B)P(\overline{A})=0.5\times0.4=0.2$.

题型二　有关古典概型、几何概型、贝努利概型的命题

【提示】首先要正确判断概型，其次弄清样本空间与有关事件的结构，再按相应的概率计算公式进行计算. 古典概型中常用到排列组合中的相关知识.

例1 在长度为 a 的线段内任取两点将其分成三段,求它们可以构成一个三角形的概率.

解: 设第一段长为 x,第二段长为 y,则第三段长为 $a-(x+y)$. 如图 1－2 所示,样本空间为

$$S=\{(x,y)\mid 0<x<a,0<y<a,0<x+y<a\},$$

其面积 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{a^2}{2}$,记事件 A 为“三线段可以构成三角形”,其面积为 $S_{\triangle DCE}$.

由三角形两边之和大于第三边的性质,有

$$\begin{cases}x+y>a-(x+y),\\ x+a-(x+y)>y,\\ y+a-(x+y)>x,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x+y>\dfrac{a}{2},\\ x<\dfrac{a}{2},y<\dfrac{a}{2}.\end{cases}$$

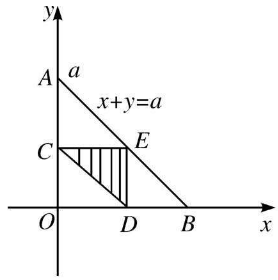

图 1－2

亦即

$$A=\left\{(x,y)\mid 0<x<\frac{a}{2},0<y<\frac{a}{2},\frac{a}{2}<x+y<a\right\},$$

其对应的 $S_{\triangle DCE}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$,因此事件 A 的概率为两个三角形面积之比:$P(A)=\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}a^2}=\dfrac{1}{4}$.

例2 在区间(0,1)中随机地取两个数,则这两个数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为________.

解: 设所取的两个数分别为 x 和 y,则以 x 为横坐标,以 y 为纵坐标的点 (x,y) 随机地落在边长为 1 的正方形内(如图 1－3 所示).

设事件 A 表示“所取两数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$”,则

样本空间 $\Omega=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$;

事件 A 的样本点集合为区域 G 中所有的点,而

$$G=\left\{(x,y):0<x<1,0<y<1,|y-x|<\frac{1}{2}\right\}.$$

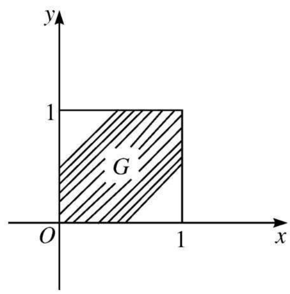

图 1－3

区域 Ω 的面积 $S_\Omega=1$,区域 G 的面积 $S_G=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$.

因此,$P(A)=\dfrac{S_G}{S_\Omega}=\dfrac{3}{4}$.

例3 设三次独立试验中,事件 A 出现的概率均相等,且至少出现一次的概率为 $\dfrac{19}{27}$,则在一次试验中,事件 A 出现的概率为多少?

解: 事件 A 在每次试验中出现的概率均为 p,则三次实验中事件 A 一次也不发生的概率