浙大优学
一题一课

刷百题不如解透一题

低年级同步课后提升 / 毕业班专题自主复习

一题一课
高中数学

YITI YIKE
GAOZHONG SHUXUE

函数与导数

主　　编　惠红民
本册主编　张　征
　　　　　刘喜荣

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

一题一课

高中数学(函数与导数)

主　　编　惠红民
本册主编　张　征　刘喜荣

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

一题一课. 高中数学. 函数与导数 / 惠红民主编.
—杭州:浙江大学出版社,2016. 6
ISBN 978-7-308-15684-4

Ⅰ. ①一…　Ⅱ. ①惠…　Ⅲ. ①中学数学课—高中—题解　Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 054076 号

一题一课. 高中数学(函数与导数)

主编　惠红民

策　　划	陈海权(电子信箱:chess332@163. com)
责任编辑	夏晓冬
责任校对	金佩雯　陈　宇
封面设计	林智广告
出版发行	浙江大学出版社 (杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007) (网址:http://www. zjupress. com)
排　　版	杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷	临安市曙光印务有限公司
开　　本	889mm×1194mm　1/16
印　　张	6. 25
字　　数	250 千
版 印 次	2016 年 6 月第 1 版　2016 年 6 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-15684-4
定　　价	14. 80 元

目　　录

刷百题不如解透一题

“学习解题的最好方法之一就是研究例题”

解题，无疑是学好数学的最佳途径。于是，刷题风起，题海浪涌，一时间，必刷题、必做题、高频题、母题等，不一而足。以为刷题是学习数学的魔方，题海则是成就学霸的金丹！固然，学习数学离不开解题，但沉溺题海并不意味着能考好数学，不如通过分析典型例题的解题过程来学会解题更加简短有效。

“题不在多，但求精彩”

“千淘万漉虽辛苦，吹尽狂沙始到金。”直白地表达出我们在“一题一课”系列的“一题”即例题选取上的态度与倾向。每一道例题不仅体现对概念的理解与思考价值，还体现知识与方法的代表性；每一道例题不仅解析精到、解法充满活力，更通过思维拓展，借题发挥，探索其中的内在规律和方法，达成“做一题，通一类，会一片”的目标 。

“多刷题，不如多反思”

“学而不思则罔，思而不学则殆。”做题需要产生效果、追求效益。**种种经验表明：题不是刷的越多越好，如果缺乏解题反思，不但浪费时间，甚至误导学习。**因此，本书在写作体例与排版上都突出了反思的意义与重要性，反思的过程既是对数学知识和解题方法的理解与强化的过程，也是学生内化解题能力的过程。

“解题是一种实践性的技能，就像游泳、滑雪或弹钢琴一样，只能通过模仿、练习和钻研才能占为己有”

例题帮助学生理解并学会运用同步教材所学知识及技能，然后通过变式练习（一课一练）内化落实，既满足低年级同步自主学习，又满足毕业班专题自主复习。

如果您是学生，请加入“一题一课学习交流”QQ群(205743216)，我们一起学习、提高；如果您是老师，请加入“一题一课教师研讨”QQ群(529481589)，我们一起研讨、探索。

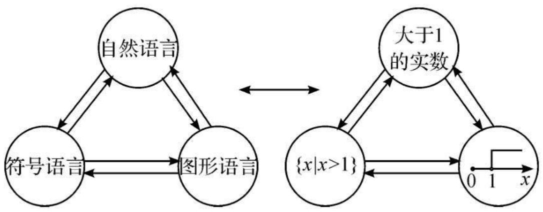
“学习的本质，不在于记住哪些知识，而在于它触发了你的思考。”学习数学的道路上，祝愿您学会思考，体会成功！刷百题不如解透一题，“一题一课”系列图书还有哪些分册，请看本书封底。

第一章　集　合

第 1 课　集合的概念

集合语言是现代数学的基本语言，同时也是一种抽象的数学语言. 高中数学将集合的初步知识作为高中的起始课程，既体现出集合在高中数学课程中举足轻重的作用，又体现出集合在数学中的奠基性地位.

1. 本课从我们熟悉的集合(自然数的集合、有理数的集合等)出发，结合实例，不仅给出元素和集合的含义、性质、表示方法，还特别注意渗透"概括"与"类比"这两种常用的逻辑思考方法. 因此我们在学习时，逐渐熟悉自然语言、符号语言和图形语言各自的特点和表示方法，能进行相互转换并且灵活应用.



2. 集合的概念作为高一数学的第一堂新授课，知识体系中的新概念、新符号较多，建议学习时先阅读课本，了解集合的含义；理解元素与集合的"属于"关系；熟记常用数集的专用符号. 在本课的引导下深刻理解集合元素的确定性、互异性、无序性；能够用其解决有关问题，并能选择列举法、描述法等不同的形式表示具体问题中的集合.

第 1 题　考查下列对象能否构成集合，若能构成集合，用适当的方式表示出来；若不能，说明理由.

