



数学方法论

SHUXUE
FANGFA LUN

□ ————— 王燕荣 ● 著 —————



西南交通大学出版社

作者简介

王燕荣，女，山西繁峙人，太原师范学院数学系教师，数学教育教研室主任。主要研究方向为数学课程与教学论。参与全国教育科学“十一五”规划教育部课题1项，省级规划课题3项，发表学术论文9篇，其中一篇于2015年被人大复印资料全文转载。

◎ 责任编辑 / 张宝华

◎ 封面设计 / JADE.HE
DESIGN STUDIO

数学方法论

数学方法论

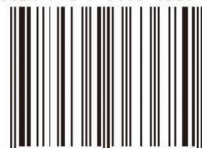


交大e出版
微信购书|数字资源



官方天猫店
上天猫 买正版

ISBN 978-7-5643-6368-0



9 787564 363680 >

定价: 78.00元

数学方法论

王燕荣 著

西南交通大学出版社
· 成 都 ·

图书在版编目（C I P）数据

数学方法论 / 王燕荣著. —成都: 西南交通大学出版社, 2018.8
ISBN 978-7-5643-6368-0

I. ①数… II. ①王… III. ①数学方法—方法论
IV. ①01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 195302 号

数学方法论

王燕荣 著

责任编辑 张宝华
封面设计 何东琳设计工作室

印张 13 字数 228千

出版发行 西南交通大学出版社

成品尺寸 170 mm × 230 mm

网址 <http://www.xnjdcbs.com>

版次 2018年8月第1版

地址 四川省成都市二环路北一段111号
西南交通大学创新大厦21楼

印次 2018年8月第1次

邮政编码 610031

印刷 成都中永印务有限责任公司

发行部电话 028-87600564 028-87600533

书号 ISBN 978-7-5643-6368-0

定价 78.00元

图书如有印装质量问题 本社负责退换
版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

前言

数学思想蕴涵在数学知识形成、发展和应用的过程中,是数学知识和数学方法在更高层次上的抽象和概括.随着数学教育的不断深入和发展,其重要性日趋凸现.因此,从方法论角度探讨数学发展的规律、掌握典型的数学思想方法、了解数学的发现和发明以及创新的法则,并有效指导教学实践是对数学教师的基本要求,也是提升数学教师的学科素养的有效途径.

本书是作者多年教学实践经验与理论研究成果的总结,该书力求理论的科学性和前沿性,内容的时代性和丰富性,所选例证的典型性和实用性,语言陈述的严谨性和通俗性.全书共6章,第一章为数学方法论概述.从整体及宏观认识上对数学方法论进行概述,尤其对核心词——数学思想、数学方法、数学思想方法采用文献研究法,在梳理文献的基础上概括观点.第二章介绍了数学发展的规律和趋势.从数学史的角度,结合典型的事例分析数学发展的主要特点及发展的方法.第三章介绍了数学思想方法的几次重大突破.从数学历史发展的脉络详细呈现六次重大突破的背景及产生的巨大影响,这也是人类数学思维发生质变的关键之处,同时启迪教师在相应的教学中如何更好地引导学生提升思维.第四章为数学思想方法选讲.目前,对数学思想方法尚无统一的划分,本书主要从发现问题、提出问题、分析问题和解决问题时常用的重要思想角度将其分为七类,具体方法则在各类解题研究中体现.第五章为数学悖论与数学发明创造.首先介绍了数学悖论与数学危机,旨在开阔视野,提升数学文化修养.然后讨论了数学发明创造的心智过程以及数学审美能力的培养,意在激发学生学习数学的热情,发展学生的创新意识.第六章为数学思想方法教学研究.对如何将数学的精神、思想和方法落实到课堂教学中进行了一系列探讨,以期达到抛砖引玉之效.

