固体本构基础

廖力　刘晓宁　编著

北京理工大学出版社

固体本构基础

廖　力　刘晓宁　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

全书共分 10 章。前 4 章为连续介质力学基础；第 5 章讲述以热力学规律作为约束条件建立本构模型的内变量方法；第 6 ~ 10 章根据固体的流变学分类，讲述固体的本构模型及其相应的基本概念和基本理论，其中包括变形与时间无关的弹性和塑性、变形与时间相关的黏弹性和黏塑性。每章均附有习题，书后附有各章习题的参考答案。

本书是为固体力学专业研究生课程“固体本构理论”编写的教材，课程的学时数为 54 学时。本书可供高等院校固体力学、土建结构、机械工程、材料工程、航空工程、船舶工程等专业师生及有关科技人员学习和参考。

图书在版编目（CIP）数据

固体本构基础／廖力，刘晓宁编著．—北京：北京理工大学出版社，2017.11

ISBN 978-7-5682-5002-3

Ⅰ.①固…　Ⅱ.①廖…②刘…　Ⅲ.①固体-本构关系　Ⅳ.①O481

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 289222 号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址／http：//www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本／710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张／11.75　　责任编辑／杜春英
字　　数／208 千字　　文案编辑／杜春英
版　　次／2017 年 11 月第 1 版　2017 年 11 月第 1 次印刷　　责任校对／周瑞红
定　　价／32.00 元　　责任印制／王美丽

前 言

固体本构理论研究在不同环境下，固体材料受力与变形之间的关系，是固体力学学科的一个重要研究方向。面对新材料和新问题的大量涌现，工程科学特别是航空航天工程科学，需要能应对更为复杂的环境，并且能更为准确地描述固体材料力学性能的本构模型。计算机和计算技术的快速发展，为固体本构理论的深入研究和广泛应用提供了强大的物质基础和条件。

为固体力学专业和机械类相关专业研究生开设的“固体本构理论”课程，意在使学生掌握建立固体本构模型的基本概念、基本理论和基本方法。在课程的讲授过程中，参考、借鉴国内外相关著述，我们编写了《固体本构基础》讲义，本书就是在该讲义的基础上修订、补充编撰而成的。本书以 20 世纪 60 年代发展起来的内变量方法为主线，在连续介质力学和热力学的基础上，讲述固体本构模型的建模方法、基本概念和基本理论。为简化问题的复杂性，突出固体本构理论的基础，本书重点讲述小变形情况，以便加强读者对物理非线性基本概念和基本方法的学习，为进一步研究大变形情况——几何非线性打下基础。

全书共分 10 章。前 4 章为连续介质力学基础，包括：第 1 章直角坐标系张量，第 2 章物体的变形，第 3 章应力张量，第 4 章连续介质力学基本规律。第 5 章讲述以热力学规律作为约束条件建立本构模型的内变量方法，第 6 章讲述固体的流变学分类，第 7 章和第 8 章分别讲述变形与时间无关的弹性和塑性，第 9 章和第 10 章分别讲述变形与时间相关的黏弹性和黏塑性。为便于巩固所学内容，每章均附有习题，书后附有各章习题的参考答案。

胡更开教授对本书进行了认真的审阅，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。限于作者水平，书中难免存在缺点和错误，敬请读者批评指正。

作 者

2017 年 8 月

目　录

第 1 章

直角坐标系张量

自然规律的表述通常与坐标系的选取无关，其物理量用张量表示，简洁、高效，便于反映复杂现象的本质。坐标系是非常有用的数学工具，可使数学物理方程的计算更为方便。根据问题的不同，可选用不同的坐标系，并且不同的坐标系之间张量满足一定的变换关系。将直角坐标系的结果转换到任意给定的曲线坐标系，可参照相关的论述。本书着重讲述用直角坐标系张量描述材料的本构理论。因此，本章限于讨论直角坐标系张量，又称为笛卡儿张量。

§1.1 直角坐标系

在三维空间中，三条相互正交于原点 O 的直线 x_1，x_2，x_3 构成一直角坐标系。$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 分别代表这三条直线的方向，其长度为 1，称为基矢。习惯上采用右手坐标系，如图 1.1 所示。其任意两个基矢的点积为

