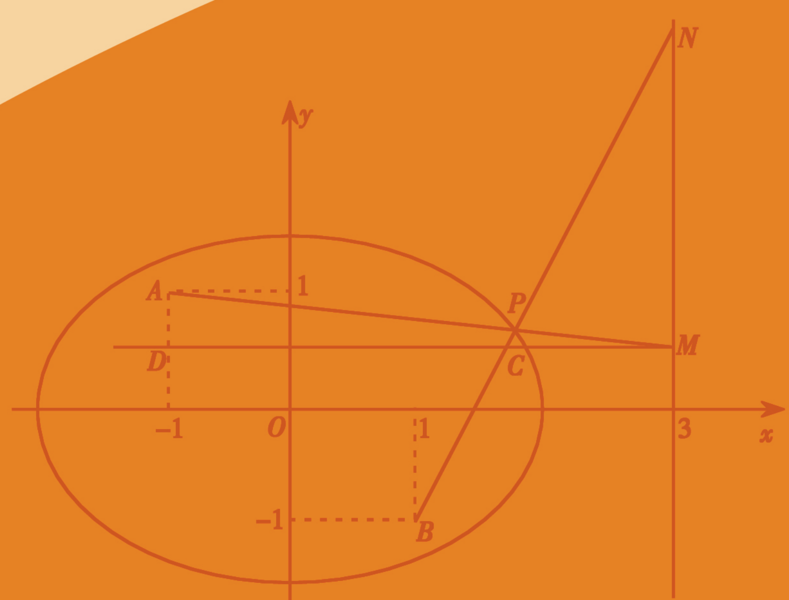
高考数学

热点问题与解题方法

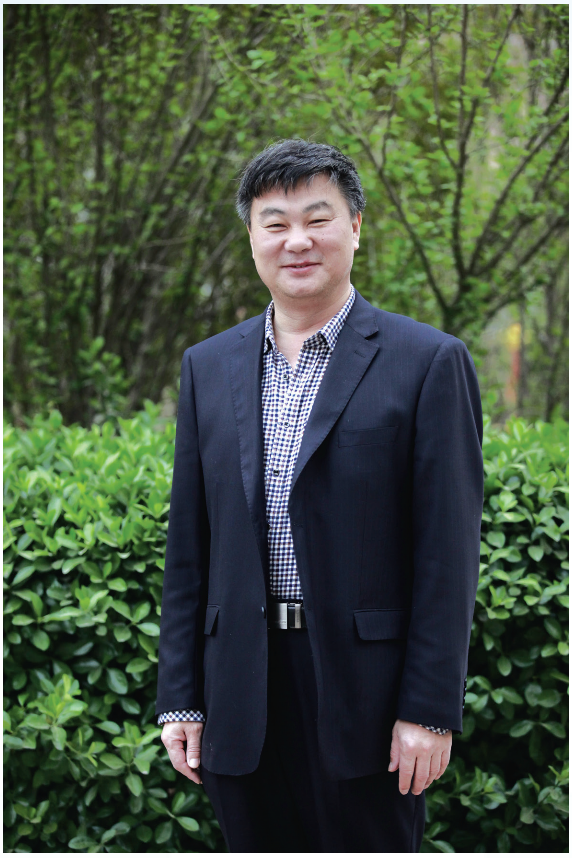
GAOKAO SHUXUE
REDIAN WENTI YU JIETI FANGFA

王发成　主编



河北科学技术出版社

主编简介



王发成，石家庄市第二十二中学高中部主管教学副校长，国家数学奥林匹克高级教练员、中学数学特级教师、河北省劳动模范、河北省首届名师、河北省课程改革优秀教师、河北师范大学硕士生导师、“国培计划”授课专家、石家庄市市管专业技术拔尖人才，石家庄市第十一届政协委员，主要从事高中数学教育与教学研究、教师培训与管理工作。30余年教学人生中，躬耕践行，做有思想、高境界的大气教师，做师生的精神楷模、终身学习指导者，做师生的人生规划领路人；与时俱进，主持十余项国家级和省级科研课题研究，发表论文60余篇，主编或参编教材、教学指导用书30余部，累累硕果成就幸福的职业人生。

