新精活实展平台　翱翔高飞圆梦想

高考领航

高效课堂学案

■ 主编　李成民

GKLH

成绩怎么提高？

数学

必修 4

电子科技大学出版社

一书在手 全程无忧

在高中三年里，酸甜苦辣样样俱全，悲笑泣乐时时存在，语音袅袅，意犹未尽。高考领航愿用不断超越的执著信念，陪伴您走过这段非凡旅程，圆满您的大学梦想，成就您的人生辉煌！

品质是高考领航的座右铭，创新是高考领航的恒动力。专家名师编写，打造出扛鼎中国教辅书业的力作，为复习备考注入无穷动力。可编辑教学课件光盘；一课一练，活页课时作业；模拟考场应试体验，单元质量评估；解疑释惑，详解答案……一项项凝聚着高考领航殚精竭虑的智慧，见证了高考领航永无止境的突破，更为您的逐梦之旅带来无限精彩与感动。

图书在版编目（CIP）数据

高考领航．数学．4 ：必修 / 李成民主编．-- 成都
：电子科技大学出版社，2012.6
ISBN 978-7-5647-1229-7

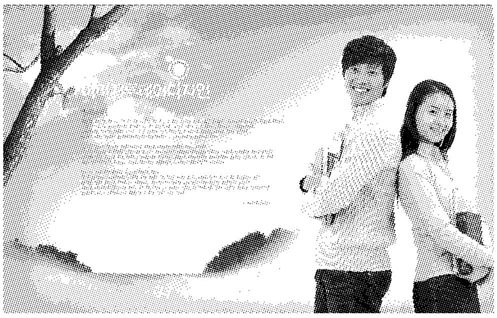
Ⅰ．①高… Ⅱ．①李… Ⅲ．①中学数学课－高中－升学参考资料 Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第133171号

高考领航 数学 必修4

李成民 主编

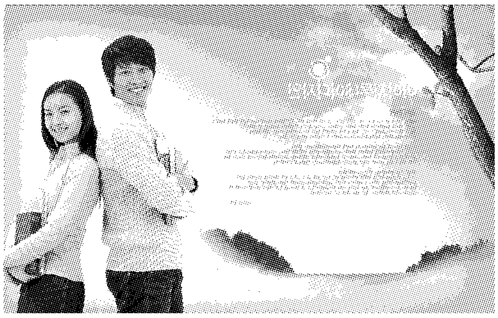
出　　版　电子科技大学出版社(成都市一环路东一段159号电子信息产业大厦 邮编：610051)
策划编辑　岳　慧
责任编辑　岳　慧
主　　页　www.uestcp.com.cn
电子邮件　uestcp@uestcp.com.cn
发　　行　新华书店经销
印　　刷　山东梁山印刷有限公司
成品尺寸　210mm×297mm　印张 5　字数 203千字
版　　次　2012年6月第一版
印　　次　2012年6月第一次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5647-1229-7
定　　价　28.50元



让学习与快乐相伴！
伴您轻松步入求知之旅……

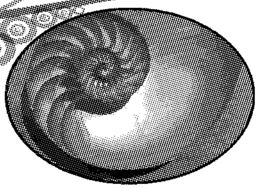
CONTENTS 目录

让学习与快乐相伴！
伴您轻松步入求知之旅……



目录 CONTENTS

第一章　三角函数



§1.1　任意角和弧度制

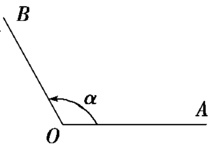
1.1.1　任意角

课前梳理　学与思

[基础存盘]

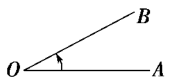
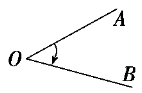
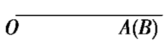
1. 任意角的概念

角可以看成平面内一条________绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形. 在右图中，一条射线的端点是 O，它从起始位置 OA 按逆时针方向旋转到终止位置 OB，形成了一个角 α，点 O 是角的________，射线 OA、OB 分别是角 α 的________、________.



2. 角的分类

按旋转方向可将角分为如下三类：

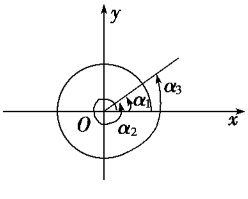
类型	定义	图示
正角	按______方向旋转形成的角	
负角	按______方向旋转形成的角	
零角	射线从起始位置__________________，称它形成了一个零角	

3. 象限角的概念

把角置于直角坐标系中，使角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合，角的终边(除端点外)在第几象限，我们就说这个角是第几________，如果角的终边落在坐标轴上，就认为这个角不属于任何象限，称为轴线角.

4. 终边相同的角

(1)图示：



(2)所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合：$S=$____________________________________，即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

[深化探究]

1. 用"旋转"的观点分析"任意角的概念"和初中所学角的概念的区别.

2. 根据角的表示方法，对于各象限的角应怎样表示呢？

3. 终边相同的角是相等的角吗？

4. 终边与 $150°$ 角终边重合的角肯定要比终边与 $30°$ 角终边重合的角大，这种说法是否正确？为什么？

课堂互动 导与练

题型一 任意角的概念问题

例 1 集合 $M=\{$锐角$\}$，$N=\{$小于 $90°$ 的角$\}$，$P=\{$第一象限角$\}$，$Q=\{$小于 $90°$的正角$\}$. 则下列等式中成立的是 ( )

A. $M=N$　　B. $N=P$

C. $M=P$　　D. $M=Q$

【思路点拨】 把各个集合以不等式形式表示出来，观察其异同.

