浙大优学
一题一课

刷百题不如解透一题

低年级同步课后提升 / 毕业班专题自主复习

一题一课
高中数学

YITI YIKE
GAOZHONG SHUXUE

主　　编　惠红民
本册主编　高　斌

解析几何

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

一题一课

高中数学(解析几何)

主　　编　惠红民

本册主编　高　斌

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

一题一课. 高中数学. 解析几何 / 惠红民主编. —
杭州：浙江大学出版社，2016. 6
ISBN 978-7-308-15671-4

Ⅰ. ①一… Ⅱ. ①惠… Ⅲ. ①解析几何课—高中—题
解 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 054084 号

一题一课. 高中数学(解析几何)

主编　惠红民

策　　划　陈海权(电子信箱：chess332@163. com)
责任编辑　夏晓冬
责任校对　金佩雯　陈　宇
封面设计　林智广告
出版发行　浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址：http://www. zjupress. com)
排　　版　杭州星云光电图文制作有限公司
印　　刷　浙江省邮电印刷股份有限公司
开　　本　889mm×1194mm　1/16
印　　张　6. 25
字　　数　240 千
版 印 次　2016 年 6 月第 1 版　2016 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-15671-4
定　　价　14. 80 元

浙江大学出版社发行中心联系方式：0571－88925591；http://zjdxcbs. tmall. com

目　　录

刷百题不如解透一题

“学习解题的最好方法之一就是研究例题”

解题，无疑是学好数学的最佳途径. 于是，刷题风起，题海浪涌，一时间，必刷题、必做题、高频题、母题等，不一而足. 以为刷题是学习数学的魔方，题海则是成就学霸的金丹！固然，学习数学离不开解题，但沉溺题海并不意味着能考好数学，不如通过分析典型例题的解题过程来学会解题更加简短有效。

“题不在多，但求精彩”

“千淘万漉虽辛苦，吹尽狂沙始到金。”直白地表达出我们在“一题一课”系列的“一题”即例题选取上的态度与倾向。每一道例题不仅体现对概念的理解与思考价值，还体现知识与方法的代表性；每一道例题不仅解析精到、解法充满活力，更通过思维拓展，借题发挥，探索其中的内在规律和方法，达成“做一题，通一类，会一片”的目标 。

“多刷题，不如多反思”

“学而不思则罔，思而不学则殆。”做题需要产生效果、追求效益。**种种经验表明：题不是刷的越多越好，如果缺乏解题反思，不但浪费时间，甚至误导学习。**因此，本书在写作体例与排版上都突出了反思的意义与重要性，反思的过程既是对数学知识和解题方法的理解与强化的过程，也是学生内化解题能力的过程。

“解题是一种实践性的技能，就像游泳、滑雪或弹钢琴一样，只能通过模仿、练习和钻研才能占为己有”

例题帮助学生理解并学会运用同步教材所学知识及技能，然后通过变式练习（一课一练）内化落实，既满足低年级同步自主学习，又满足毕业班专题自主复习。

如果您是学生，请加入“一题一课学习交流”QQ群(205743216)，我们一起学习、提高；如果您是老师，请加入“一题一课教师研讨”QQ群(529481589)，我们一起研讨、探索。

“学习的本质，不在于记住哪些知识，而在于它触发了你的思考。”学习数学的道路上，祝愿您学会思考，体会成功！刷百题不如解透一题，“一题一课”系列图书还有哪些分册，请看本书封底。

第一章　平面解析几何初步

第1课　直线的倾斜角、斜率

当直线 l 与 x 轴相交时，取 x 轴作为基准，x 轴正向与直线 l 向上方向之间所成的角 α 叫做直线 l 的倾斜角.

一条直线的倾斜角 $\alpha(\alpha\neq 90^\circ)$ 的正切值叫做这条直线的斜率，斜率常用小写字母 k 表示，即 $k=\tan\alpha$，一条直线 l 的倾斜角 α 一定存在，但是斜率 k 不一定存在.

给定两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$x_1\neq x_2$，用两点的坐标来表示直线 P_1P_2 的斜率：$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

直线倾斜角和斜率是解析几何的重要概念之一，是刻画直线倾斜程度的几何要素与代数表示，是在平面直角坐标系内以坐标法(解析法)的方式来研究直线及其几何性质(如直线位置关系、交点坐标、点到直线距离等)的基础.