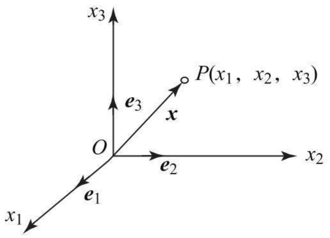

图 1.1　直角坐标系

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{1.1}$$

δ_{ij} 称为 Kronecher delta，下标 i，j 可在 1，2，3 中自由选取，称为自由指标。若以矩阵形式表示，则有

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

空间中一点 P 的位置，可用矢径 $\boldsymbol{x}$ 表示：

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \tag{1.3}$$

按照 Einstein 求和约定，上式可简写为

$$\boldsymbol{x}=x_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.4}$$

下标 i 重复出现，称作哑标。在三维欧氏空间中，哑标应遍取 1，2，3 进行求和，因此哑标可用任意字母表示。例如：

$$\delta_{ii}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3$$

§1.2 坐标变换

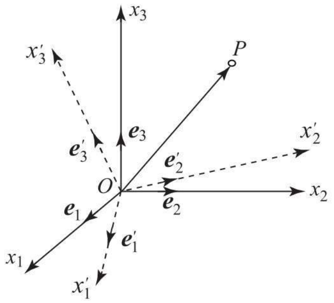

图 1.2 坐标变换

设另有一组交于原点 O 的右手直角坐标系 $Ox_1'x_2'x_3'$，其基矢为 $\boldsymbol{e}_1'$，$\boldsymbol{e}_2'$，$\boldsymbol{e}_3'$，如图 1.2 所示。两组直角坐标系基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 与 $\boldsymbol{e}_j'$ 的点积为该两直线方向的方向余弦：

$$\beta_{ij'}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j'=\cos(x_i,\ x_j')$$

或

$$\beta_{i'j}=\boldsymbol{e}_i'\cdot\boldsymbol{e}_j=\cos(x_i',\ x_j) \tag{1.5}$$

用矩阵表示为

$$[\beta_{ij'}]=\begin{bmatrix}\cos(x_1,\ x_1') & \cos(x_1,\ x_2') & \cos(x_1,\ x_3')\\ \cos(x_2,\ x_1') & \cos(x_2,\ x_2') & \cos(x_2,\ x_3')\\ \cos(x_3,\ x_1') & \cos(x_3,\ x_2') & \cos(x_3,\ x_3')\end{bmatrix} \tag{1.6}$$

$[\beta_{i'j}]$ 为 $[\beta_{ij'}]$ 的转置矩阵，$[\beta_{i'j}]=[\beta_{ij'}]^{\mathrm{T}}$，或 $\beta_{ij'}=\beta_{j'i}$。由于 $[\beta_{ij'}][\beta_{j'k}]=[\delta_{ik}]$，表明 $[\beta_{ij'}]$ 为正交矩阵，即 $[\beta_{i'j}]=[\beta_{ij'}]^{-1}$。

因此，两组基矢间满足转换关系

$$\boldsymbol{e}_i=\beta_{ij'}\boldsymbol{e}_j' \quad 或 \quad \boldsymbol{e}_i'=\beta_{i'j}\boldsymbol{e}_j \tag{1.7}$$

P 点位置也可用矢径 $\boldsymbol{x}'$ 表示，$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}$，由式（1.4）和式（1.7）有

$$x_i\boldsymbol{e}_i=x_j'\boldsymbol{e}_j'=x_j'\beta_{j'i}\boldsymbol{e}_i=\beta_{ij'}x_j'\boldsymbol{e}_i \tag{1.8}$$

比较上式两边有

$$x_i=\beta_{ij'}x_j' \quad 或 \quad x_i'=\beta_{i'j}x_j \tag{1.9}$$

上式即两组坐标系之间的坐标变换关系，$[\beta_{ij'}]$ 或 $[\beta_{i'j}]$ 称为坐标变换矩阵。

§1.3 张量

引进坐标系表示具有某种方向性组合的物理量 $\boldsymbol{T}$。设该物理量 $\boldsymbol{T}$ 在不同直角坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{T}=T_{ij\cdots k}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdots\boldsymbol{e}_k \tag{1.10a}$$

$$\boldsymbol{T}'=T'_{rs\cdots t}\boldsymbol{e}_r'\boldsymbol{e}_s'\cdots\boldsymbol{e}_t' \tag{1.10b}$$