【解析】 $M=\{$锐角$\}=\{\alpha|0°<\alpha<90°\}$，

$N=\{\alpha|\alpha<90°\}$，

$P=\{\alpha|k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°, k\in \mathbf{Z}\}$，

$Q=\{\alpha|0°<\alpha<90°\}$. $\therefore M=Q$，故选 D.

【答案】 D

【方法技巧】 解决此类问题的关键在于正确理解象限角与锐角、直角、钝角、平角、周角等概念. 另外需要掌握判断命题真假的技巧，判断命题为真需要证明，而判断命题为假只要举出反例即可.

【变式训练】

1. 下列命题：

①第一象限角都是锐角；

②锐角都是第一象限角；

③第一象限角一定不是负角；

④第二象限角大于第一象限角；

⑤第二象限角是钝角；

⑥小于 $180°$的角是钝角、直角或锐角.

其中真命题的序号为________(把正确命题的序号都写上).

题型二 终边相同的角的问题

例 2 已知角 $\alpha=2\,010°$.

(1)把 α 改写成 $k\cdot 360°+\beta(k\in \mathbf{Z}, 0°\leqslant\beta<360°)$ 的形式，并指出它是第几象限角；

(2)求 θ，使 θ 与 α 终边相同，且 $-360°\leqslant\theta<720°$.

【思路点拨】

$\boxed{\text{求}\beta}\to\boxed{\text{确定}\alpha\text{所在象限}}\to\boxed{\text{列不等式求}k}\to\boxed{\text{求}\theta}$

【解析】 (1)用 $2\,010°$除以 $360°$商为 5，余数为 $210°$.

$\therefore k=5$.

$\therefore \alpha=5\times 360°+210°(\beta=210°)$.

所以 α 为第三象限角.

(2)与 $2\,010°$终边相同的角：

$k\cdot 360°+2\,010°(k\in \mathbf{Z})$

令 $-360°\leqslant k\cdot 360°+2\,010°<720°(k\in \mathbf{Z})$

解得 $-6\dfrac{7}{12}\leqslant k<-3\dfrac{7}{12}(k\in \mathbf{Z})$

所以 $k=-6,-5,-4$.

将 k 的值代入 $k\cdot 360°+2\,010°$ 中，得角 θ 的值为 $-150°, 210°, 570°$.

【方法技巧】 (1)把任意角化为 $\alpha+k\cdot 360°(k\in \mathbf{Z}$，且 $0°\leqslant\alpha<360°)$ 的形式，关键是确定 k，可以用观察法(α 的绝对值较小)，也可列式作除法.

(2)求适合某范围内角的方法是通过解不等式求出 k 的范围，取范围中取整数 k 即可求出相应条件的角.

【变式训练】

2. 在与角 $10\,030°$ 终边相同的角中，求满足下列条件的角.

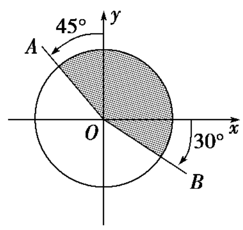
(1)最大的负角；

(2)最小的正角；

(3)$360°\sim 720°$的角.

题型三 区域角的表示

例 3 如图，



(1)分别写出终边落在 OA，OB 位置上的角的集合；

(2)写出终边落在阴影部分(包括边界)的角的集合.

【思路点拨】 解答本题可先写出与 OA、OB 终边重合的角的集合，然后再利用不等式把该阴影部分的角表示出来.

【解析】 (1)终边落在 OA 位置上的角的集合为$\{\alpha|\alpha=90°+45°+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=135°+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$，

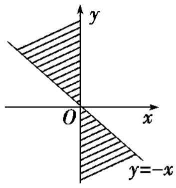
终边落在 OB 位置上的角的集合为$\{\beta|\beta=-30°+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$.

(2)由图可知，阴影部分角的集合是由介于$[-30°, 135°]$之间的所有与之终边相同的角组成的集合，故该区域可表示为$\{\alpha|-30°+k\cdot 360°\leqslant\alpha\leqslant 135°+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$.

【方法技巧】 解答此类题目的关键在于识图的能力，首先应分析一下该区域由谁来围成，其次由于角推广以后应以“动态的观点”去分析. 因此我们可以借助于角的旋转来探究一下该区域的一个合适的角集合；最后，把该角的集合加上终边相同的角便可.

【变式训练】

3. 如图所示，已知角 α 的终边落在阴影所表示的范围内(包括边界)，试写出角 α 的集合.



随堂达标 测与评

1. 下列各角中与 330°角的终边相同的是　　(　　)

A. 510°　　B. 150°

C. −150°　　D. −390°

2. 如果角 α 终边上有一点 $P(0,1)$，那么 α 是　　(　　)

A. 第一象限角

B. 第二象限角

C. 终边落在 y 轴非负半轴上的角

D. 既是第一象限角又是第二象限角

3. 角 α 的终边落在 $y=x(x\geqslant 0)$ 上的角的集合________.

4. 如果 θ 为小于 360°的正角，这个角 θ 的 4 倍角的终边与这个角的终边重合，求 θ 的值.

1.1.2　弧度制

课前梳理 学与思

[基础存盘]

1. 角度制

用度作为单位来度量角的单位制叫做角度制，规定 1 度的角等于____________.

2. 弧度制

长度等于________的弧所对的________叫做 1 弧度的角，用符号 rad 表示，读作弧度.