本书系王发成带领长安区高中数学名师工作室研修员及石家庄市第二十二中学高中数学组全体老师集体编写而成。

图书在版编目（CIP）数据

高考数学热点问题与解题方法 / 王发成主编. -- 石家庄 ：河北科学技术出版社，2018.1
ISBN 978-7-5375-9195-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①中学数学课－高中－升学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第010805号

高考数学热点问题与解题方法

王发成 主编

出版发行	河北科学技术出版社
地　　址	石家庄市友谊北大街 330 号（邮编：050061）
印　　刷	石家庄联创博美印刷有限公司
开　　本	787 × 1092　1/16
印　　张	16.5
字　　数	380 千字
版　　次	2018 年 1 月第 1 版
	2018 年 1 月第 1 次印刷
定　　价	39.00 元

编 委 会

主　编　王发成

副主编　董松艳　许贵斌　李瑞霄

编　委　（以姓氏笔画排序）

王树旺　王晓乾　王密霞　牛志玲　卢红强

师建星　刘风杰　刘明霞　刘素娟　关志红

李　锐　李艳湘　李晓辉　吴晓惠　张　琨

张进生　张建国　张智敏　贺海伶　韩志策

前　言

高三备考一定要讲究策略和方法.本书专为高三学生冲刺高考而编写.同学们不妨从前言开始认真阅读本书，尝试使用书中提供的思想、方法与策略，高考成绩一定会有较大幅度的提高.

美国著名的数学教育家乔治·波利亚说过："掌握数学就意味着要善于解题."因此，在高考备考中学会怎样解题是一项重要内容，它是高考成败的关键因素. 本书一方面以波利亚的《怎样解题》为理论依据，结合高考热点问题和重点题型，归纳出数学解题的一般思维过程、解题程序和答题格式，主要讲解在最短时间内拟定解决问题的最佳方案，实现答题效率的最优化；另一方面引导同学们重视数学思想、技能与方法，力求从本质上认识数学问题.只有对数学思想与方法理解透彻及融会贯通时，才能提出新思路、巧解法.

高考试题十分重视数学思想方法的考查. 数学学科的高考旨在考查中学数学的基础知识、基本技能、基本思想和方法，注重考查考生的逻辑思维能力、运算求解能力、空间想象能力、阅读理解能力以及解决实际问题的能力，解题方法中都渗透着数形结合思想、函数方程思想、分类讨论、猜证结合思想和化归转化思想，也重视运算能力的考查，要求学生能够根据各种情况进行合理的估算和计算.高考数学试题更突出了能力立意.本书力求引导同学们有意识地应用数学思想方法去分析问题解决问题，提高数学核心素养，进而具备数学头脑和眼光.

高考试题主要从以下几个方面对数学思想方法进行考查：

1.常用数学方法：配方法、换元法、待定系数法、数学归纳法、参数法、消去法等.

2.数学逻辑方法：分析法、综合法、反证法、归纳法、演绎法等.

3.数学思维方法：观察与分析、概括与抽象、分析与综合、特殊与一般、类比、归纳和演绎等.

4.常用数学思想：函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、转化(化归)思想等.

5.高中数学重要技能：函数图象的变换技能，函数单调性、奇偶性的判断技能，数列求和技能，三角函数中角的配凑及三角式的恒等变形技能，平面向量的运算及应用技能，不等关系的放缩技能，空间图形与平面图形(特别是空间角和距离)的处理技能，直线与圆锥曲线位置关系问题的探究技能，五类事件的概率运算技能，可导函数的单调性、极值以及单峰函数的最大值和最小值的判断技能，合情推理技能，数据处理与信息处理技能，心算与估算技能，列举正例、反例的技能，研究设计技能等15 种重要技能.

数学思想方法与数学基础知识相比较，具有较高的地位和层次.数学知识是数学内容，可以用文字

和符号来记录和描述，随着时间的推移，记忆力的减退，将来可能会忘记，而数学思想方法与技能(特别是核心能力与素养)则是一种数学意识，只能够领会和运用，属于思维的范畴，用以对数学问题的认识、处理和解决. 掌握数学思想方法以及培养核心素养，不是受用一时，而是享用终生，即使数学知识全忘记了，它们还是会对你的终身学习与发展起关键作用.

