FENSHUJIE XITONG DE

DIANLU SHEJI JI YINGYONG

分数阶系统的电路设计及应用

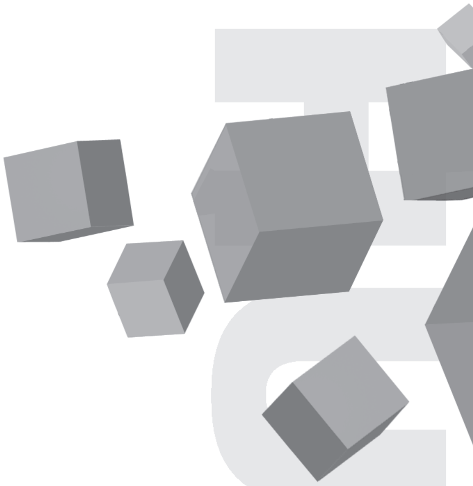
周激流　蒲亦非　刘　彦　张　意　主编

四川大学出版社

分数阶系统的

电路设计及应用

周激流　蒲亦非　刘　彦　张　意　主编



四川大学出版社

责任编辑:毕　潜
责任校对:唐　飞
封面设计:墨创文化
责任印制:王　炜

图书在版编目(CIP)数据

分数阶系统的电路设计及应用 / 周激流等主编.
—成都：四川大学出版社，2013.6
ISBN 978-7-5614-6916-3

Ⅰ.①分…　Ⅱ.①周…　Ⅲ.①非线性控制系统-电路设计　Ⅳ.①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 135703 号

书名　**分数阶系统的电路设计及应用**

主　编	周激流　蒲亦非　刘　彦　张　意
出　版	四川大学出版社
地　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　行	四川大学出版社
书　号	ISBN 978-7-5614-6916-3
印　刷	四川永先数码印刷有限公司
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　张	9.25
字　数	208 千字
版　次	2015 年 12 月第 1 版
印　次	2015 年 12 月第 1 次印刷
定　价	36.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电话:(028)85408408/(028)85401670/(028)85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:http://www.scup.cn

前 言

随着分数阶微积分理论对现代信号处理中各个研究领域的渗透，信号处理方法中涉及的微积分运算从传统的整数阶扩展到了非整数阶，这一扩展极大地丰富了信号处理的手段，拓展了人们的思路。基于分数阶微积分理论的信号处理研究已经成为热点。本书主要对分数阶微积分的各种应用进行了尝试，并站在工程的角度研究了分数阶微积分运算的具体实现方法。主要工作包括：

系统地总结分数阶微积分理论的发展历史以及国内外的研究现状，已取得的重大研究成果，分析分数阶微积分应用中现存的问题。回顾分数阶微积分在发展过程中逐渐统一起来的几个主要定义，阐述各种定义之间的转换关系、几何意义和物理解释。探讨分数阶微积分的主要性质和一些常见函数的分数阶微积分，作为后续章节的研究基础。

研究阶次形如 $1/2^n$，$n\in\mathbf{Z}$ 的分数阶阻抗的实现方法。将连分式理论应用于 $1/2^n$ 阶模拟分抗逼近电路设计。从分数阶微积分的定义出发，推导出理想分抗的传递函数。应用连分式理论对 1/2 阶理想分抗的传递函数进行连分式分解，通过连分式迭代求解的方法得到传递函数的截断连分式表达形式。对 1/2 阶理想分抗的传递函数进行有理分式逼近，得到 1/2 阶模拟分数阶阻抗逼近电路的传递函数，并推广到 $1/2^n$，$n\in\mathbf{Z}$ 阶。采用网络综合的方法用普通的无源 RC 器件设计 $1/2^n$ 阶模拟分数阶阻抗逼近电路的具体结构，并通过 MULTISIM10 对电路进行仿真。将实验结果同现有研究成果进行对比，分析本书所提方案的优缺点。

为了切实地解决任意阶次分抗电路的设计问题，提出基于 Obreschkoff 公式的设计方法。以 Obreschkoff 公式为基础，对任意阶理想分抗的传递函数 s^α 做有理化的展开，得到有理分式与余项之和的形式，其中 α 可以取任意值(仅局限于实数域进行讨论)。将结果中的有理分式部分作为分抗传递函数的有理化近似，从而构造基于无源 RC 器件的模拟分抗电路。从理论上分析余项部分对所设计的模拟分抗电路逼近精度的影响，以及利用 Obreschkoff 公式对理想分抗传递函数进行有理化展开的级数对逼近精度的影响。数值实验和电路仿真结果都与理论推导结论吻合，证实了该方法的有效性和可靠性。