第1题　(1)若直线 $l:y=kx-\sqrt{3}$ 与直线 $2x+3y-6=0$ 的交点位于第一象限，则直线 l 的倾斜角的取值范围是　(　　)

A. $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$　　B. $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$

C. $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$　　D. $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$

(2)直线 l 经过点 $A(1,2)$，在 x 轴上的截距的取值范围是 $(-3,3)$，则其斜率的取值范围是　(　　)

A. $-1<k<\dfrac{1}{5}$　　B. $k<\dfrac{1}{2}$ 或 $k>1$

C. $k<-1$ 或 $k>\dfrac{1}{5}$　　D. $k<-1$ 或 $k>\dfrac{1}{2}$

【分析】　(1)确定直线 l 过定点 $(0,-\sqrt{3})$，结合图象找到满足条件的直线 l 所在区域，利用区域的边界过得直线 l 的斜率取值范围.

(2)直线 l 在 x 轴上的截距的取值范围是 $(-3,3)$，对应的点分别是 $B_1(-3,0)$，$B_2(3,0)$，找到直线 AB_1，AB_2 的位置并确定这两条直线的斜率，直线 l 位于直线 AB_1 与 AB_2 所夹的区域内，根据直线 l 的倾斜角的变化确定直线 l 斜率的取值范围.

【解析】　(1)由题意可作两条直线的图象，如图1所示，

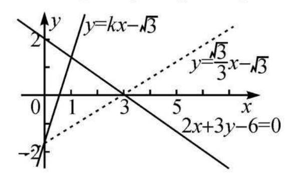


图1

从图中可以看出，直线 l 的倾斜角的取值范围为 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

答案　B

(2)设直线 l 的斜率为 k，因为直线 l 在 x 轴上的截距的取值范围是 $(-3,3)$，

对应的点分别是 $B_1(-3,0)$，$B_2(3,0)$，连结 AB_1，AB_2，所以由点 $A(1,2)$，$B_1(-3,0)$，$B_2(3,0)$ 得

直线 AB_1 的斜率 $k_1=\dfrac{2-0}{1+3}=\dfrac{1}{2}$，

直线 AB_2 的斜率 $k_2=\dfrac{2-0}{1-3}=-1$.

答案　D

【经验分享】　求直线的倾斜角与斜率常运用数形结合思想.当直线的倾斜角由锐角变到直角及由直角变到钝角时，需根据正切函数 $y=\tan\alpha$ 的单调性求 k 的范围，数形结合是解析几何中的重要方法.

学习心得

一课一练 1(答案及解析见 P74)

1. 有下列命题:
①若直线的斜率存在,则必有倾斜角与之对应;
②若直线的倾斜角存在,则必有斜率与之对应;
③坐标平面上所有的直线都有倾斜角;
④坐标平面上所有的直线都有斜率.
其中错误的是 (　　)
A. ①②　　B. ③④
C. ①③　　D. ②④

2. 直线 l 经过原点和点 $(-1,-1)$,则它的倾斜角是 (　　)
A. $45°$　　B. $135°$
C. $135°$或 $225°$　　D. $0°$

3. 已知直线 $y=kx+b$,当 $k>0,b<0$ 时,此直线不经过的象限是 (　　)
A. 第一象限　　B. 第二象限
C. 第三象限　　D. 以上都不是

4. 若 $A(-2,3)$,$B(3,-2)$,$C\left(\frac{1}{2},m\right)$三点共线,则 m 的值为 (　　)
A. -2　　B. 2
C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

5. 点 $(1,3)$,$(5,7)$和 $(10,12)$的位置关系是 (　　)
A. 在同一条直线上
B. 三点间的距离两两相等
C. 三点连线组成一个直角三角形
D. 三点连线组成一个等边三角形

6. 斜率为 2 的直线过 $(3,5)$,$(a,7)$,$(-1,b)$三点,则 $a+b$ 等于 (　　)
A. 4　　B. -7
C. 1　　D. -1

7. 过点 $M(-2,m)$,$N(m,4)$的直线的倾斜角为 $90°$,则 m 的值为 (　　)
A. -2　　B. 4
C. 2　　D. -4

8. 若直线 l 经过第二、四象限,则直线 l 的倾斜角的范围是 (　　)
A. $[0°,90°)$　　B. $[90°,180°)$
C. $(90°,180°)$　　D. $[0°,180°)$

9. 若过点 $P(1,1)$、$Q(3,2a)$的直线的倾斜角为钝角,则实数 a 的取值范围是________.

10. 如图 2 所示,直线 l_1,l_2,l_3,l_4 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3,k_4,则斜率从小到大的关系是________.

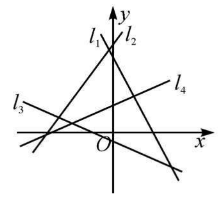


图 2

11. 已知点 A 的坐标为 $(3,4)$,在坐标轴上有一点 B,若 $k_{AB}=2$,则 B 点的坐标为________.