数学思想方法中，数学基本方法是数学思想的具体体现，数学技能是数学的行为，具有模式化与可操作性的特征，可以选用作为解题的具体手段. 数学思想是数学的灵魂，它与数学基本方法常常在学习、掌握数学知识的同时获得.可以说，“知识”是基础，“方法”是手段，“思想”是提升，“素养”是内化，提高数学素质的核心就是提高学生对数学思想方法的认识和运用，数学素质的综合体现就是“能力”.

为了帮助学生掌握高考解题的金钥匙，掌握高考解题的思想方法，本书设计了三部分内容：

第一部分是根据高中数学课程标准和各省市高考数学试卷，精选了高中数学的热点问题和重点题型，包括近年各省市高考试卷中不断出现的新题型，具有较强的针对性和实战性. 内容包括：集合与简易逻辑，函数，数列与极限，三角函数，不等式，复数、排列组合、二项式定理、概率与统计，平面向量及其运用，直线、平面、简单几何体，直线与圆，圆锥曲线等诸多方面，每道例题均有详尽的解题步骤和答案，并附有能起到归纳总结和举一反三作用的精妙剖析.

第二部分是介绍高考中常用的数学基本思想与方法，如配方法、换元法、待定系数法、数学归纳法、参数法、消去法、反证法、分析与综合法、特殊与一般法、类比与归纳法、观察与实验法. 还有函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、转化(化归)思想. 在每节的内容中，先是对方法或者问题进行综合性的叙述，再以题组的形式出现，通过例题对方法和问题进行示范，有详细的解答和分析. 后附的练习题旨在检查学习的效果，起到巩固的作用.每个题组中习题的选取，又尽量综合到代数、三角、几何各个部分重要章节的数学知识.

第三部分是高考解题策略.高考的特点是以学生解题能力的高低为标准的一次选拔性考试，这就使得临场发挥显得尤为重要.研究和总结临场解题策略，进行应试训练和心理辅导，已成为高考辅导的重要内容之一.正确运用数学高考临场解题策略，不仅可以预防各种心理障碍造成的不合理丢分和计算失误及笔误，而且能运用科学的检索方法，建立神经元联系，挖掘思维和知识的潜能，以便考出最佳成绩.

本书凝聚了石家庄市第二十二中学高中部所有数学教师和长安区王发成高中数学名师工作室全体研修员多年的教学经验，是在这些一线教师长期教学实践的基础上编写而成的.同时，本书在编写过程中，参考了众多名师的研修成果，在此一并表示衷心的感谢！

鉴于作者的学识和能力局限，书中难免有不足之处，敬请各位读者批评、指正.

王发成

2017 年 10 月

目　　录

第一章　高考数学热点问题

第一章　高考数学热点问题

第一节　二次函数、二次方程与二次不等式

复习指导

FUXI ZHIDAO

二次函数是高中数学的重要基础，是高考考查的重要内容.对二次函数要掌握它的图象性质，能灵活应用它的最值及图象解决有关问题，在高考中主要考查：二次函数的对称性，二次函数的单调性，二次函数在指定区间上的最值，三个二次的关系，理解和掌握三者之间的内在联系，深化知识与技能的学习，培养数形结合思想、函数与方程的思想.

内容提要

NEIRONG TIYAO

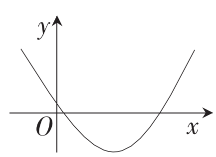
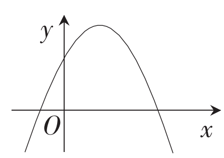
1. 二次函数的解析式

(1)一般式：$f(x)=$ ________________；

(2)顶点式：若二次函数的顶点坐标为(h,k)，则其解析式为$f(x)=$ ________________；

(3)零点式：若相应一元二次方程的两根为x_1，x_2，则其解析式为$f(x)=$ ________________.

2. 二次函数的图象和性质

	$a>0$	$a<0$
图象		
定义域	$x\in\mathbf{R}$	
值域	$\left[\dfrac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$	$\left(-\infty,\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right]$
单调性	在$\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right)$上递减 在$\left(-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$上递增	在$\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right)$上递增 在$\left(-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$上递减
奇偶性	$b=0$时，为偶函数；$b\neq0$时，既不是奇函数也不是偶函数	
图象特点	1.对称轴：$x=-\dfrac{b}{2a}$；2.顶点：$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$	

3. 函数$y=f(x)$对称轴的判断方法

(1)对于二次函数$y=f(x)$，如果定义域内有不同两点x_1，x_2且$f(x_1)=f(x_2)$，那么函数$y=f(x)$的图象关于$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$对称.