其中 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdots\boldsymbol{e}_k$ 代表该物理量表示方向性所需的组合基矢，设组合基矢的个数为 n。若其坐标分量满足如下坐标转换规律：

$$T_{ij\cdots k}=\beta_{ir'}\beta_{js'}\cdots\beta_{kt'}\,T'_{rs\cdots t} \tag{1.11}$$

则由式（1.7）有

$$T'_{rs\cdots t}\boldsymbol{e}'_r\boldsymbol{e}'_s\cdots\boldsymbol{e}'_t=\beta_{ir'}\beta_{js'}\cdots\beta_{kt'}\,T'_{rs\cdots t}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdots\boldsymbol{e}_k=T_{ij\cdots k}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdots\boldsymbol{e}_k$$

即 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}'$，我们称这样的物理量为张量，而组合基矢的个数 n 称为该张量的阶数。由此可见，张量表示的是具有某种方向组合的物理量，该物理量与坐标系的选择无关。

例如，物体的温度或质量密度等物理量是位置的函数，与方向无关，称为零阶张量，用标量表示。另外一些物理量用矢量表示，如质点的位移、速度、加速度，以及物体受到的作用力等，可以表示为 $\boldsymbol{T}=T_i\boldsymbol{e}_i$，其组合基矢的数量 $n=1$，即矢量为一阶张量。组合基矢的数量 $n=2$ 时，称为二阶张量，如表示物体质量分布的惯量张量，表示一点处变形的应变张量及与之对应的应力张量等。二阶张量可以表示为 $\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$。张量可以有多种表示方法，例如用 $\boldsymbol{T}$ 或其他大写的斜粗体表示。在给定坐标系的情况下，也可以用省略基矢的形式表示，例如二阶张量表示为 T_{ij}，代表一组张量分量的集合，其中 i 和 j 为自由指标。这种表示方法的优点在于，其表达方式为标量形式，在进行运算时，符合熟知的标量运算法则。有时为清楚起见，二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 也可以用一个 3×3 的矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

而形如 T_{12}，只是表示该张量的一个分量。矢量可以用 T_i 表示，也可用 1×3 的列阵表示：

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

§1.4　张量代数

1. 张量的相加

两个同阶的张量相加，是其对应的分量相加，基矢不变，得到的仍是同阶张量。

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T} \tag{1.12}$$

对于二阶张量

$$A_{ij}+B_{ij}=T_{ij}$$

2. 张量的并乘

两个张量的并乘，是将两个张量的基矢并列，其对应的分量相乘。例如 m 阶张量 $\boldsymbol{A}$ 与 n 阶张量 $\boldsymbol{B}$ 的并乘：

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{T} \tag{1.13}$$

$\boldsymbol{T}$ 是 $m+n$ 阶张量。设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为二阶张量，则 $\boldsymbol{T}$ 为四阶张量，且

$$A_{ij}B_{kl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l=T_{ijkl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l \quad 或 \quad A_{ij}B_{kl}=T_{ijkl}$$

标量 k 并乘二阶张量 $\boldsymbol{B}$，得到的张量 $\boldsymbol{T}$ 仍为二阶张量：

$$k\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T} \quad 或 \quad kB_{ij}=T_{ij} \tag{1.14}$$

3. 张量的点积

两个张量的点积，是先将两个张量并乘，然后对两个张量任意指定的基矢进行点积；若未事先指明，则对两个张量靠得最近的两个基矢进行点积。由于点积后张量的基矢缩减两个，因此点积又称缩并。

例如 m 阶张量 $\boldsymbol{A}$ 与 n 阶张量 $\boldsymbol{B}$ 点积：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T} \tag{1.15}$$

$\boldsymbol{T}$ 是 $m+n-2$ 阶张量。设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为二阶张量，则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}$ 也为二阶张量：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j)\cdot(B_{kl}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l)=A_{ij}\delta_{jk}B_{kl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_l=A_{ik}B_{kl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_l=T_{il}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{T}$$

或

$$A_{ik}B_{kl}=T_{il}$$

式中，对基矢 $\boldsymbol{e}_j$ 与 $\boldsymbol{e}_k$ 进行了缩并。

双点积是两个张量并乘后，对其基矢依顺序点积两次。例如 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为二阶张量，则 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}=k$ 为零阶张量（标量）。