(1)高一数学课本中所有的难题；

(2)我校所有高个子同学；

(3)自然数中不超过 10 的质数；

(4)方程 $x^2-2x=0$ 在实数范围内的解；

(5)函数 $y=2x^2+bx+c$ 的图象上所有的点；

(6)充分接近 π 的全体实数；

(7)一次函数 $y=x+3$ 与 $y=-2x+6$ 的图象的交点；

(8)$\frac{1}{2}$，$\sin 30°$，2

【分析】　判断能否构成集合的依据是：集合中元素是否具有确定性、互异性. (1)(2)(6)不能组成集合，(1)中的"所有的难题"不确定，什么样才算"难题"，没有判断标准，(2)中的"高个子同学"不确定，具体多高才算"高个子"，没有判断标准，(6)"充分接近 π 的实数"不确定，近似到多少才算"接近"，没有判断标准，(8)$\frac{1}{2}$与 $\sin 30°$相同，不满足互异性，(3)(4)(5)(7)能组成集合.

【解析】　因为(1)(2)(6)中元素不满足集合的确定性，(8)中元素不满足互异性，所以(1)(2)(6)(8)不能组成集合，(3)(4)(5)(7)能组成集合.

(3)因为自然数中不超过 10 的质数有 2，3，5，7，所以用列举法表示集合为$\{2,3,5,7\}$.

(4)因为 $x^2-2x=0$，解方程得 $x=0$，或 $x=2$，用列举法表示为$\{0,2\}$或用描述法表示集合为$\{x|x=2,x=0\}$.

(5)因为函数 $y=2x^2+bx+c$ 的图象上所有点的构成的是点集，所以$\{(x,y)|y=2x^2+bx+c,x\in\mathbf{R}\}$.

(7)一次函数 $y=x+3$ 与 $y=-2x+6$ 的图象的交点为 $\begin{cases}y=x+3,\\y=-2x+6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=4,\end{cases}$ 所以用列举法表示为$\{(1,4)\}$.

【经验分享】　判断能否构成集合的依据在于集合中元素是否具有确定性、互异性. 集合的表示方法有列举法、描述法，后面还会学到图示法. 用描述法表示集合时要分析是点集还是数集，点集的代表性元素与数集的代表性元素明显不同，如：$\{x|x-3>2\}$表示数集，$\{(x,y)|y=x^2+1\}$表示点集.

学习心得

一课一练 1（答案及解析见 P80）

1. 下列不能形成集合的是 ( )
A. 大于 2 的全体实数
B. 不等式 $3x-5<6$ 的所有解
C. 方程 $y=3x+1$ 所对应的直线上的所有点
D. x 轴附近的所有点
2. 下列表述正确的是 ( )
A. $\{0\}=\varnothing$　　B. $\{1,2\}=\{2,1\}$
C. $\{\varnothing\}=\varnothing$　　D. $0\notin\mathbf{N}$
3. 由 $a^2,2-a,4$ 组成一个集合 A，A 中含有 3 个元素，则实数 a 的取值可以是 ( )
A. 1　　B. -2　　C. 6　　D. 2
4. 方程组 $\begin{cases}x+y=1,\\2x+3y=-2\end{cases}$ 的解集是 ( )
A. $(5,4)$　　B. $(5,-4)$
C. $\{(-5,4)\}$　　D. $\{(5,-4)\}$
5. 用符号"$\in$"或"$\notin$"填空：
(1) -1 ________ $\mathbf{N}$，$\sqrt{5}$ ________ $\mathbf{Z}$，$\sqrt{16}$ ________ $\mathbf{R}$；
(2) $-\frac{1}{2}$ ________ $\mathbf{Q}$，π ________ $\mathbf{Q}$.
6. 设 x,y 都是非零的实数，则 $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{xy}{|xy|}$ 的值组成的集合的元素个数为________.
7. 下列命题不正确的是________，
(1)很小的实数可以构成集合；
(2)集合 $\{y|y=x^2-1\}$ 与集合 $\{(x,y)|y=x^2-1\}$ 是同一个集合；
(3) $1,\frac{3}{2},\frac{6}{4},\left|-\frac{1}{2}\right|,0.5$ 这些数组成的集合有 5 个元素；
(4)集合 $\{(x,y)|xy\leqslant 0,x,y\in\mathbf{R}\}$ 是指第二和第四象限内的点集.

8. 已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{N}\,\middle|\,\frac{12}{5-x}\in\mathbf{N}\right\}$，用列举法表示集合 A.

9. 已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，$a$ 为实数，
(1)若 A 是空集，求 a 的取值范围；
(2)若 A 是单元素集，求 a 的值；
(3)若 A 中至多只有一个元素，求 a 的取值范围.