(2)二次函数 $y=f(x)$ 对定义域内所有 x，都有 $f(a+x)=f(a-x)$ 成立的充要条件是函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称(a 为常数).

4. 与二次函数有关的不等式恒成立两个条件

(1)$ax^2+bx+c>0(a\neq0)$ 恒成立的充要条件是 $\begin{cases}a>0\\ b^2-4ac<0\end{cases}$

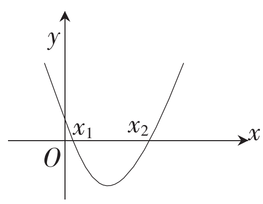
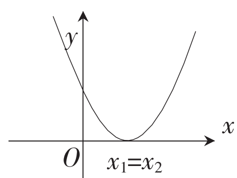
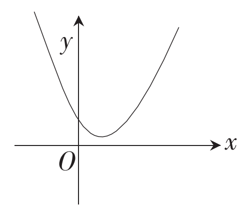
(2)$ax^2+bx+c<0(a\neq0)$ 恒成立的充要条件是 $\begin{cases}a<0\\ b^2-4ac<0\end{cases}$

5. 两种数学思想

(1)数形结合是讨论二次函数问题的基本方法，特别是涉及一元二次方程、一元二次不等式的时候常常要结合图形寻找思路；

(2)含字母系数的二次函数问题经常使用的方法是分类讨论，比如讨论二次函数的对称轴与给定区间的位置关系，讨论二次方程根的大小等.

6. 一元二次不等式与相应的二次函数及一元二次方程的关系如下表：

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	有两相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集			
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集			

范例精讲
FANLI JINGJIANG

例 1 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(2)=-1$，$f(-1)=-1$，且 $f(x)$ 的最大值是 8，试确定此二次函数的解析式.

【解法一】 利用一般式：

设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$.

由题意得 $\begin{cases}4a+2b+c=-1\\ a-b+c=-1\\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}=8\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-4\\ b=4\\ c=7\end{cases}$

$\therefore$ 所求二次函数为 $f(x)=-4x^2+4x+7$.

【解法二】 利用顶点式：

设 $f(x)=a(x-m)^2+n$.

$\because f(2)=f(-1)$，$\therefore$ 抛物线的对称轴为 $x=\dfrac{1}{2}$. $\therefore m=\dfrac{1}{2}$.又根据题意，函数有最大值 8，$\therefore n=8$.

$\therefore y=f(x)=a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+8$.

$\because f(2)=-1$，$\therefore a\left(2-\dfrac{1}{2}\right)^2+8=-1$，解得 $a=-4$，

$\therefore f(x)=-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+8=-4x^2+4x+7$.

【解法三】 利用零点式：

由已知 $f(x)+1=0$ 两根为 $x_1=2$，$x_2=-1$，

故可设 $f(x)+1=a(x-2)(x+1)$，即 $f(x)=ax^2-ax-2a-1$.

又函数有最大值 $y_{\max}=8$，即 $\dfrac{4a(-2a-1)-a^2}{4a}=8$

解得 $a=-4$ 或 $a=0$(舍).

$\therefore$ 所求函数的解析式为 $f(x)=-4x^2+4x+7$.

例 2 已知函数 $f(x)=-x^2+2ax+1-a$ 在 $x\in[0,1]$时有最大值 2，求 a 的值.

【解】 函数 $f(x)=-x^2+2ax+1-a=-(x-a)^2+a^2-a+1$，对称轴方程为 $x=a$.

(1)当 $a<0$ 时，$f(x)_{\max}=f(0)=1-a$，$\therefore 1-a=2$，$\therefore a=-1$.

(2)当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，$f(x)_{\max}=a^2-a+1$，

$\therefore a^2-a+1=2$，$\therefore a^2-a-1=0$，$\therefore a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$(舍).

(3)当 $a>1$ 时，$f(x)_{\max}=f(1)=a$，$\therefore a=2$.

综上可知，$a=-1$ 或 $a=2$.

例 3 设函数 $y=x^2-2x, x\in[-2,a]$，若函数的最小值为 $g(a)$，求 $g(a)$.