以弧度作为单位来度量角的单位制叫做弧度制.

3. 弧度制角的正负

如果角 α 是一个负角，那么它的弧度数是一个______；零角的弧度数是________；正角的弧度数是一个________. 角 α 的弧度数的绝对值是________(其中 l 是以角 α 作为圆心角时所对的弧长，r 是圆的半径).

4. 角度制与弧度制的异同点

		角度制	弧度制
不同点	单位	度(°)	弧度(rad)
	单位可否省略	不可以	可以
	进位制	六十进制	十进制
相同点		表示的角的大小均是与半径大小无关的常数	

5. 角度制与弧度制的换算

(1)

角度化弧度	弧度化角度
360°=________ rad	2π rad=________
180°=________ rad	π rad=________
1°=____ rad≈______ rad	1 rad=____≈______

(2)一些特殊角的度数与弧度数的对应关系

度	0°	1°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

6. 扇形的弧长及面积公式

设扇形的半径为 R，弧长为 l，$\alpha(0<\alpha<2\pi)$为其圆心角，则

类别 \ 度量单位	α 为角度制	α 为弧度制
扇形的弧长	l=________	l=________
扇形的面积	S=________	S=______=______

[深化探究]

1. 一条弦的长等于半径，这条弦所对的圆心角等于 1 弧度吗？为什么？

2. 弧度制公式为 $|\alpha|=\frac{l}{r}$，此处为何不写成 $\alpha=\frac{l}{r}$ 呢？

3. 弧长公式与扇形面积公式分别涉及扇形(圆弧)的几个量？知道几个量可求另一个量？

4. 弧度制引入之后，给我们带来了极大的方便，弧度制与角度制之间的关系用函数观点来研究是怎样的？

课堂互动 导与练

题型一　弧度制的概念

例 1 下列命题中，假命题是 (　　)

A. “度”与“弧度”是度量角的两种不同的度量单位

B. 1° 的角是周角的 $\frac{1}{360}$，1 rad 的角是周角的 $\frac{1}{2\pi}$

C. 1 rad 的角比 1° 的角要大

D. 用角度制和弧度制度量角，都与圆的半径有关

【思路点拨】 由题目可获取以下主要信息：各选项中均涉及到角度与弧度，解答本题可从角度和弧度的定义着手.

【解析】 根据角度和弧度的定义，可知无论是角度制还是弧度制，角的大小与圆的半径长短无关，而是与弧长与半径的比值有关，所以 D 是假命题，A、B、C 均为真命题.

【答案】 D

【方法技巧】 弧度制与角度制的区别与联系：

区别	①单位不同，弧度制以“弧度”为度量单位，角度制以“度”为度量单位； ②定义不同.
联系	不管以“弧度”还是以“度”为单位的角的大小都是一个与圆的半径大小无关的定值.

【变式训练】

1. 下列各说法中，错误的说法是 (　　)

A. 半圆所对的圆心角是 π rad

B. 周角的大小等于 2π

C. 1 弧度的圆心角所对的弧长等于该圆的半径

D. 长度等于半径的弦所对的圆心角的大小是 1 弧度

题型二　角度制与弧度制的互化

例 2 将下列角转化为另一种形式表示：

(1) -18°；(2) $\frac{3}{10}\pi$；(3) $67^\circ30'$；(4) -2 rad.

【思路点拨】 直接利用 $1^\circ=\frac{\pi}{180}$ rad，$1\text{ rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ 进行转化.

【解析】 (1) $-18^\circ=\left(\frac{\pi}{180}\right)\text{ rad}\times(-18)=-\frac{\pi}{10}$ rad.

(2) $\frac{3}{10}\pi=\frac{3}{10}\pi\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=54^\circ$.

(3) $67^\circ30'=67.5^\circ=\frac{\pi}{180}\text{ rad}\times67.5=\frac{3}{8}\pi$ rad.

(4) $-2\text{ rad}=(-2)\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx-57.30^\circ\times2=-114.60^\circ$.

【方法技巧】 (1) 将角度化为弧度，当角度制中含有“分”“秒”单位时，应先将它们统一化为“度”表示，再利用 $1^\circ=\frac{\pi}{180}$ rad 化为弧度即可.

(2) 以弧度为单位表示角时，常把弧度写成多少 π 的形式. 如无特殊要求，不必把 π 写成小数.

【变式训练】

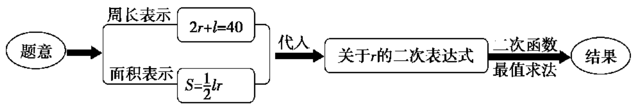
2. (1) 把 $-1\ 480^\circ$ 写成 $\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 的形式，其中 $0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$；

(2) 在 $[0^\circ,720^\circ]$ 中找出与 $\frac{2\pi}{5}$ 角终边相同的角.

题型三　扇形的弧长、周长、圆心角、面积的计算

例 3 已知一扇形的周长为 40 cm，当它的半径和圆心角取什么值时，才能使扇形的面积最大？最大面积是多少？

【思路点拨】



【解析】 设扇形的圆心角为 θ，半径为 r，弧长为 l，面积为 S，则 $l+2r=40$，∴$l=40-2r$.

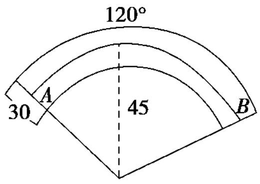
∴$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times(40-2r)r=20r-r^2=-(r-10)^2+100$.