12. 已知点 $M(2,-3)$,$N(-3,-2)$,直线 l 过点 $P(1,1)$且与线段 MN 相交,求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

易错追踪

第 2 课　直线的方程

直线方程的几种特殊形式都有其使用的局限性，在解题过程中要能够根据不同的题设条件，灵活选用恰当的直线形式求直线方程. 请参看下表：

直线形式	直线方程	局限性	选择条件
点斜式	$y-y_0=k(x-x_0)$	不能表示与 x 轴垂直的直线	已知一个定点和斜率 k 已知一点，可设点斜式方程
斜截式	$y=kx+b$	不能表示与 x 轴垂直的直线	已知在 y 轴上的截距 已知斜率，可设斜截式方程
两点式	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$	不能表示与 x 轴、y 轴垂直的直线	已知两个定点
截距式	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	不能表示与 x 轴、y 轴垂直，且过原点的直线	已知两个截距 已知直线与坐标轴围成三角形的面积问题可设截距式方程
一般式	$Ax+By+C=0$（A、B 不全为零）	能表示所有的直线	求直线方程的最后结果均可以化为一般式方程

第 2 题　(1)设直线 l 的方程为 $(a+1)x+y+2-a=0(a\in\mathbf{R})$. ①若直线 l 在两坐标轴上的截距相等，求直线 l 的方程；②若直线 l 不经过第二象限，求实数 a 的取值范围.

(2)已知直线 $l:kx-y+1+2k=0$. ①证明：直线 l 过定点；②若直线 l 交 x 轴负半轴于点 A，交 y 轴正半轴于点 B，$\triangle AOB$ 的面积为 S，试求 S 的最小值并求此时直线 l 的方程.

【分析】　第(1)题由直线的一般方程求得直线的截距、斜率，并根据直线满足的几何条件构造不等式求实数 a 的取值范围.

第(2)题由 A，B 两点坐标表示三角形的边长及面积，利用均值定理求最值.

【解析】　(1)①令 $x=0$，得 $y=a-2$.

令 $y=0$，得 $x=\frac{a-2}{a+1}(a\neq-1)$.

因为直线 l 在两坐标轴上的截距相等，

所以 $a-2=\frac{a-2}{a+1}$，

解得 $a=2$ 或 $a=0$.

所以所求的直线 l 的方程为 $3x+y=0$ 或 $x+y+2=0$.

②直线 l 的方程可化为 $y=-(a+1)x+a-2$.

因为直线 l 不过第二象限，

所以 $\begin{cases}-(a+1)\geqslant 0,\\ a-2\leqslant 0,\end{cases}$

所以 $a\leqslant -1$.

所以 a 的取值范围为 $(-\infty,-1]$.

(2)①由已知得 $k(x+2)+(1-y)=0$，

所以无论 k 取何值，直线过定点 $(-2,1)$.

②令 $y=0$，得 A 点的坐标为 $(-2-\frac{1}{k},0)$，

令 $x=0$，得 B 点的坐标为 $(0,2k+1)(k>0)$，

$$
\begin{aligned}
\text{所以 } S_{\triangle AOB}&=\frac{1}{2}\left|-2-\frac{1}{k}\right|\cdot|2k+1|\\
&=\frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{k}\right)(2k+1)\\
&=\frac{1}{2}\left(4k+\frac{1}{k}+4\right)\\
&\geqslant\frac{1}{2}(4+4)=4
\end{aligned}
$$

当且仅当 $4k=\frac{1}{k}$，即 $k=\frac{1}{2}$ 时取等号.

即 $\triangle AOB$ 的面积的最小值为 4，

此时直线 l 的方程为 $\frac{1}{2}x-y+1+1=0$，

即 $x-2y+4=0$.

【经验分享】　本题考查直线的一般方程、直线的截距、斜率的概念及几何意义. 解题时应用数形结合的方法，分析直线满足的几何条件并将几何条件代数化，构造函数、不等式求解.

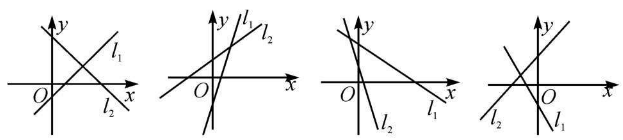
学习心得

一课一练 2（答案及解析见 P74）

1. 已知 $m\neq0$，则过点 $(1,-1)$ 的直线 $ax+3my+2a=0$ 的斜率为　　（　　）

A. 3　　B. -3　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

2. 直线 l_1：$ax-y+b=0$，l_2：$bx+y-a=0$ $(ab\neq0)$ 的图象只可能是　　（　　）



A　　B　　C　　D

3. 若直线 $(2t-3)x+y+6=0$ 不经过第一象限，则 t 的取值范围是________.