本书在撰写过程中,得到了韩龙淑老师的大力支持与帮助,本书能够顺

利完成，离不开韩老师在学术上的辛勤指导。另外，要感谢王保红、王文静、姜合峰老师给予的鼓励和中肯的建议，感谢陈梦瑶、范芬瑞两位研究生在文字校对时的辛勤付出。

鉴于作者学术水平有限，加上数学方法论是哲学、方法论和数学史等多门学科的交叉学科，本书难免存在不当之处，恳请各位专家、同行、广大师生和读者批评指正。

作 者

2018 年 3 月

目 录

1 数学方法论概述	1
1.1 数学方法、数学思想的认识及其关系	1
1.1.1 数学方法的认识	1
1.1.2 数学思想的认识	4
1.1.3 数学思想与数学方法的关系	5
1.2 数学方法论发展简史	6
1.2.1 数学方法论的萌芽（17 世纪中叶前）	6
1.2.2 数学方法论的形成（17 世纪中叶至 19 世纪末）	7
1.2.3 数学方法论的建立和发展（20 世纪初至今）	7
1.3 数学方法论与相关学科的关系	9
1.4 数学方法论研究的内容与意义	11
1.4.1 数学方法论研究的内容	11
1.4.2 数学方法论研究的意义	12
1.5 数学方法论的研究方法	16
2 数学发展的规律和趋势	17
2.1 数学发展的主要规律	17
2.1.1 数学发展的实践性	17
2.1.2 数学发展的曲折性	18
2.1.3 数学发展的相对独立性	25
2.1.4 数学论争的普遍性	27
2.2 19 世纪以来数学发展的特点和趋势	29
2.2.1 数学发展的特点	29
2.2.2 近现代数学发展的趋势	36

2.3 数学发展的方法	38
2.3.1 问题产生法	38
2.3.2 扩张法	41
2.3.3 交叉互取法	42
2.3.4 分支分化法	42
2.3.5 发现法	43
3 数学思想方法的几次重大突破	44
3.1 从算术到代数	44
3.1.1 算术与代数的区别	44
3.1.2 代数体系结构的形成	48
3.2 从综合几何到几何代数化	48
3.2.1 几何代数化思想的背景	48
3.2.2 几何代数化的意义	54
3.3 从常量数学到变量数学	55
3.3.1 变量数学产生的历史背景	55
3.3.2 变量数学的形成及意义	55
3.4 从必然数学到或然数学	57
3.4.1 或然数学的现实基础	57
3.4.2 或然数学的产生和发展	58
3.5 从明晰数学到模糊数学	61
3.5.1 模糊数学产生的背景	61
3.5.2 模糊数学的思想方法	62
3.6 从手工证明到机器证明	63
3.6.1 机器证明的必要性和可能性	64
3.6.2 机器证明的思想及发展	64
4 数学思想方法选讲	68
4.1 数学公理化方法	68
4.1.1 公理化方法的意义	68
4.1.2 公理化方法发展简史	68

4.1.3	公理化方法的应用举例	74
4.1.4	公理化方法的作用和局限性	76
4.2	数学中的化归思想	77
4.2.1	化归思想方法的意义	77
4.2.2	化归思想方法	79
4.2.3	化归的基本原则	79
4.2.4	化归的基本策略	86
4.2.5	化归方法的分类	94
4.2.6	中学数学教材中的化归思想剖析	95
4.3	数学中的关系-映射-反演原则	96
4.3.1	关系-映射-反演原则的意义	96
4.3.2	RMI 原则在数学中的应用	99
4.4	数学模型化方法	109
4.4.1	数学模型的意义	111
4.4.2	数学模型的分类	111
4.4.3	数学模型化方法应用举例	113
4.5	数形结合思想方法	117
4.5.1	数形结合思想的重要性	117
4.5.2	数形结合的历史渊源	118
4.5.3	数形结合思想应用举例	121
4.6	分类讨论思想	130
4.6.1	分类讨论思想的应用举例	131
4.6.2	简化回避分类讨论的技巧	140
4.7	合情推理思想	141
4.7.1	演绎推理和合情推理	141
4.7.2	合情推理的主要形式	141
5	数学悖论与数学发明创造	155
5.1	数学悖论	155
5.1.1	悖论的意义	155

5.1.2	常见的悖论	156
5.1.3	悖论的成因及其解决方案	160
5.2	悖论与三次数学危机	162
5.2.1	数学史上的三次数学危机	163
5.2.2	研究悖论的重要意义	164
5.3	数学发明创造的心智过程	164
5.3.1	数学发明创造的含义	164
5.3.2	数学发明创造的心智过程	165
5.3.3	数学中的灵感思维	166
5.3.4	数学发明创造与数学美	169
5.4	数学美及其审美能力的培养	170
5.4.1	数学与美学	170
5.4.2	数学美的体现形式	171
5.4.3	数学教学中审美能力的培养	175
6	数学思想方法教学研究	178
6.1	数学思想方法教学的重要性	178
6.2	数学思想方法的教学策略及案例分析	185
6.2.1	数学思想方法的教学策略	185
6.2.2	课堂教学设计案例	193
	参考文献	199