以分数阶线性动态系统模型为基础，将线性 Kalman 滤波器推广到分数阶，得到分数阶线性 Kalman 滤波器的递推模型。以分数阶非线性动态系统模型为基础，将扩展的 Kalman 滤波器推广到分数阶，得到分数阶扩展 Kalman 滤波器的递推模型。为解决分数阶扩展 Kalman 滤波器在进行线性化时会引入误差的问题，以概率论为基础，导出分数阶的 Unscented Kalman 滤波器，得到其递推模型。所得的三种滤波器构成分数阶 Kalman 滤波器簇，将其应用于各种典型的线性和非线性系统。实验结果证明，在合理设置分数阶 Kalman 滤波器簇阶次的情况下，能够取得优于传统 Kalman 滤波器的效果。

针对现有的通过图像掩模进行去噪的算法多采用平滑去噪方式，在去噪的同时会丢失图像纹理细节信息的问题，尝试应用分数阶积分运算完成数字图像的噪声去除。分数阶微积分的 Riemann-Liouville 定义是从分数阶积分运算出发，进而扩展到分数阶微分运算，用其进行数字图像积分去噪研究有其先天的优势。研究证明信号的各种分数阶积分与整数阶积分最大的区别在于，信号分数阶积分不等于对信号做权值为 1 的加权求和，这个特性使得分数阶积分在对信号做平滑处理的时候比整数阶积分能更好地保留信号高频部分。这就为利用分数阶微积分处理进行图像平滑去噪，同时保留图像细节信息提供了理论基础。本书从分数阶微积分的 Riemann-Liouville 定义出发，利用 Lagrange 插值方法推导出分数阶积分的数值实现方式，并以此为基础构造了数字图像的分数阶积分掩模。为了使得所构造的掩模具有抗旋转特性，在八个不同方向上分别进行分数阶积分，并将积分运算的结果相加得到最终的数字图像积分去噪结果。为方便工程的实现，需为该算法设计相应的电路模型。实验结果证明，图像的分数阶积分算子能够有效地完成去除噪声同时保留图像的纹理细节信息的功能。

作为对于分数阶微积分运算在模式识别领域的一次尝试，提出分数阶方向梯度直方图特征，该特征属于改进的形状特征，其不同于传统方向梯度直方图特征，不仅包括了图像的形状信息，还由于该特征通过图像的分数阶微积分掩模来提取，以及分数阶微积分算子所固有的特性，其包括了图像中的纹理细节特征，因而相较于传统的方向梯度直方图，经过改进的特征能够更好地解决具有相似形状的图像分类问题。在美国加州理工学院的目标分类数据库 Caltech101 Object Categories 上进行图像分类实验的结果表明，该特征比传统的方向梯度直方图特征更具可辨识性。

最后，本书总结了对于分数阶微积分在信号处理中的应用所做的工作，并结合研究过程中遇到的问题和研究体会，提出了后续研究思路。同时结合国内外学术界对分数阶微积分的研究，展望了其在未来可能的发展方向。

本书的编写和出版，得到了张妮、张卫华、张永清、刘军、朱伍洋、陈书书的支持与帮助，得到了四川大学出版社的大力协助，在此一并致谢。

编　者

2015 年 3 月

目　录

第 1 章 绪 论

1.1 分数阶微积分的发展背景

分数阶微积分(Fractional Calculus)是研究任意阶次微积分的数学理论，是对整数阶微积分的推广。这并不是一个全新的概念，相反，分数阶微积分几乎与整数阶微积分同样古老。早在 1695 年 9 月 30 日 Leibniz 写给 L'Hospital 的信件中就已经提到了这个概念。此后，数学界青史留名的众多著名学者，比如 Fourier、Euler、Lagrange、Liouville、Riemann、Holmgren 等在 18、19 世纪对分数阶微积分理论进行了持续不断的系统研究，并做出了卓越的贡献。Fourier 在 1822 年提出了分数阶微积分的 Fourier 定义。Liouville 在 1832 年率先指出函数的分数阶微分运算可以先将函数展开为幂级数形式，再逐项进行分数阶微积分运算。Riemann 在 1847 年通过对泰勒级数展开的研究，指出分数阶微积分定义的下限可以从零开始，并提出了分数阶微积分的定积分形式的定义。Hargreave 在 1848 年将传统整数阶微积分运算的 Leibniz 法则推广到了分数阶。Greer 在 1859 年给出了正弦信号和余弦信号 1/2 阶微分的计算公式。Grünwald 将 Liouville 和 Riemann 的研究成果统一了起来，在 1867 年给出了差分极限形式的分数阶微积分定义。Letnikov 在 1868 年论证了分数阶微积分阶次具有可加性。Marchaud 在 1927 年提出了有限差分形式的分数阶微积分定义。Widder 在 1941 年研究了分数阶微积分的 Laplace 变换。Caputo 在 1967 年提出了适合工程应用的分数阶微积分定义。Osler 在 1970 年论证了可以应用于分数阶微积分的广义链式运算法则。Love 在 1971 年将分数阶微积分运算阶次由分数推广到了复数，使得分数阶微积分具有了更加严谨的定义——非整数阶微积分。这个非整数阶即任意阶，包括了实数和复数，但分数阶微积分是从 Leibniz 时代就被广泛地采用，故今天人们仍采用分数阶微积分作为学科名称。

