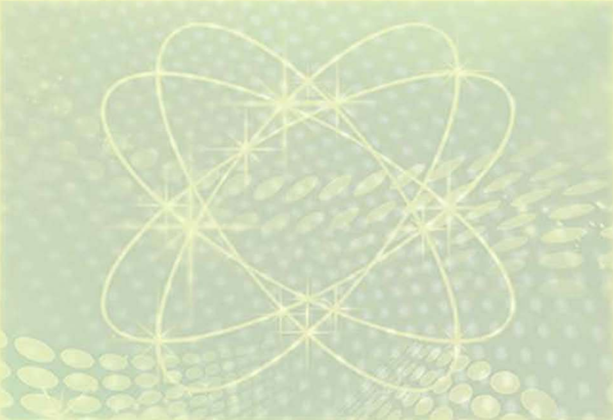
概率论与数理统计

刘庚　刘艳丽　主编



电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 刘庚，刘艳丽主编. —成都：电子科技大学出版社，2016.11

ISBN 978-7-5647-3840-2

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①刘… ②刘… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 199231 号

概率论与数理统计

刘　庚　刘艳丽　主编

出　　版：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）

策划编辑：杜　倩

责任编辑：杜　倩

主　　页：www.uestcp.com.cn

电子邮箱：uestcp@uestcp.com.cn

发　　行：新华书店经销

印　　刷：四川永先数码印刷有限公司

成品尺寸：170mm×240mm　　印张 17.5　　字数 440 千字

版　　次：2016 年 11 月第一版

印　　次：2016 年 11 月第一次印刷

书　　号：ISBN 978-7-5647-3840-2

定　　价：39.00 元

前　言

概率论与数理统计是一门研究和探索客观世界随机现象规律的数学学科，它以随机现象为研究对象，是数学的分支学科，在科学技术领域和生产实践中起到非常重要的作用。目前，概率论与数理统计已成为高等院校理工科和经济管理类各专业的必修课。通过本课程的学习，能让学生初步掌握处理随机现象的基本理论和方法，培养他们分析和解决实际问题的能力。

本书由两部分组成：第一部分（第一章至第六章）为概率论，包括概率论的基本概念和基本概型，条件概率与独立性，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理；第二部分（第七章至第九章）为数理统计，包括数理统计的基本知识，参数估计，假设检验。为了保证本教材适用于应用型本科院校，我们在以下方面努力做到；

（1）注意知识的准确性与体系的严密性，同时在选材与写作上突出通俗性和直观性，使读者容易入门。

（2）每一章都给出本章大纲要求，便于读者了解本章的内容和掌握的程度。

（3）每章末都有一个本章小结，对本章知识进行归纳总结，并且将本章的知识结构用图形表示出来，使知识条理化、系统化。

（4）精心选择和编排了大量的例题和习题，这些题目不仅可以加深读者对基本概念和方法的理解，同时也反映出本门学科在各个方面的广泛应用。

本书由哈尔滨理工大学刘庚、刘艳丽担任主编，刘庚负责拟定本书的编写方案并编写了第六章、第七章、第八章、第九章的内容，刘艳丽负责本书的校对及统稿整理工作并编写了第一章、第二章、第三章、第四章和第五章的内容。

电子科技大学出版社为本书的编辑和出版付出了大量辛勤的劳动，在此，我们表示衷心的感谢！

由于编者的水平所限，虽经多次修改，书中一定还存在许多疏漏和不足，恳请读者批评指正。

编　者

2016 年 6 月

目　录

第一章　概率论的基本概念和基本概型

本章的大纲要求

1．理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，掌握事件之间的关系与运算.

2．频率的稳定性是概率定义的基础，弄清频率与概率的关系，理解概率的定义，掌握概率的基本性质及运算.

3．会计算古典概型和几何概型的概率.

概率论与数理统计学是从数量化的角度来研究现实世界中的一类不确定现象及其规律性的数学学科. 近些年来，它已经广泛应用于工业、农业、国防等各个领域. 本章首先来介绍一下概率论中最重要的概念.