4. 若直线 $(m+1)x+(m^2-m-2)y=m+1$ 在 y 轴上的截距等于 1，求实数 m 的值.

5. 求证：不论 m 为何实数值，直线 $(2m-1)x-(m+3)y-(m-11)=0$ 恒过定点，并求出此定点坐标.

6. 已知△ABC 的三个顶点分别为 $A(-3,0)$，$B(2,-2)$，$C(0,1)$，求这个三角形的三条边各自所在直线的方程.

易错追踪

第3课 两条直线的位置关系(一)

在平面直角坐标系中,研究怎样用直线的方程来判断两条直线的位置关系,体现了解析几何用方程研究曲线的基本思想.

两条直线平行的判定

(1)$l_1 /\!/ l_2$,说明两直线l_1与l_2的倾斜角相等,当倾斜角都不等于90°时,有$k_1=k_2$;

当倾斜角都等于90°时,斜率都不存在.

(2)当$k_1=k_2$时,说明两直线l_1与l_2平行或重合.

两条直线垂直的判定

(1)当两直线l_1与l_2的斜率都存在时,有$k_1 \cdot k_2=-1 \Leftrightarrow l_1 \perp l_2$;当一条直线的斜率为0,另一条直线的斜率不存在时,也有$l_1 \perp l_2$.

(2)若$l_1 \perp l_2$,则有$k_1 \cdot k_2=-1$或一条直线斜率不存在,同时另一条直线的斜率为零.

判断两条直线平行或垂直时,要注意分斜率存在与不存在两种情况作答.

第3题 (1)下列说法中正确的有 ( )

①若两条直线的斜率相等,则两直线平行.

②若$l_1 /\!/ l_2$,则$k_1=k_2$.

③若两直线中有一条直线的斜率不存在,另一条直线的斜率存在,则两直线相交.

④若两条直线的斜率都不存在,则两直线平行.

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

(2)过点(1,0)且与直线$x-2y-2=0$平行的直线方程是 ( )

A. $x-2y-1=0$ B. $x-2y+1=0$

C. $2x+y-2=0$ D. $x+2y-1=0$

(3)已知直线$(a-2)x+ay-1=0$与直线$2x+3y+5=0$平行,则a的值为 ( )

A. -6 B. 6 C. $-\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

(4)已知直线l_1的斜率$k_1=\frac{3}{4}$,直线l_2经过点$A(3a,-2)$,$B(0,a^2+1)$,且$l_1 \perp l_2$,求实数a的值.

【分析】 判定两条直线的位置关系是否平行或相交时,一定要考虑特殊情况.

已知l_1的斜率存在,又$l_1 \perp l_2$,所以l_2的斜率也应存在.设为k_2,则由$k_1 \cdot k_2=-1$,可得关于a的方程,解方程即可.

【解析】 (1)在①中,当$k_1=k_2$时,两直线平行或重合,所以①不成立.

在②中,斜率可能不存在,所以不成立.

在④中,两直线也可能重合,所以不成立.

因此,只有③正确.

答案 A

(2)方法一:所求直线斜率为$\frac{1}{2}$,过点(1,0),

由点斜式得$y=\frac{1}{2}(x-1)$,即$x-2y-1=0$.

方法二:设所求直线方程为$x-2y+b=0$,

因为过点(1,0),所以$b=-1$.

答案 A

(3)由$3(a-2)-2a=0$,得$a=6$,经检验知当$a=6$时,两直线平行.

答案 B

(4)设直线l_2的斜率为k_2,

$k_2=\frac{a^2+1-(-2)}{0-3a}=-\frac{a^2+3}{3a}$.

因为$l_1 \perp l_2$,$k_1=\frac{3}{4}$,

所以$k_1 \cdot k_2=-1$,

所以$\frac{3}{4}\times\frac{a^2+3}{3a}=1$,

即$a^2-4a+3=0$,

解得$a=1$或$a=3$.

【经验分享】 判定两条直线的位置关系时,一定要考虑特殊情况,如两直线重合、斜率不存在等.一般情况都成立,只要有一种特殊情况不成立,则该命题就是假命题.