传统的整数阶微积分具有清晰的物理意义，比如一阶微分表示斜率、物体的运动速度，二阶微分表示物体的加速度；积分表示物体的面积、距离等物理概念。正因为这样一些清晰且易于理解的几何解释和物理意义的存在，传统的整数阶微积分才能被广泛地应用于解决科学研究中遇到的各种实际问题。而分数阶微积分由于自身的复杂性，与其对应的物理意义不甚明确，以至于自诞生以来的三个多世纪里，分数阶微积分并没有得

到物理学界以及经典力学理论的支持，也没有如整数阶微积分一样被用于解决科学研究中遇到的具体问题，而是更多地作为数学领域的纯理论研究仅仅活跃在数学家的世界里。直到1974年在美国纽黑文市召开的第一届关于分数阶微积分的国际会议上，寻求分数阶微积分的物理意义作为一个研究中亟待解决的问题才被正式提出[1]。不过当年这个问题并未得到妥善解决，因此在1984年英国斯特拉思克莱德大学召开的分数阶微积分国际会议[2]以及1989年东京日本大学召开的分数阶微积分国际会议[3]上，这个问题被反复地提出来进行研究。1996年瓦尔纳召开的关于变换方法和特殊函数的国际会议[4-6]上，这个问题仍然没有得到妥善的解决。甚至到了今天，对分数阶微积分的物理意义，学术界仍旧没有一个统一的、普遍的认识。

分数阶微积分是一种强有力的数学分析工具，却因为无法应用于具体科学研究而被束之高阁，这样僵持的局面终于在20世纪晚期被打破。随着科学技术的不断发展，涌现出了大批经典物理学无法解释的问题，研究热点逐渐集中到了分形几何学及分形动力学。伯努瓦·曼德勃罗(Benoit Mandelbrot)[7]在20世纪70年代末首次提出了自然界中存在着大量的分数维现象，整体与部分之间存在着自相似现象以及分数阶布朗运动与Riemann-Liouville定义下的分数阶微积分有着紧密的联系等研究成果。在这样的背景之下，分形几何和分形动力学大行其道，分数阶微积分理论作为分形理论的数学基础，也得到了飞速的发展和广泛的应用。

1.2 分数阶微积分的研究现状

分数阶微积分在科学研究和工程实践中的应用，自20世纪末以来，发展得空前兴旺。特别是随着计算机技术的发展和对分数阶微积分的数值运算方法研究的深入，分数阶微积分固有的运算量大等缺点不再成为影响其发展的绊脚石，分数阶微积分理论也越来越多地应用于物理学、控制工程、信号处理、图像处理等学科的研究工作中。

1.2.1 分数阶微积分在物理学中的应用

经典的牛顿力学理论建立在对绝对时间和绝对空间的认知以及欧几里得几何学的基础之上，在牛顿力学里，时间和空间是无始无终、亘古不变地存在，自然也是处处连续的。牛顿力学中所涉及的物理量，比如速度、加速度、动量、动能及各种力都是在这样的时空前提之下所得，因此也都是连续的量。在整数阶微积分理论中，这些物理量都是用解析函数表示的。因此，经典力学理论和线性物理学理论得到的结论是多数物理现象都可以用解析函数来表示，其动态过程也可以用运动微分方程来表示，这些微分方程的解是解析函数，比如牛顿力学中的欧拉－拉格朗日方程及汉密尔顿方程的解都是解析函