【解】 $\because$ 函数 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$，$\therefore$ 对称轴为直线 $x=1$，

$\because x=1$ 不一定在区间$[-2,a]$内，$\therefore$ 应进行讨论.

当 $-2<a\leqslant 1$ 时，函数在$[-2,a]$上单调递减，则当 $x=a$ 时，y 取得最小值，即 $y_{\min}=a^2-2a$；

当 $a>1$ 时，函数在$[-2,1]$上单调递减，在$[1,a]$上单调递增，则当 $x=1$ 时，y 取得最小值，即 $y_{\min}=-1$.

综上，$g(a)=\begin{cases}a^2-2a, & -2<a\leqslant 1\\ -1, & a>1\end{cases}$.

例 4 解下列不等式：

(1)$2x^2+4x+3>0$；(2)$-3x^2-2x+8\geqslant 0$；(3)$12x^2-ax>a^2(a\in\mathbf{R})$.

【解】 (1)$\because \Delta=4^2-4\times2\times3<0$，$\therefore$ 方程 $2x^2+4x+3=0$ 没有实根.

二次函数 $y=2x^2+4x+3$ 的图象开口向上，与 x 轴没有交点，即 $2x^2+4x+3>0$ 恒成立，

$\therefore$ 不等式 $2x^2+4x+3>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

(2)原不等式可化为 $3x^2+2x-8\leqslant 0$,

$\because \Delta=100>0$, $\therefore$ 方程 $3x^2+2x-8=0$ 的两根为 -2, $\frac{4}{3}$.

结合二次函数 $y=3x^2+2x-8$ 的图象可知，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|-2\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}\right\}$.

(3)由 $12x^2-ax-a^2>0\Leftrightarrow(4x+a)(3x-a)>0\Leftrightarrow\left(x+\frac{a}{4}\right)\left(x-\frac{a}{3}\right)>0$

①$a>0$ 时，$-\frac{a}{4}<\frac{a}{3}$,

解集为 $\left\{x\middle|x<-\frac{a}{4}\text{或}x>\frac{a}{3}\right\}$;

②$a=0$ 时，$x^2>0$，解集为 $\{x|x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq 0\}$;

③$a<0$ 时，$-\frac{a}{4}>\frac{a}{3}$，解集为 $\left\{x\middle|x<\frac{a}{3}\text{或}x>-\frac{a}{4}\right\}$.

例 5 设函数 $f(x)=mx^2-mx-1$.

(1)若对于一切实数 x，$f(x)<0$ 恒成立，求 m 的取值范围;

(2)若对于 $x\in[1,3]$，$f(x)<-m+5$ 恒成立，求 m 的取值范围.

分析：(1)对于 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)<0$ 恒成立，可转化为函数 $f(x)$ 的图象总是在 x 轴下方，可讨论 m 的取值，利用判别式求解.

(2)含参数的一元二次不等式在某区间内的恒成立问题，常有两种处理方法：方法一是利用二次函数区间上的最值来处理；方法二是先分离出参数，再去求函数的最值来处理.一般方法二比较简单.

规范解答：(1)要使 $mx^2-mx-1<0$ 恒成立,

若 $m=0$，显然 $-1<0$;

若 $m\neq 0$，则 $\begin{cases}m<0\\ \Delta=m^2+4m<0\end{cases}\Rightarrow -4<m<0$.

综上所述，$-4<m\leqslant 0$.所以 m 的取值范围为 $(-4,0]$.

(2)要使 $f(x)<-m+5$ 在 $[1,3]$ 上恒成立，即 $m\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}m-6<0$ 在 $x\in[1,3]$ 上恒成立.

有以下两种方法：

方法一：令 $g(x)=m\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}m-6$，$x\in[1,3]$

当 $m>0$ 时，$g(x)$ 在 $[1,3]$ 上是增函数，所以 $g(x)_{\max}=g(3)\Rightarrow 7m-6<0$,

所以 $m<\frac{6}{7}$，则 $0<m<\frac{6}{7}$;

当 $m=0$ 时，$-6<0$ 恒成立;

当 $m<0$ 时，$g(x)$ 在 $[1,3]$ 上是减函数,

所以 $g(x)_{\max}=g(1)\Rightarrow m-6<0$. 所以 $m<6$，所以 $m<0$.