1 数学方法论概述

米山国藏指出：作为知识的数学，人们日后若不从事数学工作，通常是走出校门后不到一两年就忘掉了。然而，不管人们从事什么工作，那些深深地铭刻于头脑中的数学的精神、思想方法、研究方法、推理方法和着眼点等（若培养了这方面的素质）却随时随地发挥着作用，使他们受益终身。所以，可以说，数学教育就是所有知识都遗忘后所剩下的东西。《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》（2011年版）中也明确提出：“数学教育使学生获得适应社会生活和进一步发展所必需的数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验。”《普通高中数学课程标准（实验稿）》提出：“教学中应强调对基本概念和基本思想的理解和掌握，对一些核心概念和基本思想要贯穿高中数学教学的始终”。由此彰显了数学思想方法研究的重要性。也就是说，从方法论角度探讨数学发展规律、数学思想方法、数学的发现、发明以及创新的法则等，对提升数学教师的学科素养，促进基础教育改革的发展，具有重要的理论和现实意义。

1.1 数学方法、数学思想的认识及其关系

1.1.1 数学方法的认识

要研究什么是数学方法，首先就要对方法有清楚的认识。方法是科学方法论的基本概念，目前关于方法的认识，还没有统一的定义。“方法”在词典上是指解决思考、说话、行动等问题的门路和程序，又称在实践活动和精神活动中的行动方式。查阅各种辞书，可以看出，对方法的解释也是各有千秋。如《苏联大百科全书》中说：“方法表示研究或认识的途径、理论或学说，即从实践上或理论上把握现实的，为解决具体课题而采用的手段或操作的总和。”美国麦克来伦公司的《哲学百科全书》将方法解释为“按给定程序达到既定成果必须采取的步骤。”我国《辞源》中将“方法”解释为“办法、方术或法术”。从科学研究的角度来说，方法是人们用以研究问题、解决问题的手段、工具，这种手段、工具与人们的知识经验、理论水平密切相关，是指导人们行动的原则。中国古代兵书《三十六计》开篇就写道：“六六三十六，数中有

术, 术中有数.” 这说明我国古人早已意识到数学与策略、方法之间的密切关系.

查阅已有文献的研究, 比较详实地对方法进行阐释的有韩增禄的《“方法”概念初探》一文, 该文多角度、多方面地总结阐释了“方法”的不同含义:

(1) 方法是一条道路和途径. “方法”一词, 起源于希腊语, 字面意思是沿着道路运动. 其语义学解释是指关于某些调节原则的说明, 这些调节原则是为了达到一定的目的所必须遵循的.

(2) 方法是一种程序和结构. “研究科学的方法来自科学本身, 来自研究科学的全过程. 有的科学家为了使他的作品精美, 在做出结果后把‘脚手架’拆掉, 也就是把过程都删掉. 不过, 我们可不能忘记: 方法就是程序, 就是过程, 只有在那并不完美的过程中, 才能找到完善的方法”.

(3) 方法是一种技巧. 著名数学家和数学教育家波利亚说过: “一个想法使用一次是一个技巧, 经过多次的使用就可以成为一种方法.”

(4) 方法是一种理论知识的实际应用. 苏联学者什托夫认为: “理论和科学方法之间的区别是相对的, 甚至可以说, 科学方法就是理论的实际应用, 就是行动中的理论.”

(5) 方法是问题的对立面. 方法都是相对问题而言的, 有了问题, 人们才会寻找解决问题的方法, 没有问题就没有方法的产生, 从这个意义上讲, 方法就是问题的对立面.

(6) 方法是一种工具和手段. 俄国生理学家巴甫洛夫指出: “科学方法乃是作为客观世界主观反映的人类思维运动的内部规律性, 或者也可以说, 它是‘被移植’和‘被移入’到人类意识中的客观规律性, 是被用来自觉地有计划地解释和改变世界的工具”.

(7) 方法是一种规则和标准. 我国古代《墨子·天志》云, 轮人有规, 匠人有矩, 今轮人操其规, 将以量天下之圆与不圆也, 曰: 中吾规谓之圆, 不中吾规谓之不圆. 是以圆与不圆可得而知也, 此其故何? 是圆法明也. 匠人亦操其矩, 将以度量天下之方与不方也, 曰: 中吾矩者谓之方, 不中吾矩者谓之不方. 是以方与不方皆可得而知之, 此其何故? 则方法明也. 可见, “方法”一词即为度量圆形或方形之法, 泛指一种标准和规则, 又为一种行事之理.