数。在牛顿力学蓬勃发展的时期，物理学界通常认定所有物理学及力学现象都可以通过解析函数来描述。19 世纪与 20 世纪物理学界所取得的成果，如声学理论、热传导理论、电磁物理理论以及量子力学等大都基本符合这样的观点。但随着科学研究的进一步深化，越来越多的反例提醒着研究人员，现有的结论似乎并不是无懈可击的。

第一个反例出现在 1926 年，Richardson[8] 指出大气湍流速度场具有不规则的起伏特性，其间的风在振幅和方向上会随机地发生剧烈的变化，因此大气湍流速度场不能用解析函数来描述，是一个不可微的过程。这一发现导出的结论是风的运动是不规则的，不能用流体力学中的 Navier-Stokes 方程组来描述，这就违背了经典物理学中关于任何物理过程都可以通过解是解析函数的微分方程来刻画的原则。然而，科技发展到今天，低黏性系数下的湍流速度场已经被证明是多分形的[9−14]。

另外一个例子是统计力学的基础，也是随机游走和反常扩散理论的基础——布朗运动。20 世纪初，爱因斯坦将布朗运动与热传导方程统一在一起，并基于此研究了一类数学病态函数，比如处处连续却处处不可微的 Weierstrass 函数[15]，其演化过程无法通过传统的微分方程来刻画。没有特征尺度、不可微、具备尺度不变性，具有如此特性的函数被称为分形函数[16]，只具有分数阶的导数。

流变力学中关于黏弹性理论的研究，最初是建立在传统的整数阶微分方程之上[17−23]的，实践证明，应用分数阶微分方程所建立的黏弹性数学模型比传统的模型更为优秀。

1.2.2 分数阶微积分在控制系统中的应用

传统控制理论中，用微分方程刻画控制系统，这些方程的微分阶次通常为整数阶。文献[24]中明确指出："分数阶这个概念更加接近于真实的世界，因为实际系统通常都是分数阶或更接近于分数阶。"实验表明，对于大多数的实际系统来说，其分数特性不太明显，能够通过整数阶的微分方程予以近似描述，这也正是控制理论一开始能够在整数阶微积分基础上蓬勃发展的原因。但对于本身具有分数阶特性的对象，显然采用分数阶的描述更能揭示对象的本质特性及行为。特别是随着先进运算工具的兴起，及对分数阶微积分方程研究的深入[25−32]，分数阶微积分运算的复杂性及缺乏相应数学工具等以往阻挡分数阶控制系统发展的桎梏已不复存在，关于分数阶控制系统理论的研究成果也如雨后春笋，不断涌现。

20 世纪 60 年代，Manabe 提出将非整数阶积分概念引入对控制系统的开环传输函数的研究[33]。C. F. Chen 将求解状态方程的 Walsh 矩阵推广到了分数阶，并将其应用于分布式系统[34]。H. Sun 提出了分数阶传输函数的线性近似方法[36]。Oustaloup 在 1981 年时就提出了阶次在 1 到 2 之间的分数阶线性反馈控制系统[35]，在 1988 年又提出了一种新的非整数阶的控制决策[37]，在 1990 年被授予 CRONE(Contrôle Robuste d'Ordre Non Entier)控制器的专利权[39]，并出版了相关专著和研究成果[41，46]。Skaar 于 1988 年

率先研究了黏弹性控制系统的稳定性[38]。Axtell 在 1990 年纽约召开的宇航和电子学国际会议上，发表了关于将分数阶微积分应用于控制系统的综述[40]，这也是早期关于分数阶控制理论的综述之一。Kmetek 等从 1991 年开始研究分数阶系统的鲁棒性[42,44]。同年，Bagley 发表了其关于黏弹性阻尼控制系统的分数阶状态方程的研究成果[43]。1995 年，Mbodje 研究了波动方程的分数阶微分控制[47]。至此，分数阶控制理论进入了飞速发展的时代。

对分数阶控制系统的研究主要包括两方面：被控对象本身具备分数阶特性，即是分数阶的动态系统；控制系统中采用的是分数阶控制器。目前对于分数阶控制系统的研究主要集中于后者，这是由于现有的实际系统模型大都是传统的整数阶模型，为了得到更好的控制性能，对其使用分数阶控制器。