∴当半径 $r=10$ cm 时，扇形的面积最大，最大值为 100 cm^2，此时 $\theta=\frac{l}{r}=\frac{40-2\times10}{10}=2$(rad).

【方法技巧】 涉及扇形的周长、弧长、圆心角、面积等的计算，关键是先分析题目已知哪些量求哪些量，然后灵活运用弧长公式、扇形面积公式直接求解或列方程(组)求解.

【变式训练】

3. 如图，$\overset{\frown}{AB}$为公路弯路，自行车自 A 驶向 B 和自 B 驶向 A，大约各要行驶多少米(精确到 1 米，图中长度单位：米).



随堂达标 测与评

1. 下列各式正确的是　(　　)
   A. $\pi=180$　　B. $\pi=3.14$
   C. $90°=\frac{\pi}{2}$ rad　　D. 1 rad$=\pi°$

2. $\alpha=-2$ rad，则 α 的终边在　(　　)
   A. 第一象限　　B. 第二象限
   C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 扇形的圆心角是 72°，半径为 5，它的弧长为________，面积为________.

4. 已知 $\alpha=15°$，$\beta=\frac{\pi}{10}$，$\gamma=1$，$\theta=105°$，$\varphi=\frac{7\pi}{12}$，试判断 α、β、γ、θ、φ 的大小.

§1.2　任意角的三角函数

1.2.1　任意角的三角函数(一)

课前梳理 学与思

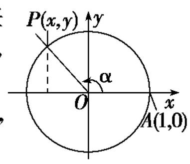
[基础存盘]

1. 单位圆的定义

在直角坐标系中，以________为圆心，以________为半径的圆称为单位圆.

2. 任意角三角函数的定义

在平面直角坐标系中，设 α 是一个任意角，它的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$，那么：



(1)y 叫做 α 的________，记作________，即 $\sin\alpha=y$；

(2)x 叫做 α 的________，记作________，即 $\cos\alpha=x$；

(3)$\frac{y}{x}$叫做 α 的________，记作________，即 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$ $(x\neq0)$.

对于确定的角 α，上述三个值都是唯一确定的. 故正弦、余弦、正切都是以角为自变量，以单位圆上点的坐标或坐标的比值为函数值的函数，统称为三角函数.

3. 三角函数在各象限内的符号

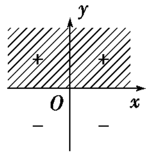
由三角函数的定义，以及各象限内的点的坐标的符号，可以确定三角函数的符号.

$\sin\alpha=y$，于是 $\sin\alpha$ 的符号与 y 的符号______，即：当 α 是第一、二象限的角时，$\sin\alpha>0$；当 α 是第三、四象限的角时，$\sin\alpha<0$.

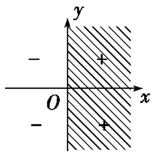
$\cos\alpha=x$，于是 $\cos\alpha$ 的符号与 x 的符号______，即：当 α 是第一、四象限的角时，$\cos\alpha>0$；当 α 是第二、三象限的角时，$\cos\alpha<0$.

$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$，当 x 与 y 同号时，它们的比值为________，当 x 与 y 异号时，它们的比值为______，即：当 α 为第一、三象限的角时，$\tan\alpha>0$；当 α 为第二、四象限的角时，$\tan\alpha<0$.

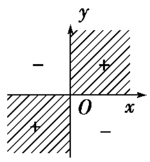
以上结果如下图所示.



sin α



cos α



tan α

4. 诱导公式(一)

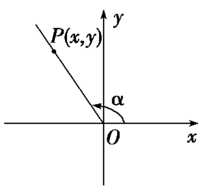
终边相同的角的同一三角函数的值________，即：

$\sin(\alpha+k\cdot2\pi)=$__________，$\cos(\alpha+k\cdot2\pi)=$__________.

$\tan(\alpha+k\cdot2\pi)=$______，其中 $k\in\mathbf{Z}$.

[深化探究]

1. 如右图，已知 $P(x,y)$ 为角 α 终边上的一点，结合三角函数的定义，用 x,y 表示 $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$.



2. 一个任意角的三角函数值会不会随点 P 在 α 的终边上的位置的改变而改变？

3. 为什么说三角函数值的符号由角的终边所在象限唯一确定？

4. 由诱导公式一可以发现三角函数值有什么变化规律？

课堂互动 导与练

题型一 利用三角函数的定义求值

例 1 已知角 α 的终边经过点 $P(-4a,3a)(a\neq0)$，求 $\sin\alpha、\cos\alpha、\tan\alpha$ 的值.

【思路点拨】 分 $a>0$ 和 $a<0$ 讨论.利用三角函数定义求解.

【解析】 $r=\sqrt{(-4a)^2+(3a)^2}=5|a|$.

若 $a>0$，则 $r=5a$，角 α 在第二象限，

$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{3a}{5a}=\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{-4a}{5a}=-\dfrac{4}{5}$，

$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}=\dfrac{3a}{-4a}=-\dfrac{3}{4}$.

若 $a<0$，则 $r=-5a$，角 α 在第四象限，

$\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$.

【方法技巧】 利用三角函数的定义，求一个角的三角函数，需要确定三个量：角的终边上任意一个异于原点的点 P 的横坐标 x、纵坐标 y、点 P 到原点的距离 r.特别注意，当点的坐标含有参数时，应分类讨论.

【变式训练】

1. 已知角 α 的终边过点 $P(5,a)$，且 $\tan\alpha=-\dfrac{12}{5}$，求 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

题型二 三角函数符号的应用

例 2 已知 $\cos\alpha<0$，$\tan\alpha<0$.