易错追踪

第2课 集合间的关系

从我们熟悉的自然数集合、有理数集合出发,通过类比实数间的大小关系理解集合间的关系,理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集,会判断给定集合间的关系,提高利用类比发现新结论的能力.掌握并能使用Venn图表达集合的关系,加强从具体到抽象的思维训练,树立数形结合的思想.

1.值得注意的问题:在集合间的关系学习中,建议重视使用Venn图,这有助于我们通过直观图示来理解抽象概念.

2.一般地,对于两个集合A,B,如果集合A中任意一个元素都是集合B中的元素,我们就说这两个集合有包含关系,称集合A为集合B的子集,记作$A\subseteq B$(或$B\supseteq A$),读作"A包含于B"(或"B包含A"),如图2-1所示.

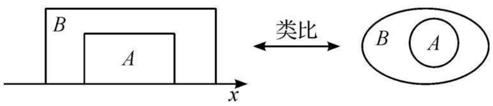


图2-1

第2题 集合$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$,集合$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$,

(1)若$B\subseteq A$,求实数m的取值范围;

(2)当集合A中$x\in \mathbf{N}^*$且x是奇数时,分别求A的子集、真子集、非空真子集;

(3)当$x\in\mathbf{R}$时,没有元素x使$x\in A$与$x\in B$同时成立,求实数m的取值范围.

【分析】 此题考查两集合间的基本关系,如子集和真子集,以及集合中的元素与集合间的关系,

(1)若$B\subseteq A$,要分两种情况讨论,$B=\varnothing$和$B\neq\varnothing$,利用数轴数形结合.

(2)数集$\mathbf{N}^*$表示正的自然数集,且x是奇数时,转化为集合$A=\{1,3,5\}$,结合子集和真子集的概念可求.

(3)没有元素x使$x\in A$与$x\in B$同时成立,即集合A,B无公共部分,分两类讨论.

【解析】 (1)当$B=\varnothing$时满足$B\subseteq A$,则$m+1>2m-1$即$m<2$;当$B\neq\varnothing$时,$m+1\leqslant 2m-1$,即$m\geqslant 2$时,要使$B\subseteq A$成立,如图2-2所示,则$\begin{cases}m+1\geqslant -2,\\2m-1\leqslant 5.\end{cases}$又$m\geqslant 2$,可得$2\leqslant m\leqslant 3$.综上可得实数$m$的取值范围为$m\leqslant 3$.

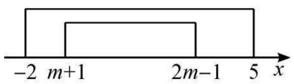


图2-2

(2)当$x\in\mathbf{N}^*$且x是奇数时,$A=\{1,3,5\}$,

所以A的子集为$\varnothing$,$\{1\}$,$\{3\}$,$\{5\}$,$\{1,3\}$,$\{1,5\}$,$\{3,5\}$,$\{1,3,5\}$;

A的真子集为$\varnothing$,$\{1\}$,$\{3\}$,$\{5\}$,$\{1,3\}$,$\{1,5\}$,$\{3,5\}$;

A的非空真子集为$\{1\}$,$\{3\}$,$\{5\}$,$\{1,3\}$,$\{1,5\}$,$\{3,5\}$.

(3)因为$x\in\mathbf{R}$,且$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$,$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$,

没有元素x使$x\in A$与$x\in B$同时成立.

当$B=\varnothing$时满足$B\subseteq A$,$m+1>2m-1$,即$m<2$时满足条件;

若$B\neq\varnothing$,则要满足条件$\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1,\\m+1>5\end{cases}$或$\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1,\\2m-1<-2,\end{cases}$

解得$m>4$或无解.

综上,有$m<2$或$m>4$.

【经验分享】 随着学习的深入,集合符号会越来越多,要能区分一些容易混淆的关系和符号.例如区分$\in$与$\subseteq$的不同,$\varnothing$与$\{0\}$的不同,子集、真子集、非空真子集的不同.

学习心得

一课一练 2(答案及解析见 P80)

1. 下列集合中，是空集的是　　(　　)

A. $\{x|x^2+3=3\}$　　B. $\{(x,y)|y=-x^2,x,y\in\mathbf{R}\}$

C. $\{x|-x^2\geqslant 0\}$　　D. $\{x|x^2-x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$

2. 设集合 $A=\{y|y=\sqrt{x-1}\}$，$B=\{x|y=\sqrt{x-1}\}$，则下列关系中正确的是　　(　　)

A. $A=B$　　B. $A\subseteq B$　　C. $B\subseteq A$　　D. $A\in B$

3. 设集合 $P=\{m|-1<m\leqslant 0\}$，集合 $Q=\{m|mx^2+4mx-4<0$ 对任意实数 x 恒成立，$m\in\mathbf{R}\}$，则下列关系中成立的是　　(　　)

A. $P\subseteq Q$　　B. $Q\subseteq P$　　C. $P=Q$　　D. $Q=\varnothing$

4. 已知集合 A,B,C，且 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$；若集合 $B=\{0,1,2,3,4\}$，$C=\{0,2,4,8\}$，则集合 A 中最多含有________个元素，集合 A 最多有________个子集.(用数字作答)

5. 下面 5 个关系式：①$\varnothing\subseteq\{a\}$，②$a\subseteq\{a\}$，③$\{a\}\subseteq\{a\}$，④$\{a\}\in\{a,b\}$，⑤$\{(0,0)\}=\{0\}$，其中错误写法的序号是________.