目前对分数阶控制器的研究成果主要分为四个方向[48-49]：一是 TPI（Tilted Proportional and Integral）控制器[45]，由微分单元、积分单元和一个分数阶单元并联构成，具有系统参数少、控制器结构简单、易于调谐等特点，由于性能不甚理想，通常只作为象征分数阶微积分正式进入控制界的标志；二是 Oustaloup 提出的 CRONE 控制器[39,41,46,50-57]，该控制器是最早获得广泛应用的分数阶控制器，现已形成了通用的 Matlab 的 CRONE 工具箱，由于其性能良好，结构也较为简单，在分数阶控制领域具有举足轻重的作用，Oustaloup 现在也仍然活跃在分数阶控制领域；三是 Podlubny 提出的 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器[58]，由于传统 PID（Proportion Integration Differentiation）控制器在工程界的压倒性优势，分数阶的 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器自诞生以来便受到格外的重视，其精确的控制性能更是吸引了大量研究人员和工程技术人员的目光，该控制器参数众多，需要 3 个增益参数和 2 个阶次参数，调谐不易，结构复杂，为解决性能与复杂度之间的矛盾，大量研究人员做出了卓越的贡献[59-72]；四是分数阶超前滞后校正补偿器[73-77]。

1.2.3 分数阶微积分在分抗设计中的应用

工程实践中所分析处理的信号通常为模拟信号。传统整数阶微积分可以通过简单的 RC 元件构成的一阶微分和一阶积分单元电路，以及这些单元电路的混联，实现高阶微积分运算，因而在工程界应用十分广泛。分数阶微积分运算能否广泛地应用于工程实践中，取决于其硬件模拟电路是否实现。在文献[78]中，J. A. T. Machado 给出了基于 Grümwald-Letnikov 定义的分数阶微分的概率学解释。在模拟域，完成分数阶微积分运算的器件被称为分抗（Fractance）。分抗器件的阻抗函数表达式为 $Z(s)=k_0/s^{\alpha}$，其中 k_0 为常数，α 是分数阶阶次。随着 α 值的变化，分抗器件从电感性向电抗性变化[112-113]。分抗、分数阶微积分器件、分数阶电容三个概念可以等价使用[114]。

模拟分抗电路的构造可以分为基于无源器件构造和基于有源器件构造两大类[79-103]。通常采用的无源器件包括三种基础元件，即电阻、电感和电容，或者分路

器[104-109]。利用无源器件进行分抗模拟，具有结构简单、意义明确的特点，不足之处在于容易产生负元件，需要在无源RLC器件上采用负阻抗转化器，且所使用的无源器件的数值不太规范，即使如此，利用无源器件设计分抗仍然不失为一种优秀的设计思路，受到广大科研人员的青睐，也是分抗设计中考虑的最主要的方法。也有人采用了有源器件，比如运算跨导放大器（Operational Transconductance Amplifier，OTA）和电流反馈运算放大器(Current Feedback Amplifier，CFA)来设计分抗，并发表了相应的研究成果[110-111]。

设计分抗器件的方法中有一大类可以归结为通过分形结构来实现，即构造具有高度自相似特性的递归电路。M. Nakagawa和Sorimachi给出了一个由电阻和电容构成的树形结构电路[112]。Oldham给出了分抗器件的链式电路实现方式[28]。蒲亦非给出了一种网格型的电路实现[115-116]。但是，基于分形电路的实现方法总会遇到高消耗和高空间占用率的问题，其构造出的电路元件数量与电路的递归级数成指数关系，会增加制造的成本；这类方法理论上所需的电路级数为无穷级，这在工程实践中是无法接受的，必须对其进行截断操作，利用有限级电路来逼近，这就会引入截断误差；同时，该类方法仅能构造特定阶次的分抗，比如1/2阶，不能够实现任意阶次的分抗电路。实现分抗器件的另一类重要方法是找到一个有理函数，使其能够很好地逼近分抗的传递函数。目前已经有了许多方法可以用于计算逼近分抗器件传递函数的有理函数，包括Oustaloup方法、牛顿法、Matsudas方法等[117-121]。采用连分式分解的方法也能够很好地实现分抗器件。由此得到的有理逼近函数通常形如梯形网络，文献[121]对各种实现方法之间的性能作了详细的比较分析。