第一节　基 本 概 念

一、随机现象

人们在实践活动中所遇到客观的现象，一般来说可分为两类：一类是必然现象，也称为确定性现象；另一类是随机现象，也称为不确定性现象.

必然现象是指在同样的条件下重复试验，所得结果总是确定的现象；只要试验条件不改变，试验结果在试验之前是可以预知的. 如：在地球上，我们向上抛石子必然会落下；异性电荷相互吸引，同性电荷相互排斥；在没有外力作用的情形下，做匀速直线运动的物体，必然继续做匀速直线运动等等，这些现象都是必然现象.

随机现象是指在同样的条件下重复试验，所得结果不一定相同的现象，即试验结果是不确定的现象；对这种现象来说，在每次试验之前哪一个结果发生，是无法预知的. 如：新生婴儿，可能是男孩，也可能是女孩；在相同条件下抛

掷同一枚硬币，可能正面向上，可能反面向上，也可能立在中间；向一目标进行射击，可能命中目标，也可能不命中目标；盒子中有黑白两种大小、质地相同的球，从中随机摸一个球，可能是黑色的球，也可能是白色的球；走到某十字路口时，可能正好是红灯，也可能正好是绿灯等等，这些现象都是随机现象.

人们经过长期的反复实践，发现这类随机现象从表面上看是杂乱无章、无规律可循，虽然就每次试验结果来说，具有不确定性，但大量重复试验，所得结果却呈现出某种规律性. 如：

掷一枚质量均匀的硬币，当投掷次数很大时，就会发现正面和反面出现的次数几乎各占 1/2. 历史上，德摩根抛掷过 2048 次，得到 1061 次正面向上；蒲丰（Buffon）抛掷过 4040 次，得到 2048 次正面；皮尔逊（K. Pearson）抛掷过 24000 次，得到 12012 次正面.

射手对目标进行射击，当射击次数不多时，弹孔分布看不出有什么规律性；但当射击次数非常多时，就可发现弹孔的分布呈现一定的规律性：弹孔关于目标的分布略呈对称性，且越靠近目标的弹孔越密集，越远离目标的弹孔越稀疏.

我们投掷一个质量均匀的正六面体的骰子，虽然不知道几点向上，但是经过大量的实验可以得出和理论数值基本接近的：每个面向上的机会是一样的，都是 1/6.

从中我们可以看到，随机现象也包含着规律性，它可在相同条件下的大量重复试验或观察中呈现出来. 这种规律性称为随机现象的统计规律性.

概率论与数理统计就是以数量化方法来研究随机现象及其统计规律的一门数学学科.

二、随机试验

为了对随机现象的统计规律性进行研究，就需要对随机现象进行重复性观察，我们把对随机现象的观察称为随机试验，简称试验，以字母 E 表示. 例如，掷一硬币，观察哪面朝上；向一目标进行射击，观察是否命中；从一批产品中随机抽一产品，检查它是否合格等等. 仔细分析，随机试验需要具有以下三个特征：

（1）可重复性：试验可以在相同条件下重复的进行；

（2）可观察性：试验的所有可能结果不止一个，而且是事先已知的；

（3）不确定性：每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但究竟出现哪一个结果，试验前不能确切预知.

三、随机事件与样本空间

尽管一个随机试验将要出现的结果是不确定的，但是它的所有可能结果是明确的. 我们把它的每一个可能结果称为样本点，也称为基本事件，用ω表示. 样本点的全体（或基本事件的全体构成的集合）称为样本空间，记为Ω（或S）.

我们在研究一个随机试验时，首先要明确它的样本空间. 对一个具体的试验来说，其样本空间可以由试验的具体内容确定，下面看几个例子.