综上所述：m 的取值范围是 $\left\{m \middle| m<\frac{6}{7}\right\}$

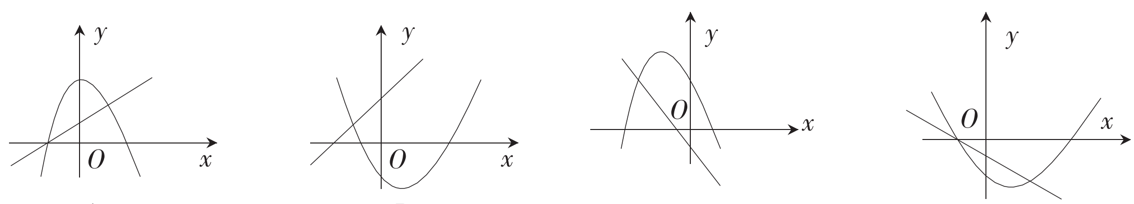
方法二：因为 $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

又因为 $m(x^2-x+1)-6<0$，所以 $m<\frac{6}{x^2-x+1}$.

令 $y=\frac{6}{x^2-x+1}=\frac{6}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$，因函数在 $[1,3]$ 上的最小值为 $\frac{6}{7}$，所以只需 $m<\frac{6}{7}$ 即可，所以 m 的取值范围是 $\left\{m \middle| m<\frac{6}{7}\right\}$.

巩固练习
GONGGU LIANXI

1. 一次函数 $y=ax+b$ 与二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在同一坐标系中的图象大致是(　　)



A　　B　　C　　D

2. 若二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)-f(x)=2x$，$f(0)=1$，则 $f(x)=$(　　)

A. x^2+x　　B. x^2-x+1　　C. x^2+x+1　　D. x^2-x+1

3. 已知一次函数 $f(x)$ 满足 $f[f(x)]=3x+2$，则 $f(x)=$__________.

4. 若 $f(x)=(x+a)(x-4)$ 为偶函数，则实数 $a=$__________.

5. 函数 $f(x)=ax^2+ax-1$，若 $f(x)<0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 a 的取值范围是__________.

6. 不等式 $\frac{x-2}{x+1}\leqslant 0$ 的解集为(　　)

A. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$　　B. $\{x|-1<x\leqslant 2\}$　　C. $\{x|-1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x|-1<x<2\}$

7. 已知不等式 $x^2-x\leqslant 0$ 的解集为 M，且集合 $N=\{x|-1<x<1\}$，则 $M\cap N$ 为(　　)

A. $[0,1)$　　B. $(0,1)$　　C. $[0,1]$　　D. $(-1,0]$

8. 条件 $p:\frac{x-5}{2-x}\geqslant 0$，条件 $q:x^2-7x+10<0$，则 p 是 q 的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 当 $x\in(1,2)$ 时，不等式 $x^2+mx+4<0$ 恒成立，则 m 的取值范围是__________.

参考答案
CANKAO DAAN

1. C　2. B　3. $\sqrt{3}x+\sqrt{3}-1$ 或 $-\sqrt{3}x-\sqrt{3}-1$　4. 4　5. $-4<a\leqslant 0$　6. B　7. A　8. B
9. $(-\infty,-5]$

第二节　指数函数与对数函数

复习指导
FUXI ZHIDAO

函数是数学中最重要的一个分支，是历年高考考查的重点，而其中的指数函数与对数函数又是较难掌握和理解的两种基本初等函数.虽然本节的课本内容并不多，但命题的灵活性却很大，常和其他知识如图象变换、不等式等综合考查.为此我们必须熟练掌握指数函数与对数函数的概念及其图象和性质.

内容提要
NEIRONG TIYAO

指数函数与对数函数的单调性是由底数 a 的大小决定的，因此解题时通常对底数 a 按：$0<a<1$ 和 $a>1$ 进行分类讨论.两类函数的函数值的变化特征充分反映了函数的几何特征，所以数形结合思想在本节也是常用的思想方法.

在给定条件下求字母的取值范围也是常见题型，解决此类问题要注意单调性和不等式知识的综合应用.

另外指数、对数形式的比较大小问题在近几年高考中多次出现，常用方法：①化同底后利用函数的单调性.②作差或作商法.③利用中间量(0 或 1).④估算.