1.2.4 分数阶微积分在图像处理中的应用

分数阶微积分在图像处理领域的应用是在近十年内开始兴起的，目前的研究主要集中在利用分数阶微积分进行边缘检测、轮廓检测、图像去噪、图像增强、图像的奇异性检测等方面。蒲亦非等提出了分数阶导数的数值计算方法，并将其用于数字图像增强[122-123]，构造了数字图像的分数阶微分掩模和积分掩模，同时还提出了基于分数阶积分掩模的图像去噪算法[124-127]及设计了相应的实现电路[128]。该类方法利用了分数阶微积分固有的特性，能够有效地保护图像中的纹理细节信息及图像边缘等小尺度信息。杨柱中等提出了基于分数阶微分的数字图像边缘提取算法，并证明了该算法的有效性[129]。Unser提出了分数阶的B样条函数，并以此为基础构造了分数阶的B样条小波[130-131]。J. M. Vilardy等提出利用分数阶傅里叶变换对彩色数字图像进行相位加密[132]。Lundahl Torbjorn等提出了基于分数阶布朗运动的最大似然估计算子，并成功将其应用于图像纹理信息处理[133]。S. Hungenahally从人类的视觉特性出发设计了分数阶视觉感知滤波器，并将其应用于图像增强和编码[134]。J. You和S. Hungenahally等提出了针对图像纹理分割问题的分数阶辨识方法[135]。汪凯宇等在解决数字图像恢复问题时，尝试提取

数字图像的分数阶奇异成分，并证实该种方法有助于在恢复图像的时候增强图像纹理[136]。刘红毅等研究了分数阶样条小波在图像融合方面的应用[137]，其研究成果同样证实了分数阶微积分对于数字图像纹理信息的敏感性。这样一些关于分数阶微积分应用于图像处理领域的尝试都证实了分数阶微积分对于图像纹理等细节信息更为敏感，当应用于数字图像处理的时候，比传统的微积分运算具有更好的性能。白健和冯像初等以经典的P—M方程为基础，研究了基于分数阶微分方程的分数阶各向异性扩散方法，并证明了其在图像去噪方面的优异性能[138]。张意和蒲亦非等在此基础上进行扩展，尝试了利用分数阶扩散的方法对CT (Computed Tomography)图像去金属伪影的处理[139]。这一类的研究成果又表明基于分数阶微分方程的数字图像处理方法能够有效地抑制图像处理过程中产生的阶梯效应。

1.2.5 分数阶微积分在模式识别中的应用

分数阶微积分应用在模式识别方面的尝试是从分数阶傅里叶变换开始的。1996年，Adolf Lohmann等尝试将基于匹配滤波器的模式识别中的标准傅里叶变换推广到分数阶傅里叶变换，使得系统具有了空间可变性，并证明了在特定的环境下，这样的空间可变性会为模式识别带来意想不到的效果[140]。2001年，Zeev Zalevsky等利用基于相位空间特征的分数阶傅里叶变换进行听觉信号识别并获得成功[141]。2002年，哈尔滨工业大学的朱邦和等提出利用数字全息技术和分数阶相关器对透明的三维物体进行识别，该方法将数字全息技术与分数阶傅里叶变换结合在一起，是一次全新的尝试[142]。同年，Billur Barshan和Birsel Ayrulu猜测利用分数阶傅里叶变换对神经网络的输入信号做预处理，在选择适当的参数时，能够对神经网络的性能有很大的提升，并以通过声呐对不同物体进行定位和识别的例子证明了该种猜测的正确性[143]。近十年来，基于分数阶微积分的模式识别方法层出不穷，包括利用分数阶布朗运动来分析大气粒子纹理特征[144]，利用分数阶奇异值分解特征来进行人脸识别[145]，利用分数阶傅里叶变换进行特征提取的人脸识别算法[146]，基于联合分数阶傅里叶变换的色彩模式识别方法[147]等。

分数阶微积分在模式识别领域的发展起步较晚，但最近十年取得了丰硕的研究成果，吸引了全世界范围内研究人员的目光。如何利用分数阶微积分固有的特性提高模式识别算法的性能，成为模式识别领域的一个研究热点。

1.3 分数阶微积分应用中现存的问题

对分抗器件的研究从20世纪60年代开始至今从未间断过，究其原因，是因为有了分抗器件，特别是容性分抗，即分数电容元件，再结合有源器件(如运算跨导放大器)，

就可以实现模拟的分数阶微分和积分电路，从而迈出分数阶微积分从理论研究彻底进入工程实践的决定性一步。但遗憾的是，至今仍没有合适的材料能完美地制造出分数阶电容，在没有分抗器件的条件下，只能退而求其次，想方设法借助现有的器件来逼近分抗的功能，同时再继续观察分析各类物质材料、器件、现实系统等是否具有分抗的特征，哪怕是在一定条件下或频域范围内存在分抗性能，对最终设计出任意阶的分抗器件都是有益的。在后者短时间无法取得突破的情况下，科研人员只能把目光聚焦在前一种方法上，这也正是半个世纪以来分抗研究的热点。