例 1 将一枚均匀的骰子，观察正面向上的点数，这是一个随机试验. 它的样本点有：1，2 ，3，4，5，6. 故样本空间

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

例 2 掷一枚均匀对称的硬币连续两次，观察其出现正面或反面的试验中，用正代表正面朝上，反代表反面朝上，试验的可能结果有四个：（正正），（正反），（反正），（反反）. 括号中的字分别代表两次投掷的结果，故样本空间

$$\Omega=\{(\text{正正}),(\text{正反}),(\text{反正}),(\text{反反})\}.$$

例 3 记录某银行在一小时营业时间内到来的顾客人数，这个试验的样本点（记录结果）是一非负的整数，由于难以规定一个顾客人数的上界，所以样本空间可简记为

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}.$$

例 4 从一批灯泡中抽取一只灯泡，测试它的使用寿命. 设t表示寿命，

则样本空间 $\Omega=\{t:t\geq 0\}$.

例 5 观察某地区一昼夜最低温度x和最高温度y. 设这个地区的温度不会小于T_0也不会大于T_1，则样本空间$\Omega=\{(x,y):T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}$.

随机试验的若干个样本点组成的集合称为随机事件，简称事件，常用大写字母$A,B,C,\cdots$表示. 下面我们从一个例子来分析.

例 6 在上面的例 2 中，假设事件$A=$“两次出现同一面”. 在一次试验中，A发生当且仅当在这次试验中出现样本点（正正），（反反）中的一个. 这样可以认为A是由（正正），（反反）组成的集合，即$A=\{(\text{正正}),(\text{反反})\}$.

我们还可以设事件$B=$“第一次出现正面”，B发生当且仅当样本点中（正正），（正反）的一个出现，因此可将B定义为集合$B=\{(\text{正正}),(\text{正反})\}$.

类似地，事件$C=$“至少有一次出现正面”，可定义为集合$C=\{(\text{正正}),(\text{正反}),(\text{反正})\}$.

一般地，人们将事件定义为样本点（或基本事件）的某个集合，即样本空

间的某个子集，称事件 A 发生，当且仅当 A 中某一样本点出现.

样本空间 Ω（或 S）和空集 $\varnothing$ 作为 Ω 的子集也看作事件. 由于 Ω 包含所有的样本点，故在每次试验中，必有一个样本点 $\omega\in\Omega$ 发生，即在试验中，事件 Ω 必然发生，因此 Ω（或 S）是必然事件. 又因在 $\varnothing$ 中不包含任何一个样本点，故在任一次试验中，$\varnothing$ 永远不会发生，因此 $\varnothing$ 是不可能事件. 常用 Ω（或 S），$\varnothing$ 分别表示必然事件与不可能事件. 如在上面的例 1 中，假设事件 $D=$“出现的点数小于 7”是必然事件. 事件 $E=$“出现的点数为 8”是不可能事件.

必然事件与不可能事件可以说不是随机事件，但为了今后研究的方便，还是把它们作为两个特殊的随机事件来处理.

再看几个事件的例子.

例 7 在例 3 中，若设 $A=$“顾客人数不超过四位”，$B=$“顾客人数大于六位”，则 $A=\{0,1,2,3,4\},B=\{7,8,9\cdots\}$.

例 8 在例 4 中，设 $A=$“寿命小于五小时”，则 $A=\{t:0\leqslant t<5\}$.

讨 论 题

1．样本空间与随机试验是什么关系？随机事件与样本空间是什么关系？

2．一个随机试验的样本点的构成是否唯一？为什么？

3．将 5 张扑克牌放在桌上，结果是同花，这是不是一个随机事件？

4．概率为 0 的事件一定是不可能事件吗？概率为 1 的事件一定是必然事件吗？

习题 1-1

1．写出下列随机试验的样本空间：

（1）记录一个班级期末考试概率论与数理统计科目的平均分数（设以百分制记分）.

（2）在单位圆内任意取一点，记录它的坐标.

（3）对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上“正品”，不合格的记上“次品”，如连续查出 2 个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查的结果.

（4）生产产品直到有 5 件正品为止，记录生产产品的总件数.

2．写出下列随机试验的样本空间.

（1）抛掷两枚硬币.

（2）抛掷三颗骰子.

（3）在某十字路口，一小时内通过的机动车辆数.

（4）连续抛一枚硬币，直至出现正面为止.

（5）某城市一天内的温度变化.

3．写出下列随机试验的样本空间及表示下列事件的样本点集合.