上述关于方法的认识, 各有其合理性. 概言之, 我们认为, 方法是指人们在认识和改造客观世界的过程中所采取的具有可操作性的手段、途径或行为规则的统称. 方法因问题而产生, 因能解决问题而存在. 数学是研究客观世界的数量关系和空间形式的科学, 数学方法是以客观世界的数量关系和空间形式为研究对象, 发现、提出、分析以及解决数学问题(包括数学内部问题和实际问题)时采取的具有可操作性的各种手段、途径或行为规则的统称, 即

用数学的语言表达研究对象及其关系,经过推理、运算和分析,形成对问题的解释、判断和预言的方法。

关于数学方法的分类,不同的学者提出了不同的分类层次。张奠宙等将数学分为四个层次:第一层次是基本的和重大的数学思想方法,如模型化方法、微积分方法、概率统计方法、拓扑方法等;它们决定一个大的数学学科方向,构成数学的重要基础,我们感到这些重大的数学方法能和某个哲学范畴相联系,即数学方法是一些哲学范畴的数量侧面。第二层次是与一般的科学方法相应的数学方法,如类比联想、分析综合、归纳演绎等一般的科学方法,这些方法在用于数学时有它自己的特点。第三层次是数学中特有的方法,如数学等价、数学表示、公理化、关系映射反演、数形转换等方法,这些方法主要在数学中产生和适用(当然也可部分地迁移到其他学科),值得深入探讨;其中“关系、映射、反演”方法是徐利治先生的一项创造性概括,它为大家所一致重视,理所当然。第四层次是中学数学中的解题技巧,由于它的内容是初等数学,规律较为明确,又易于深入解剖,所以具有特殊的重要意义;另一方面,各种解题技巧的内容十分丰富,变化无穷,要概括起来也相当难。蔡上鹤认为,数学方法可以分为宏观的和微观的:宏观的包括模型方法、变换方法、对称方法、无穷小方法、公理化方法、结构化方法、实验方法。微观的且在中学数学中常用的基本数学方法大致可以分为以下三类:① 逻辑学中的方法。如分析法、综合法、反证法、归纳法、穷举法等,这些方法既要遵从逻辑学中的基本规律和法则,又因运用于数学之中而具有数学的特色。② 数学中的一般方法。如建模法、消元法、降次法、代入法、图像法(也称坐标法)、向量法、比较法、放缩法、同一法、数学归纳法等,这些方法极为重要,应用也很广泛。③ 数学中的特殊方法。如配方法、待定系数法、加减法、公式法、换元法(也称为中间变量法)、拆项补项法、因式分解法等,这些方法在解决某些数学问题时起着重要作用。邵光华等通过不同的分类标准,按照数学方法的用途分为两类:纯粹数学方法(基础数学领域中的数学方法,用于解决数学内部的问题)和应用数学方法(应用数学领域中的数学方法,用于解决数学外部的生产实际问题);按照数学方法的适用范围分为特殊性数学方法和一般性数学方法,其中,适用于较窄领域或个别领域的数学方法为特殊性数学方法,适用于较多数学领域的数学方法为一般性数学方法。

数学方法的分类界定也比较模糊,我们认为,根据其抽象概括程度及适用范围,可以分为以下几类:

(1) 基本的和重大的全局性数学思想方法。如化归思想、数学模型化思想、关系映射反演原则、公理化思想、极限思想等,这些方法作用的范围广,

有的甚至影响着一个数学分支和其他学科的发展方向。

(2) 逻辑学中的方法. 包括观察、分析、综合、类比、归纳、演绎、抽象、概括、联想、猜想等, 它们不仅适用于数学, 而且适应于其他学科领域。

(3) 数学中的一般方法. 包括配方法、换元法、待定系数法、判别式法、割补法等, 它们往往和具体的数学内容联系在一起, 是解决某类数学问题的方法。

(4) 数学中特殊的技巧方法(招术). 如变形方法、放缩方法、拆项法等, 是解决特殊问题的专用计策或手段. 这里重点分析“法”与“招”的区别和联系. 所谓的招术, 是指解决特殊问题的专用计策及手段, 纯属于技能而不属于能力. “招”的教育价值远低于“法”的价值, “法”的可仿效性带有较为“普适”的意义, 而“招”的“普适”要差得多; 实施“招”要以能实施管着它的“法”为前提. 例如: 待定系数法在求解二次函数的解析式时是非常有用的“法”, 可以根据图像上三个点的坐标求出, 这是第一“招”; 根据顶点和另一点的坐标求出, 这是第二“招”; 根据与 x 轴的交点与另一点的坐标求出, 这是第三“招”。