现有的设计方法都或多或少地存在着各自的弱点。其中一大类是基于高度自相似特性的分形电路设计方法，这一类方法只能得到特定阶次的分抗器件，而且要达到无误差的逼近分抗特性，构成这些器件的电路元件数量理论上要无穷多个，这无论是在制造工艺上还是电路调谐过程中，都是无法满足的。为了克服这样的问题，必须对电路实现截断处理，势必引入截断误差，降低电路的逼近性能。因此，基于高度自相似特性来设计模拟分抗电路的方法，仅具有理论上的指导意义。另一大类是基于牛顿迭代法及改进牛顿迭代法的各类方法，这一类方法能够完成 $1/n(n \in \mathbf{Z})$ 阶的模拟分抗电路设计，其所得到的分抗阶次形式固定，并未真正实现任意阶这个概念，且迭代方法计算量大，所得到的电路阶次较高，往往在所得电路中电容与电感并存，对电路调谐极为不利。该方法所得到的分抗电路性能与迭代次数有密切关系，迭代次数越高，所得电路特性对理想分抗的逼近越好，所付出的代价是电路复杂度增加，且迭代结果容易出现负阻抗，使得电路必须引入负阻抗转换器等器件，无法实现真正的无源电路。而从分数阶控制系统理论中为逼近分数阶系统传递函数引申出来的各类方法也存在上述问题。

随着分数阶微积分在控制系统理论中的广泛应用，已有的研究证明，分数阶动态系统模型是描述如电动力学系统等具有非线性特性的系统的有力工具。比起传统的整数阶系统模型，该模型能够更简单地引入诸如摩擦和滑动等非线性效应，这是研究状态反馈控制系统的基础。为了实现状态反馈控制，当系统的状态无法直接进行测量时，需要引入一种状态估计方法。研究整数阶系统参数辨识和状态估计的方法有很多，而对于分数阶系统，参数辨识和状态估计的过程并不这样简单。已有很多方法尝试解决这个问题，包括频域方法[148]和时域的非整数阶参数辨识方法[149−150]等，但并没有取得预期的效果。找到一种能够有效地对分数阶系统进行状态估计的方法成为分数阶状况反馈控制实现的关键。

近年来，数字高清电视的推广需要更加高效、实时的数字图像去噪算法。生物医学技术的发展需要更为清晰的超声图像、MRI（Magnetic Resonance Imaging）图像等。卫星遥感图像需要纹理细节更清晰，以此来提高对像素级小目标的识别能力。而图像在采集或传输过程中，常常由于噪声使得画质严重下降，而传统的去噪算法在去除噪声的同时往往使图像变得模糊，丢失纹理细节信息，无法满足后续的高层次处理。这就急需一种既能高精度、实时地进行数字图像去噪，同时又能最大限度地保留图像纹理细节信息的新型去噪方案。噪声在图像中主要表现在高频部分，与周围的像素存在“突变”，这是

去噪算法采取平滑的原因。但是图像中的“突变”也可能是边缘或者纹理信息，一味进行平滑或者对高频分量进行去除可能会模糊边界，丢失纹理细节信息，得到不满意的结果。数字图像的空间域去噪通常分为线性滤波和非线性滤波两类。线性滤波主要适用于滤除高斯噪声，其主要算法包括均值滤波[151]、线性加权滤波[152]、倒数梯度加权滤波[152]等。这类算法往往具有长拖尾噪声无法消除和易使得图像边缘结构模糊的缺点。非线性滤波能够较好地保持图像高频细节，使滤波后的图像能够清晰逼真，其主要算法包括中值滤波[153]、自适应滤波[154]、频域滤波[151-152]、各向异性扩散模型[155-157]、TV 去噪[158]及非局部均值去噪[159]等。这类算法往往计算复杂，无法实现实时性去噪。

近三百年来，分数阶微积分在数学分析领域中业已成为一个重要分支，但如何将分数阶微积分应用于现代信号分析与处理，特别是图像信号处理之中，在国内外仍是一个值得研究的新兴学科分支。分数阶微积分的 Riemann-Liouville 定义是从分数阶积分运算出发进而扩展到分数阶微分运算，故运用 Riemann-Liouville 定义进行数字图像积分去噪研究有其先天的优势。信号的各种分数阶积分与整数阶积分最大的区别在于信号分数阶积分不等于对信号做权值为 1 的加权求和，这个特性使得分数阶积分在对信号做平滑处理的时候能比整数阶积分更好地保留信号高频部分。这就为利用分数阶微积分处理进行图像平滑去噪，同时保留图像细节信息提供了理论基础。