学习心得

一课一练 3(答案及解析见 P74)

1. 已知过点 $A(-2,m)$ 和 $B(m,4)$ 的直线与斜率为 -2 的直线平行，则 m 的值是　(　　)

A. -8　　B. 0　　C. 2　　D. 10

2. 若直线 l 经过点 $(a-2,-1)$ 和 $(-a-2,1)$，且与经过点 $(-2,1)$、斜率为 $-\frac{2}{3}$ 的直线垂直，则实数 a 的值是　(　　)

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{3}{2}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

3. 点 $P(2,5)$ 关于直线 $x+y=0$ 的对称点的坐标是(　　)

A. $(5,2)$　　B. $(2,-5)$

C. $(-5,-2)$　　D. $(-2,-5)$

4. 直线 l_1 的倾斜角为 $45°$，直线 l_2 过点 $A(-2,-1)$，$B(3,4)$，则 l_1 与 l_2 的位置关系为________.

5. 直线 l_1，l_2 的斜率分别是方程 $x^2-3x-1=0$ 的两根，则 l_1 与 l_2 的位置关系是________.

6. 已知直线 l_1 经过点 $A(0,-1)$ 和点 $B\left(\frac{4}{a},1\right)$，直线 l_2 经过点 $M(1,1)$ 和点 $N(0,-2)$，若 l_1 与 l_2 没有公共点，则实数 $a=$________.

7. 已知点 $A(1,0)$，$B(3,2)$，$C(0,4)$，点 D 满足 $AB\perp CD$，且 $AD/\!/BC$，求点 D 的坐标.

8. 已知直线 l_1 经过点 $A(3,a)$，$B(a-2,-3)$，直线 l_2 经过点 $C(2,3)$，$D(-1,a-2)$，如果 $l_1\perp l_2$，求 a 的值.

9. 在平行四边形 $ABCD$ 中，点 $A(1,2)$，$B(5,0)$，$C(3,4)$.

(1)求点 D 的坐标；

(2)试判定平行四边形是否为菱形.

易错追踪

第 4 课　两条直线的位置关系(二)

直线 l_1:$A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 l_2:$A_2x+B_2y+C_2=0$,如何判断这两条直线的关系?我们从点与直线的位置关系入手研究两条直线的位置关系.

几何元素及关系	代数表示
点 A	$A(a,b)$
直线 l	l:$Ax+By+C=0$
点 A 在直线 l 上	$Aa+Bb+C=0$
直线 l_1 与 l_2 的交点 A	$\begin{cases}A_1a+B_1b+C_1=0\\A_2a+B_2b+C_2=0\end{cases}$

两条直线的交点就是求它们的方程的公共解,将两条直线位置关系的问题转化为相应的二元一次方程组的解的个数问题,由此得出两条直线的三种位置关系:相交、平行、重合,对于相应的二元一次方程组就是:有唯一解、无解、无数多个解.

第 4 题　直线 l 被两条直线 l_1:$4x+y+3=0$ 和 l_2:$3x-5y-5=0$ 截得的线段的中点为 $P(-1,2)$,求直线 l 的方程.

【分析】　方法一:设直线 l 与 l_1 的交点为 A,直线 l 与 l_2 的交点为 B,利用直线 l 与直线 l_1:$4x+y+3=0$ 和 l_2:$3x-5y-5=0$ 的交点关于中点 $P(-1,2)$ 对称的特征,设 A 点坐标,用中点 P 及点 A 的坐标表示点 B 的坐标,再将 A 点坐标、B 点坐标代入直线方程解得 A 点坐标,最后由点 A、点 P 求得直线方程.

方法二:设出直线 l 的方程,分别与直线 l_1:$4x+y+3=0$ 和 l_2:$3x-5y-5=0$ 联立解方程组,得到两个交点坐标,再结合中点公式求出直线 l 的斜率.

方法三:利用直线 l_1:$4x+y+3=0$ 和 l_2:$3x-5y-5=0$ 关于点 P 对称的直线方程与直线 l_1,l_2 的交点在直线 l 上的这一特性求解.

【解析】　方法一:设直线 l 与 l_1 的交点为 $A(x_0,y_0)$,由已知条件,得直线 l 与 l_2 的交点为 $B(-2-x_0,4-y_0)$,并且满足

$$\begin{cases}4x_0+y_0+3=0,\\3(-2-x_0)-5(4-y_0)-5=0,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x_0=-2,\\y_0=5,\end{cases}$

因此直线 l 的方程为 $\dfrac{y-2}{5-2}=\dfrac{x-(-1)}{-2-(-1)}$,

即 $3x+y+1=0$.

方法二:设直线 l 的方程为 $y-2=k(x+1)$,

即 $kx-y+k+2=0$.

由 $\begin{cases}kx-y+k+2=0,\\4x+y+3=0\end{cases}$ 得 $x=\dfrac{-k-5}{k+4}$.

由 $\begin{cases}kx-y+k+2=0,\\3x-5y-5=0\end{cases}$ 得 $x=\dfrac{-5k-15}{5k-3}$.