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}=(A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j):(B_{kl}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l)=A_{ij}\delta_{ik}\delta_{jl}B_{kl}=A_{kj}B_{kj}=k \tag{1.16}$$

式中，分别对基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 与 $\boldsymbol{e}_k$ 和 $\boldsymbol{e}_j$ 与 $\boldsymbol{e}_l$ 进行了缩并。

矢量 $\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 的点积为

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}=(U_i\boldsymbol{e}_i)\cdot(V_j\boldsymbol{e}_j)=U_iV_i=k \tag{1.17}$$

标量 k 的几何意义：$k=|\boldsymbol{U}||\boldsymbol{V}|\cos\theta$，其中 θ 为矢量 $\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 之间的夹角，$|\boldsymbol{U}|$ 和 $|\boldsymbol{V}|$ 分别为两个矢量的绝对值；当 $\boldsymbol{V}$ 为单位矢量时，k 表示矢量 $\boldsymbol{U}$ 在 $\boldsymbol{V}$ 方向上的投影。若 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 为非零矢量，且 $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}=0$，则 $\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 正交，反之亦然。

4. 矢量的叉积与混合积

定义置换符号 e_{ijk}：

$$e_{ijk}=\begin{cases}1, & ijk=123 \text{ 的偶次置换} \\ -1, & ijk=123 \text{ 的奇次置换} \\ 0, & \text{其他情况}\end{cases} \tag{1.18}$$

矢量 $\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 的叉积 $\boldsymbol{W}$ 仍为矢量：

$$\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}=-\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{U}=\boldsymbol{W} \tag{1.19}$$

$$\boldsymbol{W}=e_{ijk}U_iV_j\boldsymbol{e}_k \quad \text{或} \quad W_k=e_{ijk}U_iV_j \tag{1.20}$$

矢量 $\boldsymbol{W}$ 的几何意义：其大小 $|\boldsymbol{U}||\boldsymbol{V}|\sin\theta$ 为矢量 $\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 构成的平行四边形的面积，其方向与 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 正交，且 $\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{W}$ 组成右手坐标系，其中 θ 为矢量 $\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 之间的夹角。若 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 为非零矢量，且 $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}=0$，则 $\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 平行，反之亦然。

矢量 $\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{W}$ 的混合积（$\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{W}$）为一标量：

$$(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})=\boldsymbol{U}\cdot(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})=(U_i\boldsymbol{e}_i)\cdot(e_{jkl}V_kW_l\boldsymbol{e}_j)=e_{jkl}U_jV_kW_l \tag{1.21}$$

混合积（$\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$）各矢量位置可以轮换：

$$\boldsymbol{U}\cdot(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})=\boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{W}\times\boldsymbol{U})=\boldsymbol{W}\cdot(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V})$$

混合积（$\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$）代表由 $\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{W}$ 构成的平行六面体的体积。因此置换符号也可以由直角坐标系基矢的混合积表示：

$$e_{ijk}=(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j,\ \boldsymbol{e}_k) \tag{1.22}$$

5. 张量的转置

二阶张量 $\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 的转置 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ 定义为

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=T_{ji}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \quad \text{或} \quad T_{ij}^{\mathrm{T}}=T_{ji} \tag{1.23}$$

显然

$$(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T} \tag{1.24}$$

若 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}$，或 $T_{ij}=T_{ji}$，则称 $\boldsymbol{T}$ 为对称张量。

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为二阶张量，$\boldsymbol{U}$ 为矢量，则有

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \tag{1.25}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \quad \text{或} \quad A_{ij}U_j=U_jA_{ji}^{\mathrm{T}} \tag{1.26}$$

6. 各向同性张量

若一张量的每一分量在不同坐标系下均保持不变，则称该张量为各向同性张量。标量为零阶张量，与坐标的选择无关，因此任意标量均为各向同性张量。矢量为一阶张量，无各向同性张量。

以 δ_{ij} 为坐标分量的二阶张量 $\boldsymbol{\delta}=\delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 称为单位张量。在不同坐标系下，$\boldsymbol{\delta}=\delta'_{ij}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j$，而 $\delta'_{ij}=\boldsymbol{e}'_i\cdot\boldsymbol{e}'_j=\delta_{ij}$。因此，任意标量 k 与单位张量 $\boldsymbol{\delta}$ 的乘积，为各向同性张量。