6. 如图 2-3 所示的 Venn 图中，反映的是四边形、梯形、平行四边形、菱形、正方形这五种几何图形之间的关系. 问：集合 A,B,C,D,E 分别是哪种图形的集合？

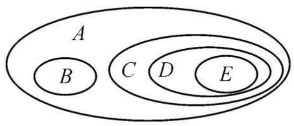


图 2-3

7. 集合 $A=\{2,3,a^2+2a-3\}$，集合 $B=\{a+3,2\}$. 若已知 $5\in A$，且 $5\notin B$，求实数 a 的值.

8. 已知集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant a\}$，集合 $B=\{y|y=2x+3,x\in A\}$，集合 $C=\{z|z=x^2,x\in A\}$，且 $C\subseteq B$，求 a 的取值范围.

9. 已知集合 $M=\{x|x=m+\frac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\}$，集合 $N=\{x|x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\}$，集合 $P=\{x|x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},p\in\mathbf{Z}\}$，请探求集合 M,N,P 之间的关系.

易错追踪

第3课　集合运算

1. 交集定义的三种不同表达方式

文字语言：一般地，由属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫作集合 A 与集合 B 的交集，记作 $A\cap B$，读作 A 交 B.

符号语言：$A\cap B=\{x|x\in A$，且 $x\in B\}$.

图形语言：交集的 Venn 图如图 3-1 所示.

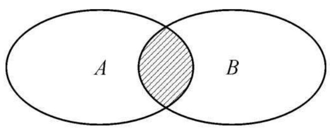


图 3-1

2. 并集定义的三种不同表达方式

文字语言：一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的并集，记作 $A\cup B$，读作 A 并 B.

符号语言：$A\cup B=\{x|x\in A$，或 $x\in B\}$.

图形语言：并集的 Venn 图如图 3-2 所示.

3. 补集定义的三种不同表达方式

文字语言：对于全集 U 的一个子集 A，由全集 U 中所有不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，简称为集合 A 的补集，记作 $\complement_U A$.

符号语言：$\complement_U A=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

图形语言：补集的 Venn 图如图 3-3 所示.

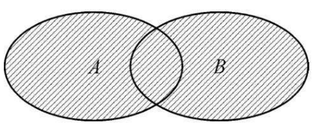


图 3-2

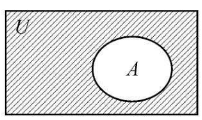


图 3-3

第 3 题　已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|-2<x<3\}$，集合 $B=\{x|x>2$，或 $x<-4\}$，

(1) $C=\{x|a<x<3a\}$，试求 a 的取值范围，使 $(A\cap B)\subseteq C$；

(2) $C=\{x|3a<x<a\}$，试求 a 的取值范围，使 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)\subseteq C$.

【分析】 回顾交集、并集、补集的运算含义，明确题中所给的条件，$A\cap B$ 就是把集合 A，B 中所给的范围在数轴上表示出来，然后找出公共部分即可. 主要考查集合的运算及推理能力. 注意分类讨论的思想在解题中的运用，在分类时要满足不重复、不遗漏的原则. 将 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$ 转化为 $\complement_U(A\cup B)$，体现了转化思想的妙用.

【解析】 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|-2<x<3\}$，$B=\{x|x>2$，或 $x<-4\}$，如图 3-4 所示，

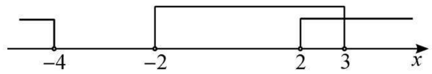


图 3-4

故 $A\cap B=\{x|2<x<3\}$，$\complement_U A=\{x|x\geqslant 3$，或 $x\leqslant -2\}$，$\complement_U B=\{x|-4\leqslant x\leqslant 2\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{x|-4\leqslant x\leqslant -2\}$，或者可以利用 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$.

(1) $C=\{x|a<x<3a\}$，$(A\cap B)\subseteq C$，可知 $a>0$，所以要使 $(A\cap B)\subseteq C$，结合数轴（如图 3-5），$\begin{cases}a>0,\\a\leqslant 2,\\3a\geqslant 3,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant a\leqslant 2$；

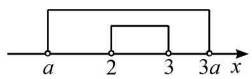


图 3-5

(2) 类似地，要使 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)\subseteq C$，必有 $\begin{cases}a<0,\\3a<-4,\\a>-2,\end{cases}$ 解得 $-2<a<-\frac{4}{3}$.