由中点公式得 $\dfrac{-k-5}{k+4}+\dfrac{-5k-15}{5k-3}=-2$,

解得 $k=-3$,

因此所求直线方程为 $y-2=-3(x+1)$,

即 $3x+y+1=0$.

方法三:两直线 l_1 和 l_2 的方程为

$(4x+y+3)(3x-5y-5)=0$　①

将上述方程中 (x,y) 换成 $(-2-x,4-y)$,

整理可得 l_1 与 l_2 关于点 $(-1,2)$ 对称图形的方程,

即 $(4x+y+1)(3x-5y+31)=0$　②

由①−②整理得 $3x+y+1=0$.

【经验分享】　两直线的交点与二元一次方程组的解的相互关系可引导学生将两直线交点的求解问题转化为相应的直线方程构成的二元一次方程组求解的问题.由此体会"形"的问题由"数"的运算来解决.

学习心得

一课一练 4(答案及解析见 P75)

1. 若三条直线：$2x+3y+8=0$，$x-y=0$ 和 $x+ky+\frac{4}{5}=0$ 相交于一点，则 k 的值等于（　　）

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

2. 已知方程 $a|x|-y=0$ 和 $x-y+a=0(a>0)$ 所确定的曲线有两个交点，则 a 的取值范围是（　　）

A. $a>0$　　B. $0<a<1$ 或 $a>1$

C. $a>1$　　D. $0<a<1$

3. 两直线 $ax+y-4=0$ 与 $x-y-2=0$ 相交于第一象限，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $-1<a<2$　　B. $a>-1$

C. $a<2$　　D. $a<-1$ 或 $a>2$

4. 如果 $\{(x,y)|ax+y+b=0\}\cap\{(x,y)|x+ay+1=0\}=\varnothing$，则（　　）

A. $a=1$ 且 $b\neq1$

B. $a=1$ 且 $b\neq-1$

C. $a=\pm1$ 且 $b\neq\pm1$

D. $a=1$ 且 $b\neq1$ 或 $a=-1$ 且 $b\neq-1$

5. 直线 $3x+4y-2=0$ 和 $2x+y+2=0$ 的交点坐标为________.

6. 已知点 $P(-3,-1)$，$Q(4,6)$，线段 PQ 与直线 $3x+2y-5=0$ 交于点 M，则点 M 分 PQ 的比为________.

7. 两条直线 $l_1:2x+3y-k=0$ 和 $l_2:x-ky+12=0$ 的交点在 y 轴上，则 $k=$________.

8. 经过直线 $l_1:x+3y+5=0$ 和 $l_2:x-2y+7=0$ 的交点及 $A(2,1)$ 的直线 l 的方程是________.

9. 已知菱形 $ABCD$ 的相对顶点 $A(1,-2)$，$C(-2,-3)$，则对角线 BD 所在的直线方程为________.

10. 已知直线 l_1 过 $P_1(0,-1)$，$P_2(2,0)$ 两点，直线 $l_2:x+y-1=0$，求 l_1 与 l_2 的交点坐标.

11. 求过直线 $x-2y+4=0$ 和 $x+y-2=0$ 的交点，且满足下列条件的直线的方程.

(1)过点 $(2,1)$；

(2)和直线 $3x-4y+5=0$ 垂直.

12. 求与直线 $4x-3y+5=0$ 垂直，并且与两坐标轴围成的三角形的面积等于 24 的直线方程.

易错追踪

第 5 课　点到直线的距离

点到直线的距离公式的推导过程,体现的是化归思想的应用,进一步展示了用以上方法研究几何问题的方法.从运动变化的观点看,点到直线的距离是直线上的点与直线外一点的连线的最短距离.

点到直线的距离公式是《直线的方程》这一节的最后一个内容.《直线的方程》这一节主要研究的是点线、线线的位置关系和度量关系,其中以点点距离、点线距离、线线位置的关系为重点,点到直线的距离是其中重要的一个环节,它是解决其他解析几何问题的基础.

在平面直角坐标系中,点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离公式为 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

第 5 题　已知直线 $l_1:2x-y+a=0(a>0)$,$l_2:-4x+2y+1=0$ 和 $l_3:x+y-1=0$,且 l_1 与 l_2 的距离是 $\frac{7}{10}\sqrt{5}$.

(1)求 a 的值;

(2)能否找到一点 P,使得 P 点同时满足下列三个条件:①P 是第一象限的点;②P 点到直线 l_1 的距离是 P 点到直线 l_2 的距离的 $\frac{1}{2}$;③P 点到直线 l_1 的距离与 P 点到直线 l_3 的距离之比是 $\sqrt{2}:\sqrt{5}$.若能,求 P 点坐标;若不能,说明理由.