(1)求角 α 的集合；

(2)求角 $\dfrac{\alpha}{2}$ 的终边所在的象限.

【思路点拨】 先分别写出 $\cos\alpha<0$，$\tan\alpha<0$ 的 α 集合，然后取两集合中 α 的交集，便可以解决(1).在此基础上，把 α 的范围缩小到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 便是 $\dfrac{\alpha}{2}$ 的集合，从而结合象限角的定义加以分析，便可得到(2).

【解析】 (1)∵$\cos\alpha<0$，∴角 α 的终边可能位于第二或第三象限或 x 轴的非正半轴上.

∵$\tan\alpha<0$，∴角 α 的终边可能位于第二或第四象限.

∴角 α 的终边只能位于第二象限.

故角 α 的集合为 $\left\{\alpha\left|\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

(2)∵$\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

∴$\dfrac{\pi}{4}+k\pi<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

当 $k=2n(n\in\mathbf{Z})$ 时，$\frac{\pi}{4}+2n\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}+2n\pi(n\in\mathbf{Z})$，

$\therefore\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角；

当 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$ 时，$\frac{5\pi}{4}+2n\pi<\frac{3\pi}{2}+2n\pi(n\in\mathbf{Z})$，

$\therefore\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角．即 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边落在第一象限或第三象限．

【方法技巧】 对于确定 α 角所在象限问题，应首先确定题目中所有三角函数的符号，然后依据上述三角函数的符号来确定角 α 所在的象限，则它们的公共象限即为所求．

【变式训练】

2．根据下列条件，确定 α 是第几象限的角：

(1) $\sin\alpha>0,\tan\alpha<0$；

(2) $\sin 2\alpha>0,\cos\alpha<0$．

题型三	诱导公式一的简单应用

例 3 求下列各式的值：

(1) $\cos\frac{25}{3}\pi+\tan\left(-\frac{15}{4}\pi\right)$；

(2) $\sin 810^\circ+\tan 765^\circ+\tan 1\ 125^\circ+\cos 360^\circ$．

【思路点拨】

已知角 $\xrightarrow[\text{公式(一)}]{\text{诱导}}$ 在 $0\sim2\pi(0^\circ\sim360^\circ)$ 间与已知角终边相同的角 → 特殊角的三角函数值 → 题中所给角的三角函数值 $\xrightarrow{\text{代入}}$ 结果

【解析】 (1) $\cos\frac{25}{3}\pi+\tan\left(-\frac{15}{4}\pi\right)$

$=\cos\left(8\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(-4\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$．

(2) 原式 $=\sin(2\times360^\circ+90^\circ)+\tan(2\times360^\circ+45^\circ)+\tan(3\times360^\circ+45^\circ)+\cos(0^\circ+360^\circ)$

$=\sin 90^\circ+\tan 45^\circ+\tan 45^\circ+\cos 0^\circ=4$．

【方法技巧】 利用诱导公式一可把负角的三角函数转化为 0 到 2π 间的三角函数，亦可把大于 2π 的角的三角函数转化为 0 到 2π 间的三角函数，即实现了“负化正，大化小”．同时要注意记忆特殊角的三角函数值．

【变式训练】

3．计算下列各式的值：

(1) $\sin(-1\ 395^\circ)\cos 1\ 110^\circ+\cos(-1\ 020^\circ)\sin 750^\circ$；

(2) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)+\cos\frac{12\pi}{5}\cdot\tan 4\pi$．

随堂达标测与评

1．角 α 的终边上有一点 $P(1,-1)$，则 $\sin\alpha$ 的值是　(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

2．已知 $\sin\theta\cdot\cos\theta>0$，那么角 θ 是　(　　)

A. 第一或第三象限角　　B. 第二或第三象限角

C. 第三或第四象限角　　D. 第二或第四象限角

3．$\sin\frac{25}{6}\pi$ 等于________．

4．求下列各角的正弦、余弦、正切．

(1) $\alpha=\frac{5\pi}{4}$；

(2) $\alpha=\frac{\pi}{2}$．

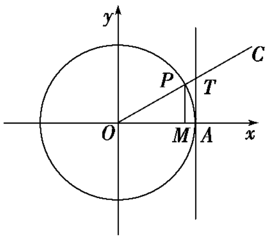
1.2.1　任意角的三角函数(二)

课前梳理 学与思

[基础存盘]

1. 有向线段

如右图，设任意角 α 的顶点在原点 O，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边与单位圆(圆心在原点，半径等于单位长度的圆)相交于点 $P(x,y)$，过 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M；过点 $A(1,0)$ 作单位圆的切线，它与 α 的终边或其反向延长线相交于 T.



如果 OM 与 x 轴同向，规定 OM 具有正值；

如果 OM 与 x 轴反向，规定 OM 具有负值；

如果 AT 与 y 轴同向，规定 AT 具有正值；

如果 AT 与 y 轴反向，规定 AT 具有负值；

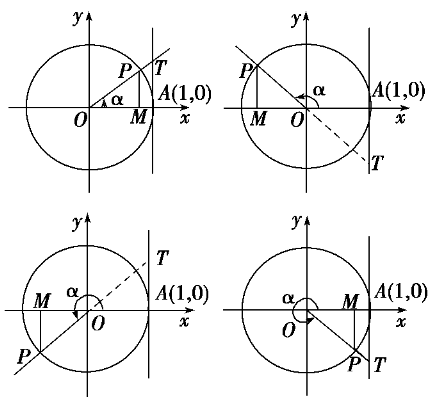
如果 MP 与 y 轴同向，规定 MP 具有正值；

如果 MP 与 y 轴反向，规定 MP 具有负值.