【经验分享】 某一个集合的补集必定是相对于某个特定的全集而言的. 在已知一个子集的条件下，我们也就有了两个选择，是选择从这个子集，即正面入手，还是反过来另辟蹊径，正难则反就是补集思想. 借助于 Venn 图或数轴分析集合的运算问题，使问题简捷地获得解决，将本来抽象的集合问题直观形象地表示出来，体现了数形结合思想的优越性.

学习心得

一课一练 3(答案及解析见 P80)

1. 集合 $P=\{x\in \mathbf{Z}|0\leqslant x<3\}$,集合 $M=\{x\in \mathbf{Z}|x^2\leqslant 9\}$,则 $P\cap M$ 等于 (　　)
   A. $\{1,2\}$　　B. $\{0,1,2\}$
   C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$
2. 如图 3-6,图形中的阴影部分表示的是 (　　)
   A. $(A\cup C)\cap(B\cup C)$
   B. $(A\cup B)\cap(A\cup C)$
   C. $(A\cup B)\cap(B\cup C)$
   D. $(A\cup B)\cap C$

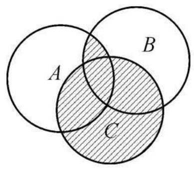


图 3-6

3. 下列表述中错误的是 (　　)
   A. 若 $A\subseteq B$,则 $A\cap B=A$
   B. 若 $A\cup B=B$,则 $A\subseteq B$
   C. $(A\cap B)\subset A\subset(A\cup B)$
   D. $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$
4. 已知集合 $A=\{y|y=-x^2+2x-1\}$,集合 $B=\{y|y=2x+1\}$,则 $A\cap B=$________.
5. 设全集 $U=\{(x,y)|x,y\in \mathbf{R}\}$,集合 $M=\left\{(x,y)\middle|\dfrac{y+2}{x-2}=1\right\}$,集合 $N=\{(x,y)|y\neq x-4\}$,那么 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=$________.
6. 已知集合 $A=\{x|x^2+ax+b=0\}$,集合 $B=\{x|x^2+cx+15=0\}$,$A\cup B=\{3,5\}$,$A\cap B=\{3\}$,则实数 $a=$________,$b=$________,$c=$________.
7. 设集合 $A=\{x|x^2+4x=0\}$,集合 $B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$,其中 $x\in \mathbf{R}$,如果 $A\cap B=B$,求实数 a 的取值范围.
8. 已知集合 $A=\{x|x^2+x-2=0\}$,集合 $B=\{x|mx+1=0\}$,且 $A\cup B=A$,求实数 m 的取值范围.
9. 设 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x|x^2+3x+2=0\}$,集合 $B=\{x|x^2+(m+1)x+m=0\}$;若 $(\complement_U A)\cap B=\varnothing$,求 m 的值.

易错追踪

第二章 函 数

第4课 函数的概念

1. 函数是建立在两个非空数集上的映射，映射是函数的本质.

2. 函数的关键要素是定义域和对应法则，其值域由定义域和对应法则唯一确定.

3. 函数的定义域即函数自变量的取值范围，在研究函数的问题时，必须树立“定义域优先”的意识.

第4题 判断下列说法是否正确，正确的画“√”，错误的画“×”.

(1)集合 $A=\mathbf{R}$，集合 $B=\{x|x>0\}$，$f:x\to y=|x|$ 为集合 A 到集合 B 的函数 ( )

(2)集合 $A=\mathbf{Z}$，集合 $B=\mathbf{Z}$，$f:x\to y=x^2$ 为集合 A 到集合 B 的函数 ( )

(3)集合 $A=\{x|x$ 是三角形$\}$，集合 $B=\{x|x$ 是圆$\}$，对应关系 f：每一个三角形的外接圆，f 是集合 A 到集合 B 的函数 ( )

(4)函数 $y=\dfrac{(x+1)(x-2)}{x+1}$ 与函数 $y=x-2$ 是同一函数 ( )

(5)$f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是同一函数 ( )

(6)$f(x)=x$ 与 $h(x)=\sqrt[3]{x^3}$ 不是同一函数 ( )

(7)函数 $y=\dfrac{(x-1)^2}{x-1}-\sqrt{1+x}$ 的定义域为 $\{x|x\geqslant-1\}$ ( )

(8)若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-2,3]$，则函数 $y=f(2x-1)$ 的定义域为 $[-2,3]$ ( )

(9)若函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-2,3)$，则函数 $f(x-2)$ 的定义域为 $[1,6)$ ( )

(10)用长为 l 的铁丝弯成下部为矩形，上部为半圆形的框架，若矩形的下底边长为 $2x$，则此框架围成的面积 y 与 x 的函数关系式为 $y=-\left(2+\dfrac{\pi}{2}\right)x^2+lx$，定义域为 $\left(0,\dfrac{l}{2+\pi}\right)$ ( )

【分析】 要判断一个对应关系是否为集合 A 到集合 B 的函数，只需要验证：①A，B 是否为非空数集；②集合 A 中任何一个元素在集合 B 中是否有唯一元素与之对应. 要判断两个函数是否相等，可以从函数的三要素入手考虑，只要定义域和对应法则相同就是同一函数，所以只要定义域和对应法则中有一个不同就不是同一个函数. 已知函数解析式求函数的定义域，主要依据：①分母不为0；②偶次根式中被开方数大于或等于0；③对于 $f(x)=x^0$，则要求 $x\neq0$；④求复合函数定义域时，$f(g(x))$ 的定义域指的是 x 的取值范围；在同一对应关系 f 的作用下，$f(x)$ 中的 x 与 $f(g(x))$ 中的 $g(x)$ 两者的取值范围应该是一致的；⑤实际问题中的函数，自变量的取值范围要使实际问题有意义.