图像分类问题是机器视觉领域中的一类热门又非常困难的问题。机器人要能走入人类环境，通过视觉识别的方法是最为廉价和可行的。计算机理解图像的基础是辨认出图像中的物体，从而部分还原 2 维或 3 维的图像信息。同时，图像分类也是图像处理、图像分割等初级研究的目标之一，是众多基于图像研究的实际应用的基础。因此，通过计算机来实现图像分类对计算机理解图像目标起着至关重要的作用。图像特征的选取是分类方法中重要的环节，选择适当的图像特征可以使得不同的物体对象在高维特征空间中具有良好的可分离性。常用的特征包括频域特征、差分滤波特征、拐角特征、SIFT（Scale Invariant Feature Transform）特征[160]、形状上下文特征[161-163]、方向梯度直方图(Histograms of Oriented Gradients，HOG)特征[164-165]等。其中，形状上下文特征不受图像亮度、颜色、纹理变化影响，是进行图像分类的有效工具。但对于某些具有类似形状的不同物体，传统的形状上下文特征的识别效果显然是不够好的。比如向日葵和荷花，对于人类来说，能够轻而易举将它们分开，而对于仅依靠形状来分类的计算机来说，因为它们都具有类似的外形，所以往往会将它们分为一类，如图 1－1 所示。

方向梯度直方图特征是一种典型的形状特征，在行人识别等方面取得过巨大的成功。通过求取图像的一阶梯度获得的方向梯度直方图特征，并没有提取图像纹理的信息，因此图像的梯度方向直方图特征仅对形状结构差别较大的对象有区分作用，而对结构相似、纹理有区别的图像的区分结果并不是太好。比如图 1－1 的两幅图像中，向日葵和荷花的外部轮廓都具有类似的圆形锯齿包络，对于这样的两种类别，仅依靠传统的梯度方向直方图特征并不能很好地将两个类别区分出来。

图 1－1　具有类似形状、不同纹理的不同类图像示例

1.4　研究内容

针对上述问题，本书主要做了以下几方面的工作：

① 首先将连分式(Continued Fractions)理论应用于分抗逼近电路的设计。通过连分式逼近的方法给出有理化的 $1/2^n$ 阶分抗的数值逼近模型，并运用简单的 RC 元件构造出模拟分抗电路。通过理论分析和实验证明该分抗电路具有良好的分数阶微积分运算性质，能在较宽的频带上实现模拟信号的 $1/2^n$ 阶分数积分运算。

②为了真正实现用一种方法构造任意阶分抗，将 Obreschkoff 公式推广到了复数，并利用其对任意阶的分抗传递函数做有理化近似，从而构造基于无源 RC 器件的模拟分抗电路，并通过理论分析和实验证明该方法的有效性。

③以分数阶动态系统模型为基础，将传统的 Kalman 滤波器推广到分数阶，得到应用于分数阶线性系统的分数阶线性 Kalman 滤波器，以及应用于分数阶非线性系统的分数阶扩展 Kalman 滤波器和分数阶 Unscented Kalman 滤波器。由于分数阶微积分的固有特性，分数阶 Kalman 滤波器具有“记忆”特性，其下一时刻的估计值不仅与系统当前时刻的状态有关，还依赖于当前时刻之前的系统的运行情况。正是由于这一优点，使得分数阶 Kalman 滤波器具有优于传统 Kalman 滤波器的性能。

④通过对分数阶微积分的理论研究，结合欧氏空间中分数阶积分运算的 Grümwald-Letnikov 定义和 Riemann-Liouville 定义，通过插值方法给出了分数阶积分的高精度数值运算方式。基于该数值运算，构造了应用于数字图像去噪的分数阶积分去噪掩模，并给出其电路实现原理。通过理论分析和实验证明，该去噪模型具有去噪的同时又保持图像纹理特征的功能，且运算简便，能够满足实时性图像去噪处理的要求。

⑤提出一种改进的形状特征，该特征提取自图像的分数阶方向梯度直方图，采用该特征进行图像分类的过程不仅利用了图像的形状信息，同时又利用了分数阶微积分图像掩模能够提取图像中的纹理细节特征这一特性，能够更好地解决具有相似形状的图像分类问题。