这种带有方向的线段，叫做有向线段.

2. 三角函数线

三角函数线是表示三角函数值的有向线段，线段的方向表示了三角函数值的正负，线段的长度表示了三角函数值的绝对值.

图示	
正弦线	如上图，α 终边与单位圆交于 P，过 P 作 PM 垂直 x 轴，有向线段________即为正弦线
余弦线	如上图，有向线段________即为余弦线
正切线	如上图，过(1,0)作 x 轴的垂线，交 α 的终边或 α 终边的反向延长线于 T，有向线段________即为正切线

3. 三角函数的定义域、值域

函数	定义域	值域
$\sin x$	**R**	________
$\cos x$	**R**	________
$\tan x$	________	**R**

[深化探究]

1. 怎样理解三角函数线与三角函数值的关系?

2. 当角 α 的终边在第二、三象限时，为什么作角 α 的反向延长线去寻找正切线?为什么不从点 $B(-1,0)$ 作切线研究正切线?

3. 已知角 α 的正弦线是单位长度的有向线段，那么角 α 的终边应在何处?

4. 已知角 α 的正弦线和余弦线是符号相反、长度相等的有向线段，那么角 α 的终边应在何处?

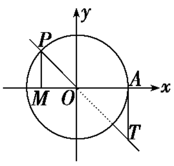
课堂互动 导与练

题型一　画三角函数线

例 1 作出$\frac{3\pi}{4}$的正弦线、余弦线和正切线.

【思路点拨】 作出单位圆和$\frac{3\pi}{4}$角的终边,找到单位圆和角的终边的交点 P 及单位圆和 x 轴正向的交点 A,然后按定义来作.

【解析】



$\frac{3\pi}{4}$的正弦线为 MP,余弦线为 OM,正切线为 AT.

【方法技巧】 (1)作正弦线、余弦线时,首先找到角的终边与单位圆的交点,然后过此交点作 x 轴的垂线,得到垂足,从而得正弦线和余弦线.

(2)作正切线时,应从 $A(1,0)$点引单位圆的切线交角的终边于一点 T,即可得到正切线 AT,要特别注意,当角的终边在第二或第三象限时,应将角的终边反向延长,再按上述作法来作正切线.

【变式训练】

1.(1)在单位圆中画出满足 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$的角 α 的终边;

(2)若(1)中条件"$\cos\alpha=\frac{1}{2}$"改为"$\cos\alpha>\frac{1}{2}$",又如何画出角 α 的终边区域?

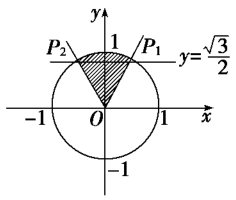
题型二　三角函数线的简单应用

例 2 (1)在$[0,2\pi]$上,求使 $\sin\alpha>\frac{\sqrt{3}}{2}$的 α 的取值范围;

(2)在任意角的范围内,求使 $\sin\alpha>\frac{\sqrt{3}}{2}$的 α 的取值范围.

【思路点拨】 利用三角函数线画图求解.

【解析】 如右图,作 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$,与以原点为圆心的单位圆交于 P_1、P_2.



(1)在$[0,2\pi]$上,OP_1、OP_2 分别是角$\frac{\pi}{3}$、$\frac{2\pi}{3}$的终边.

当角 α 的终边与单位圆 O 的交点为 $P(x,y)$,由 P_1 逆时针转到点 P_2 时,P 点纵坐标 y 由$\frac{\sqrt{3}}{2}$逐渐增大到 1 后再逐渐减小到$\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $\sin\alpha>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

当 P 点由点 P_2 继续逆时针旋转再回到 P_1 点时,其纵坐标 $y<\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $\sin\alpha<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因此在$[0,2\pi]$上,使 $\sin\alpha>\frac{\sqrt{3}}{2}$的范围是$\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{2\pi}{3}$.

(2)把(1)中情形推广到任意角范围,可使得 $\sin\alpha>\frac{\sqrt{3}}{2}$的角 α 的范围是 $2k\pi+\frac{\pi}{3}<\alpha<2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

【方法技巧】 (1)用三角函数线表示三角函数值,能非常直观生动地反映三角函数值的变化规律.

(2)三角函数线的主要作用是解三角不等式,比较大小及求函数的定义域,在求三角函数定义域时,一般转化为不等式(组),因此必须牢固掌握三角函数线的画法及意义.

(3)运用三角函数线解三角不等式(组)的一般方法是(以 $\sin\alpha>m$,$|m|\leqslant1$ 为例),①作出 $y=m$ 与单位圆的交点 P_1、P_2;②根据不等式的意义,按逆时针方向画出角 α 的终边 OP 所在的区域;③找出区域的边界 OP_1、OP_2 对应的角;④将区间角用集合表示出来.

【变式训练】

2.求下列函数的定义域:

(1)$y=\sqrt{2\sin x-\sqrt{3}}$;

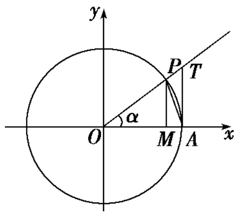
(2)$y=\lg(1-\sqrt{2}\cos x)+\sqrt{1+\sqrt{2}\cos x}$.