【分析】　第二问直接设点 P 的坐标,代入点线距离公式构造关于点 P 坐标的方程组求解.

【解析】　(1)直线 l_2 的方程可化为 $2x-y-\frac{1}{2}=0$,

所以 l_1 与 l_2 的距离 $d=\dfrac{\left|a-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$.

所以 $\dfrac{\left|a+\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{10}$,$\left|a+\frac{1}{2}\right|=\frac{7}{2}$.

因为 $a>0$,所以 $a=3$.

(2)假设存在点 P,设点 $P(x_0,y_0)$.

若点 P 满足条件②,则点 P 在与直线 l_1,l_2 平行的直线 $l':2x-y+C=0$ 上,

且 $\dfrac{|C-3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\left|C+\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{5}}$,即 $C=\frac{13}{2}$,或 $C=\frac{11}{6}$,

所以 $2x_0-y_0+\frac{13}{2}=0$,或 $2x_0-y_0+\frac{11}{6}=0$.

若点 P 满足条件③,由点到直线的距离公式,

有 $\dfrac{|2x_0-y_0+3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{|x_0+y_0-1|}{\sqrt{2}}$,

即 $|2x_0-y_0+3|=|x_0+y_0-1|$,

所以 $x_0-2y_0+4=0$ 或 $3x_0+2=0$;

由于点 P 在第一象限,

所以 $3x_0+2=0$ 不可能.

联立方程 $\begin{cases}2x_0-y_0+\frac{13}{2}=0,\\x_0-2y_0+4=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_0=-3,\\y_0=\frac{1}{2},\end{cases}$ 应舍去.

由 $\begin{cases}2x_0-y_0+\frac{11}{6}=0,\\x_0-2y_0+4=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_0=\frac{1}{9},\\y_0=\frac{37}{18}.\end{cases}$

所以存在点 $P\left(\frac{1}{9},\frac{37}{18}\right)$ 同时满足题中所述三个条件.

【经验分享】　点到直线的距离公式应用广泛,有的是直接应用,而有的暗含在题目的条件或结论里,要注意转化.例如:点 P 在直线 $x+y-4=0$ 上,求 x^2+y^2 的最小值.x^2+y^2 可以看成原点 O 到直线的距离的平方,当 OP 与直线垂直时距离最小,因此转化为原点到直线的距离问题.

学习心得

一课一练 5(答案及解析见 P75)

1. 点 P 在直线 $3x+y-5=0$ 上,且点 P 到直线 $x-y-1=0$ 的距离为$\sqrt{2}$,则点 P 坐标为 (　　)

A. (1,2)　　B. (2,1)

C. (1,2)或(2,−1)　　D. (2,1)或(−1,2)

2. 若点 $A(3,-4)$与点 $A'(5,8)$关于直线 l 对称,则直线 l 的方程为 (　　)

A. $x+6y+16=0$　　B. $6x-y-22=0$

C. $6x+y+16=0$　　D. $x+6y-16=0$

3. 点$(4,t)$到直线 $4x-3y=1$ 的距离不大于 3,则 t 的取值范围是 (　　)

A. $\frac{1}{3}\leqslant t\leqslant\frac{31}{3}$　　B. $0<t<10$

C. $0\leqslant t\leqslant 10$　　D. $t<0$ 或 $t>10$

4. 夹在两平行直线 $l_1:3x-4y=0$ 与 $l_2:3x-4y-20=0$ 之间的圆的最大面积等于 (　　)

A. 2π　　B. 4π

C. 8π　　D. 12π

5. 已知实数 x,y 满足 $2x+y+5=0$,那么 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的最小值为 (　　)

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{10}$

C. $2\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{10}$

6. 与直线 $7x+24y-5=0$ 平行,并且距离等于 3 的直线方程是________.

7. 与直线 $x-y-2=0$ 平行,且它们之间的距离为 $2\sqrt{2}$ 的直线方程是________.

8. 若点(1,1)到直线 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=2$ 的距离为 d,则 d 的最大值是________.

9. 已知直线 $l:3x-y+3=0$,求

(1)点 $P(4,5)$关于直线 l 的对称点;

(2)直线 $x-y-2=0$ 关于直线 l 对称的直线方程.

10. 在直线 $l:3x-y-1=0$ 上求一点 P,使得

(1)点 P 到点 $A(4,1)$和点 $B(0,4)$的距离之差最大;

(2)点 P 到点 $A(4,1)$和点 $C(3,4)$的距离之和最小.