（1）一个口袋中有 2 个白球、3 个黑球、4 个红球，从中任取一球：①取得白球，②取得红球.

（2）10 件产品中有 2 件是不合格品，从中任取 2 件恰好取到 1 件不合格品.

第二节　事件的关系与运算

在实际问题中，往往要在同一个试验中同时研究几个事件以及它们之间的联系. 因为事件是样本空间的一个集合，故事件之间的关系与运算可按集合之间的关系与运算来处理.

为直观起见，概率论中常用平面上的一个矩形区域表示样本空间 Ω，矩形内的每一点表示样本点，并用一个圆或其他几何图形表示事件 A，见图 1-1，这类图形称为维恩（Venn）图.

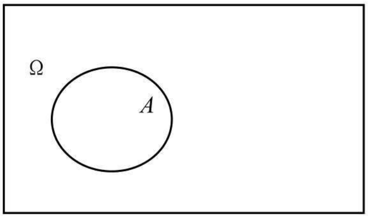


图 1-1　事件 A 的维恩图

一、事件之间的关系

下面讨论的事件总是假设在同一样本空间 Ω（即同一个随机现象）中进行.

1．包含关系

若事件 A 中的每一个样本点都属于事件 B，则称事件 B 包含事件 A，或事

件 A 包含于事件 B，或 A 是 B 的子事件. 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

其含义是：事件 A 发生必然导致事件 B 发生. 故 B 包含 A 也常定义为："若 A 发生必然导致 B 发生，则称 B 包含 A".

例如，在上节例 6 中，由于 $B = \{(正正),(正反)\}$，$C = \{(正正),(正反),(反正)\}$，故有 $B \subset C$.

显然，对任意事件 A，有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

2．相等关系

若事件 A 与事件 B 满足：属于 A 的样本点必属于 B，而且属于 B 的样本点必属于 A，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A = B$.

其含义是：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，且若事件 B 发生必然导致事件 A 发生.

例 9 掷两颗骰子，假设事件 A="两颗骰子的点数之和为奇数"，事件 B="两颗骰子的点数为一奇一偶". 很容易证明：$A = B$.

3．互不相容（或互斥）

若 A 与 B 没有相同的样本点，则称 A 与 B 互不相容. 用概率论的语言说：A 与 B 互不相容就是事件 A 与事件 B 不可能同时发生.

如上节中的例四在灯泡的使用寿命的试验中，"寿命小于 1000 小时"与"寿命大于 1500 小时"是两个互不相容的事件，因为它们不可能同时发生.

特别地，基本事件是两两互不相容的.

二、事件之间的运算

事件的运算与集合的运算相类似，有并、交、差和余四种运算.

1. 事件 A 与事件 B 的并（或和），记为 $A \cup B$. 其含义为"由事件 A 与 B 中所有的样本点（相同的只计入一次）组成的新事件". 或用概率论的语言说："当且仅当事件 A 与 B 中至少有一个发生时，事件 $A \cup B$ 发生".

如在掷一颗骰子，观察正面向上的点数的试验中，记事件 A = "出现奇数点" = $\{1,3,5\}$，记事件 B = "出现的点数不超过 2" = $\{1,2\}$，则 A 与 B 的并为 $A \cup B = \{1,2,3,5\}$.

类似地，称 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件的和事件，称 $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ 为无限数个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ 的和事件.

2. 事件 A 与事件 B 的交（或积），记为 $A \cap B$，或简记为 AB. 其含义为"由事件 A 与 B 中公共的样本点组成的新事件". 或用概率论的语言说："当且仅当

事件 A 与 B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生”.

如在掷一颗骰子，观察正面向上的点数的试验中，记事件 $A=$“出现奇数点”$=\{1,3,5\}$，记事件 $B=$“出现的点数不超过 2”$=\{1,2\}$，则事件 A 与事件 B 的交为 $A\cap B=\{1\}$.

若事件 A 与 B 为互不相容，则其交必为不可能事件，即 $AB=\varnothing$，反之亦然．这表明：$AB=\varnothing$ 就意味着 A 与 B 是互不相容事件.