二阶各向同性张量一定可以表示为 $k\boldsymbol{\delta}$ 或 $k\delta_{ij}$的形式。

证明：设 $\boldsymbol{T}$ 为二阶各向同性张量，则应有

$$T_{ij}=\beta_{ir'}\beta_{js'}T'_{rs}=T'_{ij} \tag{1.27}$$

令坐标系绕 x_3 轴转动 90°，坐标转换矩阵式（1.6）为

$$[\beta_{ij'}]=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

代入式（1.27），有 $T_{11}=T'_{22}=T'_{11}$，$T_{22}=T'_{11}=T'_{22}$，所以 $T_{11}=T_{22}$。令坐标系绕 x_2 轴转动 90°，可得 $T_{11}=T_{33}$，令 $T_{11}=T_{22}=T_{33}=k$；同理，令坐标系绕 x_3 轴转动 180°，有 $T_{13}=-T'_{13}=T'_{13}$，所以 $T_{13}=0$；类似地，当 $i\neq j$ 时，$T_{ij}=0$，即 $T_{ij}=k\delta_{ij}$。

以置换符号 e_{ijl} 为坐标分量的三阶张量 $\boldsymbol{э}=e_{ijl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_l$ 称为转换张量。三阶各向同性张量一定可以表示为 $k\boldsymbol{э}$ 或 ke_{ijl}的形式，其中 k 为任意标量。

四阶各向同性张量有三种基本形式：

$$\boldsymbol{I}^{(0)}=\delta_{ij}\delta_{kl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\,\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l,\quad \boldsymbol{I}^{(1)}=\delta_{ik}\delta_{jl}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\,\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l,\quad \boldsymbol{I}^{(2)}=\delta_{il}\delta_{jk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\,\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l \tag{1.28}$$

四阶各向同性张量 $\boldsymbol{I}^{(\mathrm{i})}$ 一定可以表示为 $a\boldsymbol{I}^{(0)}+b\boldsymbol{I}^{(1)}+c\boldsymbol{I}^{(2)}$ 的形式，或

$$I^{(\mathrm{i})}_{ijkl}=a\delta_{ij}\delta_{kl}+b\delta_{ik}\delta_{jl}+c\delta_{il}\delta_{jk} \tag{1.29}$$

式中，a，b，c 为任意标量。

7. 张量的商

若一物理量 $\boldsymbol{T}$ 与任意张量 $\boldsymbol{B}$ 点积，得到张量 $\boldsymbol{A}$，则该物理量 $\boldsymbol{T}$ 必为张量，张量 $\boldsymbol{T}$ 称为张量 $\boldsymbol{A}$ 相对于张量 $\boldsymbol{B}$ 的商。例如，若一物理量 $\boldsymbol{T}$ 与任意矢量 $\boldsymbol{V}$ 点积，得到的是 $n-1$ 阶张量 $\boldsymbol{A}$，则该物理量 $\boldsymbol{T}$ 必定是 n 阶张量。

证明：设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶张量，物理量 $\boldsymbol{T}$ 可以表示为 $T_{(ijk)}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k$，则 $\boldsymbol{T}$ 与任意矢量 $\boldsymbol{V}=V_l\boldsymbol{e}_l$ 点积有

$$T_{(mnl)}V_l\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n=A_{mn}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n \tag{1.30}$$

或

$$T'_{(ijk)}V'_k\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j=A'_{ij}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j \tag{1.31}$$

式（1.31）利用式（1.7）对基矢进行坐标变换有

$$T'_{(ijk)}V'_k\beta_{i'm}\beta_{j'n}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n=A'_{ij}\beta_{i'm}\beta_{j'n}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n \tag{1.32}$$

而 $V'_k=\beta_{k'l}V_l$，$A_{mn}=\beta_{mi'}\beta_{nj'}A'_{ij}=A'_{ij}\beta_{i'm}\beta_{j'n}$，代入式（1.32）并与式（1.30）相减有

$$(\beta_{mi'}\beta_{nj'}\beta_{lk'}T'_{(ijk)}-T_{(mnl)})V_l=0$$

由 V_l 的任意性，则有

$$T_{(mnl)}=\beta_{mi'}\beta_{nj'}\beta_{lk'}T'_{(ijk)}$$

由此可见，物理量 $\boldsymbol{T}$ 的坐标分量满足张量的坐标转换规律——式（1.11），即 $\boldsymbol{T}$ 为

三阶张量。

同理，若一物理量 $\boldsymbol{T}$ 与任意二阶张量 $\boldsymbol{B}$ 双点积，得到的是 $n-2$ 阶张量 $\boldsymbol{A}$，则该物理量 $\boldsymbol{T}$ 必定是 n 阶张量。