【解析】 (1)错误. 集合 A 中的元素0在集合 B 中没有元素与之对应，所以对应关系 f 不是集合 A 到集合 B 的函数.

(2)正确. 对于集合 A 中的任意一个整数 x，按照对应关系 $f:x\to y=x^2$，在集合 B 中都有唯一一个整数 x^2 与之对应，所以对应关系 f 是集合 A 到集合 B 的函数.

(3)错误. 集合 A，B 不是数集，故不是函数.

(4)错误. 不是同一函数，因为定义域不同.

(5)错误. 不是同一函数，因为对应法则不同.

(6)错误. 是同一函数，虽然表达式不同，但是定义域和法则相同.

(7)错误. 自变量 x 应满足条件 $\begin{cases}x-1\neq0,\\1+x\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $x\geqslant-1$ 且 $x\neq1$，故函数的定义域为 $\{x|x\geqslant-1$ 且 $x\neq1\}$.

(8)错误. $f(x)$ 的定义域是 $[-2,3]$，就是指自变量 x 的取值范围是 $[-2,3]$，所以在函数 $f(2x-1)$ 中，$2x-1$ 的取值范围是 $[-2,3]$，即 $2x-1$ 满足 $-2\leqslant2x-1\leqslant3$，解得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant2$，$y=f(2x-1)$ 的定义域为 $\left[-\dfrac{1}{2},2\right]$.

(9)正确. 由 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-2,3)$ 得到 $-2\leqslant x<3$，故 $-1\leqslant x+1<4$，也就是得到 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,4)$，从而得到 $-1\leqslant x-2<4$，所以 $1\leqslant x<6$，故得到函数 $f(x-2)$ 的定义域为 $[1,6)$.

(10)正确. 由条件知，矩形的下底边长为 $2x$，即半圆的半径为 x，则半圆周长为 πx，又总长为 l，则矩形的另一边长为 $\dfrac{l-(2x+\pi x)}{2}$，所以面积为 $y=2x\cdot\dfrac{l-(2x+\pi x)}{2}+\dfrac{\pi x^2}{2}=-\left(2+\dfrac{\pi}{2}\right)x^2+lx$，因为是矩形的边长，所以满足 $2x>0$ 且 $\dfrac{l-(2x+\pi x)}{2}>0$，解得 $0<x<\dfrac{l}{2+\pi}$，所以定义域为 $\left(0,\dfrac{l}{2+\pi}\right)$.

【经验分享】 函数的定义中“任一 x”与“有唯一确定的 y”说明函数中两变量 x，y 的对应关系是“一对一”或者是“多对一”，而不能是“一对多”. 求简单函数定义域的时候要注意：第一，不要对代数式作变形后再求定义域，要在原始代数式中求其定义域；第二，将所有不等式列出后再求解；第三，研究实际问题时，要参考问题的实际意义来确定定义域.

学习心得

一课一练 4(答案及解析见 P81)

1. 下列四组函数中,表示同一函数的是 ( )

A. $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$

B. $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$

C. $f(x)=x+2, g(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

D. $f(x)=|x|, g(t)=\sqrt{t^2}$

2. 有下列四个对应关系:

①集合 $A=B=\mathbf{N}^*$,对任意的 $x\in A$, $f: x\to|x-2|$

②集合 $A=\mathbf{R}$,集合 $B=\{y|y>0\}$,对任意的 $x\in A$, $f: x\to\dfrac{1}{x^2}$

③集合 $A=B=\mathbf{R}$,对任意的 $x\in A$, $f: x\to 3x+2$

④集合 $A=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$,集合 $B=\mathbf{R}$,对任意的 $(x,y)\in A$, $f:(x,y)\to x+y$

其中能够构成从集合 A 到集合 B 的函数是 ( )

A. ①② B. ①③

C. ②③ D. ②④

3. 函数 $y=\dfrac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$ 的定义域是 ( )

A. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1|\}$ B. $\{x|x>0\}$

C. $\{x|x<-1$ 或 $x>-1\}$ D. $\{x|x<0$ 且 $x\neq-1\}$

4. 已知 $f(x)=2x+3$,则 $f(1)=$ ________, $f(a)=$ ________, $f(f(a))=$ ________.