易错追踪

第6课　对称问题

曲线关于点(中心),直线(轴)的对称问题的一般思想是用代入转移法.

(1)曲线 $f(x,y)=0$ 关于点 $A(a,b)$ 的对称曲线的方程是 $f(2a-x,2b-y)=0$,

(2)曲线 $f(x,y)=0$ 关于直线 $Ax+By+c=0$ 的对称曲线的求法:

设所求曲线上任一点 $P(x,y)$ 关于直线 $Ax+By+c=0$ 的对称点 $P_0(x_0,y_0)$,在已知曲线 $f(x,y)=0$ 上,由两点关于直线对称的解法,求得 x_0,y_0,代入 $f(x_0,y_0)=0$,即得对称曲线方程.

第6题　求直线 $a:2x+y-4=0$ 关于直线 $l:3x+4y-1=0$ 对称的直线 b 的方程.

【分析】 由平面几何知识可知,若直线 a,b 关于直线 l 对称,它们具有下列几何性质:(1)若直线 a,b 相交,则 l 是直线 a,b 交角的平分线;(2)若点 A 在直线 a 上,那么点 A 关于直线 l 的对称点 B 一定在直线 b 上,这时 $AB\perp l$,并且 AB 的中点 D 在直线 l 上;(3)点 a 以直线 l 为轴旋转 $180°$,一定与直线 b 重合.使用这些性质,可以找出直线 b 的方程.解此题的方法有很多,总的来说有两类:一类是找出确定直线方程的两个条件,选择适当的直线方程的形式,求出直线方程;另一类是直接由轨迹求方程.

【解析】 由 $\begin{cases}2x+y-4=0,\\3x+4y-1=0\end{cases}$

解得直线 a 与直线 l 的交点为 $E(3,-2)$,E 点也在直线 b 上.

方法一:设直线 b 的斜率为 k,又知直线 a 的斜率为 -2,直线 l 的斜率为 $-\frac{3}{4}$,

则 $\dfrac{-\frac{3}{4}-(-2)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\times(-2)}=\dfrac{k-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+k\left(-\frac{3}{4}\right)}$,

解得 $k=-\frac{2}{11}$.代入点斜式得直线 b 的方程为

$y-(-2)=-\frac{2}{11}(x-3)$,

即 $2x+11y+16=0$.

方法二:在直线 $a:2x+y-4=0$ 上找到一点 $A(2,0)$,设点 A 关于直线 l 的对称点 B 的坐标为 (x_0,y_0),

由 $\begin{cases}3\cdot\frac{2x_0}{2}+4\cdot\frac{0+y_0}{2}-1=0,\\\frac{y_0-0}{x_0-2}=\frac{4}{3}\end{cases}$

解得 $B\left(\frac{4}{5},-\frac{8}{5}\right)$.

由两点式得直线 b 的方程为

$\dfrac{y-(-2)}{-2-\left(-\frac{8}{5}\right)}=\dfrac{x-3}{3-\frac{4}{5}}$,即 $2x+11y+16=0$.

方法三:设直线 b 上的动点 $P(x,y)$ 关于直线 $l:3x+4y-1=0$ 的对称点 $Q(x_0,y_0)$,则有

$\begin{cases}3\cdot\frac{x+x_0}{2}+4\cdot\frac{y+y_0}{2}-1=0,\\\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{4}{3},\end{cases}$

解得 $x_0=\dfrac{7x-24y+6}{25}$,$y_0=\dfrac{-24x-7y+8}{25}$.

点 $Q(x_0,y_0)$ 在直线 $a:2x+y-4=0$ 上,

则 $2\times\dfrac{7x-24y+6}{25}+\dfrac{-24x-7y+8}{25}-4=0$,

化简得 $2x+11y+16=0$ 是所求直线 b 的方程.

方法四:设直线 b 上的动点 $P(x,y)$,直线 a 上的点 $Q(x_0,4-2x_0)$,且 P,Q 两点关于直线 $l:3x+4y-1=0$ 对称,则有

$\begin{cases}\frac{|3x+4y-1|}{5}=\frac{|3x_0+4(4-2x_0)-1|}{5},\\\frac{y-(4-2x_0)}{x-x_0}=\frac{4}{3},\end{cases}$

消去 x_0,得 $2x+11y+16=0$ 或 $2x+y-4=0$(舍).

【经验分享】 方法一、二是除了点 E 外,分别找出确定直线位置的另一个条件:斜率或另一个点,然后用点斜式或两点式求出方程.

方法三、四是利用直线上动点的几何性质,直接由轨迹求方程,在使用这种方法时,要注意区分动点坐标及参数.

学习心得