范例精讲
FANLI JINGJIANG

例 1　已知 $a=2^{1.2}$，$b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-0.2}$，$c=2\log_5 2$，则 a，b，c 的大小关系为(　　)

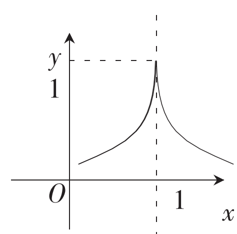
A. $c<b<a$　　B. $c<a<b$　　C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

【解】　因为 $b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-0.2}=2^{0.2}<2^{1.2}$，所以 $1<b<a$，$c=2\log_5 2=\log_5 2^2=\log_5 4<1$，所以 $c<b<a$，选 A.

例 2　若函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}+m$ 的图象与 x 轴有公共点，则 m 的取值范围是(　　)

A. $m\leqslant -1$　　B. $-1\leqslant m<0$　　C. $m\geqslant 1$　　D. $0<m\leqslant 1$

【解】　$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}, & x\geqslant 1,\\ 2^{x-1}, & x<1.\end{cases}$



画图象可知 $-1\leqslant m<0$.

答案为 B.

点评：本题考查了复杂形式的指数函数的图象特征，解题的出发点仍然是 $a>1$，$0<a<1$ 两种情况下函数 $y=a^x$ 的图象特征.

例 3　(1)函数 $y=\sqrt{\log_2 x-2}$ 的定义域是(　　)

A. $(3,+\infty)$　　B. $[3,+\infty)$　　C. $(4,+\infty)$　　D. $[4,+\infty)$

(2)设$f(x)=\lg\dfrac{2+x}{2-x}$，则$f\left(\dfrac{x}{2}\right)+f\left(\dfrac{2}{x}\right)$的定义域为(　　)

A. $(-4,0)\cup(0,4)$　　B. $(-4,-1)\cup(1,4)$

C. $(-2,-1)\cup(1,2)$　　D. $(-4,-2)\cup(2,4)$

【解】 (1)D　(2)B

点评：求函数定义域就是使得解析式有意义的自变量的取值范围，在对数函数中只有真数大于零时才有意义.对于抽象函数的处理要注意对应法则的对应关系.

例 4　对于$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2ax+3)$，

(1)说明函数的“定义域为**R**”和“值域为**R**”是否是一回事；

(2)结合“实数a取何值时$f(x)$在$[-1,+\infty)$上有意义”与“实数a取何值时函数的定义域为$(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$”说明求“有意义”问题与求“定义域”问题的区别；

(3)结合(1)(2)两问，说明实数a取何值时$f(x)$的值域为$(-\infty,-1]$；

(4)实数a取何值时$f(x)$在$(-\infty,-1]$内是增函数.

【解】 记$\mu=g(x)=(x-a)^2+3-a^2$，则$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\mu$.

(1)不是一回事.

定义域为**R**$\Leftrightarrow g(x)>0$恒成立，

故$\Delta=4(a^2-3)<0$，解得实数a的取值范围为$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

值域为**R**：$\log_{\frac{1}{2}}\mu$值域为**R**$\Leftrightarrow\mu$至少取遍所有的正实数，

则$\Delta=4(a^2-3)\geqslant0$，解得实数$a$的取值范围为$(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$.

(2)实数a取何值时$f(x)$在$[-1,+\infty)$上有意义：

命题等价于$\mu=g(x)>0$对于任意$x\in[-1,+\infty)$恒成立，

则$\begin{cases}a<-1\\g(-1)>0\end{cases}$或$\begin{cases}a\geqslant-1\\2-a^2>0\end{cases}$，解得实数$a$的取值范围为$(-2,\sqrt{3})$.

实数a取何值时函数的定义域为$(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$：

由二次不等式$x^2-2ax+3>0$的解集为$(-\infty,1)\cup(3+\infty)$，可得$1+3=2a$，则$a=2$.

故a的取值范围为$\{2\}$.

区别：“有意义问题”正好转化成“恒成立问题”来处理，而“定义域问题”转化成“取遍所有问题”来解决(这里转化成了解集问题，即取遍解集内所有的数值).

(3)易知$g(x)$的值域是$[2,+\infty)$，又$g(x)$的值域是$[3-a^2,+\infty)$，

得$3-a^2=2\Rightarrow a=\pm1$，故$a$的取值范围为$\{-1,1\}$.