5. 已知函数 $f(x)=x+1$,其定义域为 $\{-1,0,1,2\}$,则函数的值域为________.

6. 已知集合 $A=\{1,2,3,k\}$, $f(x)=x+1$,集合 $B=\{4,7,a^4,a^2+3a\}$, $a\in\mathbf{N}$, $k\in\mathbf{N}^*$, $x\in A$, $y\in B$, $f: x\to y=3x+1$ 是从定义域 A 到值域 B 的函数,求 a,k,A,B 的值.

7. 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$;

(2) $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$.

8. 已知函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $[0,1]$,求 $f(1-3x)$ 的定义域.

9. 如图 4-1,一灌溉渠的横断面是等腰梯形,下底宽 2 米,边坡的倾角为 45°,渠深 1.8 米.设水渠的横断面的面积为 A 平方米,水深为 h 米,试问:A 随 h 的变化如何变化?求出这两个变量间的函数关系式.

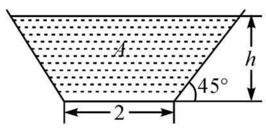


图 4-1

易错追踪

第5课　函数的值域

函数每一个自变量的取值在对应法则下都会有唯一的象,所有这些象的集合即为值域.函数的值域是函数的一个重要组成部分.

1.值域$\{y|y=f(x),x\in A\}$,在研究函数值域时,不但要重视对应法则,而且要特别注意定义域对值域的制约作用.

2.求函数的值域是没有通用方法的,因此要根据问题的不同特点,灵活选用合适的方法求解.

3.函数的最大值:设函数$y=f(x)$的定义域为I,如果存在实数M满足:①对于任意的$x\in I$,都有$f(x)\leqslant M$;②存在$x_0\in I$,使得$f(x_0)=M$,则称M是函数$y=f(x)$的最大值.类似地可定义$f(x)$的最小值.要注意的是函数不一定都有最大值和最小值.

第5题　求下列各题的值域:

(1)$y=x^2-4x+6,x\in[1,5)$;

(2)$y=x-\sqrt{x-1}(1\leqslant x\leqslant 5)$;

(3)$y=\dfrac{3x+8}{x+2}$;

(4)$y=\dfrac{x^2}{x^2+1}(x\in\mathbf{R})$.

【分析】　求函数值域的基本方法:直接法(根据定义域和对应关系给出)、换元法(可以将无理函数转化为有理函数求解)、配方法(二次函数顶点式求解);数形结合的方法(作出函数的图象求解);分离常数法(把函数整理为一个常量加上一个真分式的形式求解).例题中,(1)为二次函数在区间上的值域,可以配方后利用数形结合;(2)可以利用换元法;(3)可以分离常数;(4)可以分子、分母同时除以x^2,转化成$y=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}$,通过观察得出函数的值域.

【解析】　(1)$y=x^2-4x+6$为二次函数,配方得$y=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$,它表示的是顶点在点(2,2)、开口方向向上的抛物线,又$x\in[1,5)$,可画出它的图象,如图5-1所示,可以观察得到$f(2)\leqslant f(x)<f(5)$,而$f(2)=2,f(5)=11$;故函数的值域为$[2,11)$.

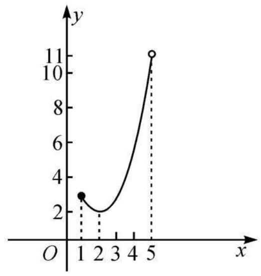


图5-1

(2)$y=x-\sqrt{x-1}(1\leqslant x\leqslant 5)$中令$t=\sqrt{x-1}$,则$x=t^2+1$,由$1\leqslant x\leqslant 5$可知$t\in[0,2]$,所以原函数即为$y=t^2+1-t=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(0\leqslant t\leqslant 2)$.当$t=\dfrac{1}{2}$时,$y_{\min}=\dfrac{3}{4}$;当$t=2$时,$y_{\max}=3$,故所求函数的值域为$\left[\dfrac{3}{4},3\right]$;

(3)因为$y=\dfrac{3x+8}{x+2}=\dfrac{3(x+2)+2}{x+2}=3+\dfrac{2}{x+2}$,且$\dfrac{2}{x+2}\neq 0$,所以$y\neq 3$,故函数的值域为$(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$;

(4)方法一:当$x=0$时,$y=0$,当$x\neq 0$时,$y=\dfrac{x^2}{x^2+1}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}$,此时,$0<y<1$,故函数的值域为$[0,1)$.

方法二(分离常数法):$\dfrac{x^2}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1-1}{x^2+1}=1-\dfrac{1}{x^2+1}$,因为$x\in\mathbf{R}$,所以$x^2\geqslant 0$,所以$x^2+1\geqslant 1$,得$0<\dfrac{1}{x^2+1}\leqslant 1$,故$0\leqslant 1-\dfrac{1}{x^2+1}<1$,所以函数的值域是$[0,1)$.