题型三	三角函数线的综合应用

例 3 求证：当 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

【思路点拨】 利用单位圆中角 α 的正弦线、所对弧长及正切线所在等腰三角形、扇形及直角三角形的面积大小来解决.

【证明】 如右图，设角 α 的终边与单位圆相交于点 P，单位圆与 x 轴正半轴交点为 A，过点 A 作圆的切线交 OP 的延长线于 T，过 P 作 $PM\perp OA$ 于 M，连接 AP，则：



在 $Rt\triangle POM$ 中，$\sin\alpha=MP$；

在 $Rt\triangle AOT$ 中，$\tan\alpha=AT$；

又根据弧度制的定义，有$\overset{\frown}{AP}=\alpha\cdot OP=\alpha$，

易知 $S_{\triangle POA}<S_{扇形POA}<S_{\triangle AOT}$，

即$\frac{1}{2}OA\cdot MP<\frac{1}{2}\overset{\frown}{AP}\cdot OA<\frac{1}{2}OA\cdot AT$，

即 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

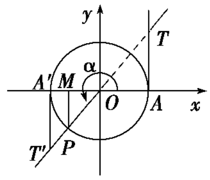
【方法技巧】 把三角函数值用三角函数线表示出来，是数形结合思想的应用，充分利用这一方法，会使问题更加直观，解决问题的方法更加灵活、简便.

【变式训练】

3. 若 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，试比较 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 的大小.

随堂达标 测与评

1. 如右图在单位圆中角 α 的正弦线、正切线完全正确的是 （　　）



A. 正弦线 PM，正切线 $A'T'$

B. 正弦线 MP，正切线 $A'T'$

C. 正弦线 MP，正切线 AT

D. 正弦线 PM，正切线 AT

2. 角 α 的正弦线与余弦线长度相等，且符号相同，那么 $\alpha(0<\alpha<2\pi)$的值为 （　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{5}{4}\pi$

C. $\frac{\pi}{4}$和$\frac{5}{4}\pi$　　D. 以上答案都不对

3. 若角 α 的正弦线的长度为$\frac{1}{2}$，且方向与 y 轴的正方向相反，则 $\sin\alpha=$________.

4. 求不等式 $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$的解集.

1.2.2 同角三角函数的基本关系

课前梳理 学与思

[基础存盘]

1. 同角三角函数的基本关系式

平方关系	商数关系
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

2. 同角三角函数的基本关系的理解

(1)$\sin^2\alpha$ 是$(\sin\alpha)^2$ 的简写，读作“$\sin\alpha$ 的平方”，不能将 $\sin^2\alpha$ 写成 $\sin\alpha^2$.

(2)同角三角函数的基本关系式揭示了“同角不同名”的三角函数的运算规律，它的精髓在“同角”二字上，如$\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$，$\frac{\sin 8\alpha}{\cos 8\alpha}=\tan 8\alpha$ 等都成立，理由是式子中的角为“同角”.

(3)在应用平方关系式时，常用到平方根、算术平方根和绝对值的概念，应注意“±”的选取.

(4)除了掌握两个基本公式外，还要熟练掌握其等价形式：

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$；

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Leftrightarrow\sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha$.

3.同角三角函数的基本关系式的推导：

同角三角函数的基本关系式是根据____________推导的；另外公式的推导也可以利用单位圆中的三角函数线来完成.

4.要熟记特殊角的三角函数值

角度 α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
角 α 的弧度数	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0

[深化探究]

1.同角三角函数的基本关系式对任意角 α 都成立吗？

2.等式 $\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$ 是 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ $\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right)$ 的一个变形，由此你还能得到一个什么样的变形？

3.如何判定 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的符号？

4.如何判定 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的符号？

课堂互动　导与练

题型一　三角函数求值问题

例1 已知 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$，且 α 是第三象限角，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的值.

【思路点拨】 由题目可获取以下主要信息：

(1) α 的正切值已知且 α 是第三象限角；

(2) $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 均为负值.

解答本题可由商数关系和平方关系，构建 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的方程组求解.

【解析】 由 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$，得 $\sin\alpha=\frac{4}{3}\cos\alpha$　①

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$　②

由①②得 $\frac{16}{9}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，即 $\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$.

又 α 在第三象限，

$\therefore\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{3}\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

【方法技巧】 同角三角函数的基本关系式揭示了同角之间的三角函数关系，其最基本的应用是"知一求二"，要注意这个角所在的象限，由此来决定所求是一解还是两解，同时应体会方程思想的运用.

【变式训练】

1.已知 $\tan\alpha=3$，求下列各式的值：

(1) $\frac{\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha}$；

(2) $2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha$.

题型二　三角函数式的化简问题

例2 化简：

$$\sqrt{1-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{1+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

【思路点拨】 $\boxed{\text{代换“1”}}\to\boxed{\text{构造完全平方式}}\to\boxed{\text{讨论}\cos\frac{\alpha}{2}\text{与}\sin\frac{\alpha}{2}\text{的大小}}\to\boxed{\text{去绝对值号}}\to\boxed{\text{得结果}}$

解析：原式$=\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

$=\sqrt{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$

$=\left|\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right|+\left|\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right|$,

$\because \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \frac{\alpha}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，

$\therefore \cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}>0$，

$\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}>0$，

$\therefore$原式$=\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}$.

【方法技巧】 解答此类题目的关键在于公式的灵活运用，切实分析好同角三角函数间的关系，化简过程中常用的方法有：

(1)化切为弦，即把非正、余弦的函数都化成正、余弦函数，从而减少函数名称，达到化简的目的.