例如: 解二元一次方程组的方法有四个层次: 第一层次是化归思想, 把未知的转化为已知, 这是指导思想; 第二层次是消元法, 如何化归, 消去一个元; 第三层次是加减或代入消元法, 即如何消; 第四层次是变形方法, 若选择了代入消元法, 如何从一个方程中将一个未知数用另一个未知数表示。

1.1.2 数学思想的认识

关于思想的认识, 在现代汉语中, “思想”解释为客观存在反映在人的意识中经过思维活动而产生的结果. 《辞海》中称“思想”为理性认识. 《中国大百科全书》认为“思想”是相对于感性认识的理性认识成果. 《苏联大百科全书》中指出: “思想是解释客观现象的原则.” 综合起来看, 思想是认识的高级阶段, 是对事物本质的、高级抽象的概括的理性认识结果。

关于数学思想的认识, 视角不同, 差异较大. 如丁石孙在《数学思想的发展》一文中指出, 数学思想就是人们对于数学的看法, 这些看法包括: 数学在人类的知识体系中所占的地位, 数学与生产实践的关系, 数学与其他学科的关系, 以及数学发展的规律, 数学研究方法的特点等; 张奠宙等认为: 数学思想尚不成为一种专有名词, 人们常用它来泛指某些有重大意义的、内容比较丰富、体系相当完整的数学成果; 曲立学认为, 数学思想是人们对数学科学研究的本质及规律的深刻认识, 包括数学科学的对象及其特征, 研究途

径与方法的特点,研究成就的精神文化价值及对物质世界的实际作用,内部各种成果或结论之间的互相关联和互相支持的关系等.邵光华从数学教育角度,认为数学思想应被理解为更高层次的理性认识,那就是关于数学内容和方法的本质认识,是对数学内容和方法进一步的抽象和概括.鉴于对已有研究的分析和理解,认为数学思想是对数学内容和方法的本质认识,是对数学规律的理性认识,是从某些数学内容和在数学的认识过程中提炼上升的数学观点,数学思想蕴涵于运用数学方法分析、处理和解决数学问题的过程之中,是建立数学和用数学解决问题的指导思想.

1.1.3 数学思想与数学方法的关系

首先,数学思想和数学方法之间的联系是必然的.数学思想和数学方法都与数学知识联系密切,数学思想是隐藏在数学知识背后的,有时称之为隐性数学知识,即数学思想是内隐的;而数学方法是以数学知识为载体的,是数学思想的外显表现.数学思想对于数学知识和数学方法具有巨大的凝聚力,是联系数学知识的桥梁和纽带,是运用数学方法解决问题时的指导思想.

其次,数学思想和数学方法之间的属性和功能是不同的.数学思想是对数学知识、数学方法的本质认识,具有导向性、统摄性、概括性的特点;数学方法是实现数学思想的策略方式,具有可操作性、具体性和可仿效性等特点,是数学思想的具体化反映.针对上例,可以看出,主导方向是化归思想,那么如何化归,具体的方法则是配方法和直接开平方法.

再次,数学思想的外化方式不唯一,即与同一数学思想相对应的数学方法可能有若干种.如:化归思想是解决数学问题常用的基本思想,那么如何化归,具体的方法有:通过语义转换实现化归、通过寻找恰当的映射实现化归等;而映射实现化归包括初等数学中的变量替换、换元、增量替换、等代换等.

最后,数学思想和数学方法之间具有相对性.一般来说,同一个数学成果,当注重操作意义,即用它去解决个别问题时,就称之为方法;当论及它在数学体系中的价值和意义时,就称之为思想.例如“极限”,用它去求导数、求积分时,人们就说“极限方法”;当讨论它的价值,即将变化过程趋势用数值加以表示,使无限向有限转化时,人们就讲“极限思想”了,于是也有“极限思想方法”“数学思想方法”之类的提法.其实,数学思想和数学方法是不加区别的.M. 克莱因(M. Klein)的巨著《古今数学思想》,其实说的也是“古今数学方法”,只不过从数学史的角度看,人们更多注意的是那些数学大家们的思想贡献、文化价值,而较少从“方法”是否有用去考虑,因而才称之为