【经验分享】　求函数的值域时,要遵循定义域优先的原则.函数值域的求解方法灵活多样,在解题时需要选择适当的方法.利用换元法求函数的值域时,需要注意所设新元的取值范围.

学习心得

一课一练 5(答案及解析见 P81)

1. 下列函数中值域是$(0,+\infty)$的是　(　　)

A. $y=\sqrt{x^2-3x+1}$　　B. $y=2x+1$

C. $y=x^2+x+1$　　D. $y=\dfrac{1}{x^2}$

2. 函数 $y=\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}$的值域是　(　　)

A. $(-\infty,0)$　　B. $[1,+\infty)$

C. $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$　　D. $\mathbf{R}$

3. 函数 $y=2-\sqrt{-x^2+4x}$的值域是　(　　)

A. $[-2,2]$　　B. $[1,2]$

C. $[0,2]$　　D. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

4. 函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$的值域是____________.

5. 函数 $f(x)=x^2-2x$，$x\in[0,4]$的最大值是____________，最小值是____________.

6. 若函数 $y=f(x)$的值域是$[-2,2]$，则函数 $y=f(x+1)$的值域是____________.

7. 求下列函数的值域：

(1) $y=x-\sqrt{1-2x}$；

(2) $y=2x^2-4x+5$，$x\in[2,3]$；

(3) $y=\dfrac{x^2-x}{x^2-x-1}$；

(4) $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x-6}$，$x\in[4,6]$.

易错追踪

第6课　函数的表示方法

函数的表示方法是对函数概念的深化与延伸.解析法、图象法和列表法从三个不同的角度刻画了自变量与函数值的对应关系.

第6题　已知函数 $f(x)=\begin{cases}-2x+1, x<1,\\ x^2-2x, x\geqslant 1.\end{cases}$

(1)试比较 $f(f(-3))$ 与 $f(f(3))$ 的大小；

(2)若 $f(x)=1$，求 x 的值；

(3)画出函数 $f(x)$ 的图象；

(4)若方程 $f(x)=b$（b 为常数）有两个根，求 b 的取值范围.

【分析】　(1)自变量在不同的范围取值时，函数关系式也不同，所以由自变量求函数值时，应先判断自变量所在的范围，再对相应的函数式进行代入计算；(2)分段讨论 x 的值，再并起来；(3)先画 $x<1$ 时的图象，可描点(0,1)、(1,−1)，连线即可，要注意端点(1,−1)为"空心点"，再画 $x\geqslant 1$ 时的图象，画顶点(1,−1)及其与 x 轴的交点(2,0)，用平滑曲线连结即可；(4)根据(3)所画的图象，发现若方程 $f(x)=b$ 有两个根，则只需 $f(x)$ 的图象与直线 $y=b$ 有两个交点.

【解析】

(1) $f(f(-3))=f(7)=35$，$f(f(3))=f(3)=3$.

因为 $35>3$，所以 $f(f(-3))>f(f(3))$.

(2)若 $f(x)=1$，则 $\begin{cases}-2x+1=1,\\ x<1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2-2x=1,\\ x\geqslant 1,\end{cases}$ 解得 $x=0$ 或 $x=1+\sqrt{2}$（舍去 $x=1-\sqrt{2}$），所以 $f(0)=1$，$f(1+\sqrt{2})=1$.

(3)函数 $f(x)$ 的图象如图6-1所示：

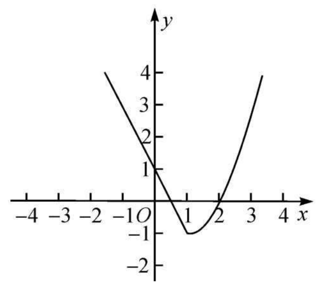


图 6-1

(4)若方程 $f(x)=b$ 有两个根，即函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=b$ 有两个交点，如图6-2所示，只需 $b>f(1)$，所以 $b>-1$.

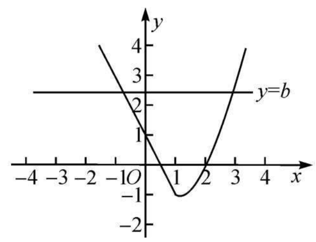


图 6-2

【经验分享】　分段函数指的是在定义域的不同部分，有不同的对应法则的函数.对分段函数应有以下两点基本认识：(1)分段函数是一个函数，不要把它误认为是几个函数；(2)分段函数的定义域是各段定义域的并集，值域是各段值域的并集，尤其求分段函数的值域，关键在于"对号入座"，即看清待求函数值的自变量所在区域，再代入相应式子即可.若 $f(x)$ 为分段函数，要解方程 $f(x)=b$（b 为常数），则需要求出各段上的解，然后再合并；也可以画出分段函数 $f(x)$ 和 $y=b$ 的图象，结合图象看交点，但这种方法只适用于判断解的个数.

学习心得