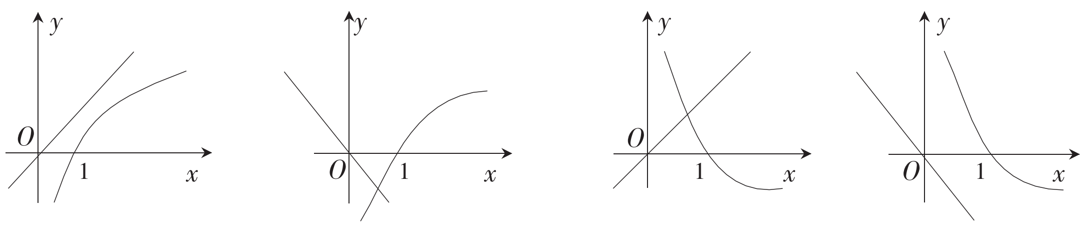
(4)命题等价于$g(x)$在$(-\infty,1]$上为减函数，且$g(x)>0$对任意的$x\in(-\infty,1]$恒成立，

则$\begin{cases}a\geqslant1\\g(1)>0\end{cases}$，解得$a$的取值范围为$[1,2)$.

点评：该题主要考查复合对数函数的定义域、值域以及单调性问题.解题过程中遇到了恒成立问

题，注意命题“恒为正”与“取遍所有大于零的数”不等价.同时还考查了二次函数函数值的分布情况，解题过程中应结合三个“二次”的重要结论来进行处理.

例 5　当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 和 $y=(1-a)x$ 的图象只可能是(　　)



A.　　B.　　C.　　D.

【解】 当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 的图象只能在 A 和 B 中选，

又 $a>1$ 时，$y=(1-a)x$ 为减函数.故答案为 B.

点评：要正确识别函数图象，一是熟悉各种基本函数的图象，二是把握图象的性质，根据图象的性质去判断，如过定点、定义域、值域、单调性、奇偶性.

例 6　已知函数 $f(x)=e^{|x-a|}$(a 为常数).若 $f(x)$ 在区间$[1,+\infty)$上是增函数，则 a 的取值范围是______.

【解】 根据函数 $f(x)=e^{|x-a|}=\begin{cases} e^{x-a}, & x\geqslant a \\ e^{a-x}, & x<a \end{cases}$，看出当 $x\geqslant a$ 时函数为增函数，因为已知函数在区间$[1,+\infty)$上为增函数，所以 a 的求取值范围为$(-\infty,1]$.

例 7　设关于 x 的方程 $4^x-2^{x+1}-b=0(b\in\mathbf{R})$，

(1)若方程有实数解，求实数 b 的取值范围；

(2)当方程有实数解时，讨论方程实根的个数，并求出方程的解.

【解】 (1)原方程可化为 $b=4^x-2^{x+1}$.

$\because 4^x-2^{x+1}=(2^x)^2-2\times 2^x=(2^x-1)^2-1\geqslant -1$，

$\therefore$ 当 $b\in[-1,+\infty)$时方程有实数解.

(2)①当 $b=-1$ 时，$2^x=1$，$\therefore$ 方程有唯一解 $x=0$；

②当 $b>-1$ 时，$(2^x-1)^2=1+b\Rightarrow 2^x=1\pm\sqrt{1+b}$.

$\because 2^x>0$，$1+\sqrt{1+b}>0$，$\therefore 2^x=1+\sqrt{1+b}$ 的解为 $x=\log_2(1+\sqrt{1+b})$；

令 $1-\sqrt{1+b}>0\Rightarrow\sqrt{1+b}<1\Rightarrow -1<b<0$，

$\therefore$ 当 $-1<b<0$ 时，$2^x=1-\sqrt{1+b}$ 的解为 $x=\log_2(1-\sqrt{1+b})$；

综合①②，得：

A.当 $-1<b<0$ 时，原方程有两解：$x=\log_2(1\pm\sqrt{1+b})$；

B.当 $b\geqslant 0$ 或 $b=-1$ 时，原方程有唯一解 $x=\log_2(1+\sqrt{1+b})$；

C.当 $b<-1$ 时，原方程无解.

点评：具有一些综合性的指数、对数问题，问题的解答涉及指数、对数函数，二次函数、参数讨论、方程讨论等各种基本能力，这也是指数、对数问题的特点，题型非常广泛，应通过解题学习不断积累经验.