类似地，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件的积事件，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 为无限数个事件 $A_1,A_2,\dots,A_n\cdots$ 的积事件.

3．事件 A 与事件 B 的差，记为 $A-B$，其含义为“由在事件 A 中而不在 B 中的样本点组成的新事件”．或用概率论的语言说：“当且仅当事件 A 发生而事件 B 不发生时，事件 $A-B$ 发生”.

如在掷一颗骰子，观察正面向上的点数的试验中，记事件 $A=$“出现奇数点”$=\{1,3,5\}$，记事件 $B=$“出现的点数不超过 2”$=\{1,2\}$，则事件 A 与事件 B 的差为 $A-B=\{3,5\}$.

4．对立事件

事件 A 的对立事件（或逆事件），记为 $\overline{A}$，即“由在 Ω 中而不在 A 中的样本点组成的新事件”，或用概率论的语言说：“A 不发生”，即 $\overline{A}=\Omega-A$．其含义是：对每次试验而言，事件 A 与事件 $\overline{A}$ 中必有一个发生，且仅有一个发生．注意，对立事件是相互的，即 A 的对立事件是 $\overline{A}$，而 $\overline{A}$ 的对立事件是 A，即 $\overline{\overline{A}}=A$．必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 互为对立事件，即 $\overline{\Omega}=\varnothing,\overline{\varnothing}=\Omega$.

如在掷一颗骰子，观察正面向上的点数的试验中，记事件 $A=$“出现奇数点”$=\{1,3,5\}$ 的对立事件是 $\overline{A}=\{2,4,6\}$，事件 $B=$“出现的点数不超过 2”$=\{1,2\}$ 的对立事件是 $\overline{B}=\{3,4,5,6\}$.

A 与 B 互为对立事件的充要条件是：$A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$.

此性质也可作为对立事件的另一种定义，即若事件 A 与 B 满足：$A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$，则称 A 与 B 互为对立事件，记为 $\overline{A}=B,\overline{B}=A$.

例 10 设 A、B、C 是某个随机试验的三个事件，用 A、B、C 的运算关系表示下列各事件：

（1）事件“A 与 B 都发生，C 不发生”可表示为：$AB\overline{C}$；

（2）事件“A、B、C 中至少有一个发生”可表示为：$A\cup B\cup C$；

（3）事件“A、B、C 中至少有两个发生”可表示为：$AB\cup AC\cup BC$；

（4）事件“A、B、C中恰好有两个发生”可表示为：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

（5）事件“A发生，B与C不发生”可表示为：$A\overline{B}\overline{C}$

（6）事件“A、B、C同时发生”可表示为：ABC；

（7）事件“A、B、C不全发生”可表示为：$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；

（8）事件“A、B、C都不发生”可表示为：$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

三、事件的运算律

1．交换律 $A\cup B=B\cup A, AB=BA$； （1-1）

2．结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$； （1-2）

$(AB)C=A(BC)$； （1-3）

3．分配律 $(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$； （1-4）

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$； （1-5）

4．自反律 $\overline{\overline{A}}=A$； （1-6）

5．对偶律（德・摩根公式）$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$； （1-7）

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. （1-8）

对偶原理在事件的运算中经常用到，它可以推广到更多个事件的情况，

即 $$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\qquad\overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i}\text{；}\tag{1-8}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}\qquad\overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i}.\tag{1-9}$$

用语言表述为：事件并的对立事件等于对立事件的交，事件交的对立事件等于对立事件的并.

事件间的关系及运算与集合的关系及运算是一致的，记住了这一点就可以熟练而准确地掌握事件之间的关系及运算.

例 11 在检查某种圆柱形零件时，要求它的长度和直径都必须合格．设A,B,C分别表示事件“直径合格”，“长度合格”，“产品合格”，则

（1）$C\subset A,C\subset B$；

（2）$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$分别表示“直径不合格”，“长度不合格”，“产品不合格”；

（3）$C=A\cap B$；

（4）$\overline{C}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

（5）$C=A-\overline{B}$.