(2)对于含有根号的，常把根号下化成完全平方式，然后去根号达到化简的目的.

(3)对于化简含高次的三角函数式，往往借助于因式分解，或构造$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，以降低函数次数，达到化简的目的.

【变式训练】

2. 化简：

(1)$\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\tan\theta-1}$；

(2) $\sqrt{\sin^2\theta-\sin^4\theta}$，$\theta$是第二象限角.

题型三	三角恒等式的证明问题

例 3 求证：$\frac{3-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{2\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha+\sin^2\alpha$.

【思路点拨】 运用$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$和$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$从左到右证明.

【证明】 左边$=\frac{3-[(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha]}{2\cos^2\alpha}$

$=\frac{2+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\sin^2\alpha$

$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\sin^2\alpha$

$=1+\tan^2\alpha+\sin^2\alpha=$右边.

所以原等式成立.

【方法技巧】 就一般情况而言，证明三角恒等式时，可以从左边推到右边，也可以从右边推到左边，本着化繁为简的原则，即从较繁的一边推向较简的一边；还可以将左、右两边同时推向一个中间结果；有时候改证其等价命题更为方便. 但是，不管采取哪一种方式，证明时都要"盯住目标，据果变形". 当从左边推向右边时，右边就是"目标"，也就是变形要得到的"果"，变形的措施要以它为依据来进行选择，方法得当，推理合理，最终指向目标.

【变式训练】

3. 求证：$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$.

随堂达标 测与评

1. 已知$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则$\cos\alpha$等于 ( )

A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$

C. $-\frac{1}{7}$ D. $\frac{3}{5}$

2. 化简$\sin^2\beta+\cos^4\beta+\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta$的结果是 ( )

A. 1 B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

3. $\sqrt{1-2\sin 4\cos 4}=$________.

4. 已知$\cos\alpha=-\frac{8}{17}$，求$\sin\alpha$、$\tan\alpha$的值.

§1.3　三角函数的诱导公式

1.3　三角函数的诱导公式(一)

课前梳理 学与思

[基础积存盘]

1.角的范围

对于任意角，若将 α 看成锐角，那么 $180°+\alpha$，$-\alpha$，$180°-\alpha$ 分别在第________、________、________象限.

2.诱导公式：

公式一 $\begin{cases}\sin(\alpha+k\cdot 2\pi)=\underline{\qquad\qquad} \\ \cos(\alpha+k\cdot 2\pi)=\underline{\qquad\qquad} \\ \tan(\alpha+k\cdot 2\pi)=\underline{\qquad\qquad}\end{cases}$ (其中 $k\in\mathbf{Z}$)

公式二 $\begin{cases}\sin(\pi+\alpha)=\underline{\qquad\qquad} \\ \cos(\pi+\alpha)=\underline{\qquad\qquad} \\ \tan(\pi+\alpha)=\underline{\qquad\qquad}\end{cases}$

公式三 $\begin{cases}\sin(-\alpha)=\underline{\qquad\qquad} \\ \cos(-\alpha)=\underline{\qquad\qquad} \\ \tan(-\alpha)=\underline{\qquad\qquad}\end{cases}$

公式四 $\begin{cases}\sin(\pi-\alpha)=\underline{\qquad\qquad} \\ \cos(\pi-\alpha)=\underline{\qquad\qquad} \\ \tan(\pi-\alpha)=\underline{\qquad\qquad}\end{cases}$

3.诱导公式的记忆

诱导公式的记忆口诀是“函数名不变，符号看象限”.其含义是诱导公式两边的函数名称一致，符号则是将 α 看成锐角时原角所在象限的三角函数值的符号.α 看成锐角，只是公式记忆的方便，实际上 α 可以是任意角.

[深化探究]

1.设 α 为任意角，则 α 与 $-\alpha$，$\pi+\alpha$，$\pi-\alpha$ 的终边之间存在怎样的对称关系？

2.通过诱导公式的学习，请归纳 $\sin(n\cdot 180°+\alpha)(n\in\mathbf{Z})$ 与 $\sin\alpha$ 有何关系？

3.若 α 是第三象限角，$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ 吗？

4.在三角形 ABC 中，判断角 A 与角 $B+C$ 的三角函数值满足哪些等量关系？

课堂互动 导与练

题型一　给角求值问题

例 1 求下列三角函数式的值：

(1) $\sin 495°\cdot\cos(-675°)$；

(2) $\sin\left(2n\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(n\pi+\dfrac{4\pi}{3}\right)(n\in\mathbf{Z})$.

【思路点拨】 先化负角为正角，再将大于 $360°$ 的角化到 $0°\sim360°$ 之间，进而利用诱导公式二、四求解.

【解析】 (1) $\sin 495°\cdot\cos(-675°)$

$=\sin(135°+360°)\cdot\cos 675°$

$=\sin 135°\cdot\cos 315°$

$=\sin(180°-45°)\cdot\cos(360°-45°)$

$=\sin 45°\cdot\cos 45°$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(2)当 n 为奇数时，

原式 $=\sin\dfrac{2\pi}{3}\cdot\left(-\cos\dfrac{4\pi}{3}\right)$

$=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)\left[-\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

$=\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$；

当 n 为偶数时，

原式 $=\sin\dfrac{2\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{3}$

$=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\left(-\cos\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

【方法技巧】 对求值问题要正确分析角之间的关系，恰当选择诱导公式.在含有字母时，一般要分类讨论.