§1.5　张量的微分

设张量 $\boldsymbol{T}$ 是自变量 t 的函数，t 为标量，即 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(t)$，若存在

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{T}(t+\Delta t)-\boldsymbol{T}(t)}{\Delta t} \tag{1.33}$$

则$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}$称为张量 $\boldsymbol{T}$ 在 t 处的导数，$\mathrm{d}\boldsymbol{T}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$ 为 $\boldsymbol{T}$ 在 t 处的微分。由此可见，张量的微分仍为同阶的张量。若自变量 t 代表时间，则张量 $\boldsymbol{T}$ 对时间 t 的导数记为 $\dot{\boldsymbol{T}}$ 。

1. 标量函数的梯度

设 $f(\boldsymbol{x})$ 为矢径 $\boldsymbol{x}$ 的标量函数，则函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的微分

$$\mathrm{d}f=f(\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{1.34}$$

由张量的商法则，$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}$ 为一矢量，可表示为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \tag{1.35}$$

称为函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的梯度，通常用∇f 或 $\mathrm{grad}f$ 表示。∇为一矢量算符：

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \tag{1.36}$$

令 $f_{,i}=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$，其中逗号“,”后的下标 i 表示对坐标分量 x_i 求偏导数，因此

$$\nabla f=f_{,i}\boldsymbol{e}_i \tag{1.37}$$

$$\mathrm{d}f=\nabla f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}=(f_{,i}\boldsymbol{e}_i)\cdot(\mathrm{d}x_j\boldsymbol{e}_j)=f_{,i}\mathrm{d}x_i \tag{1.38}$$

标量函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的梯度∇f 的几何意义：$f(\boldsymbol{x})=C$，在三维空间中表示一曲面，称为等势面，$f(\boldsymbol{x})$ 称为势函数，常数 C 取不同的值时，代表不同的等势面。考虑等势面上 $\boldsymbol{x}$ 处邻域一点 $\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，如图 1.3 所示，显然有 $f(\boldsymbol{x})=C$，$f(\boldsymbol{x}+\mathrm{d}\boldsymbol{x})=C$，两式相减得

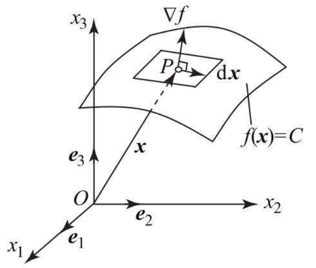

图 1.3　等势面与势函数的梯度

$$df=f(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})=\nabla f\cdot d\boldsymbol{x}=0 \tag{1.39}$$

上式表明∇f与 $d\boldsymbol{x}$ 正交，即标量势函数$f(\boldsymbol{x})$ 的梯度∇f，其方向与等势面的切面正交，指向等势面扩大的方向，该方向是势函数$f(\boldsymbol{x})$ 变化最快的方向。

设$f(\boldsymbol{T})$ 是二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的标量函数，则函数$f(\boldsymbol{T})$ 的微分

$$df=f(\boldsymbol{T}+d\boldsymbol{T})-f(\boldsymbol{T})=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{T}}:d\boldsymbol{T} \tag{1.40}$$

由张量的商法则，$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{T}}$为二阶张量，可表示为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{T}}=\frac{\partial f}{\partial T_{ij}}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{1.41}$$

$$df=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{T}}:d\boldsymbol{T}=\frac{\partial f}{\partial T_{ij}}dT_{ij} \tag{1.42}$$

在由二阶张量 T_{ij}的 9 个分量张成的九维欧氏空间中，$f(\boldsymbol{T})=C$ 代表一等势面，标量势函数$f(\boldsymbol{T})$ 的梯度$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{T}}$或$\dfrac{\partial f}{\partial T_{ij}}$的方向与该等势面的“切面”正交，是势函数$f(\boldsymbol{T})$ 变化最快的方向。

2. 矢量函数的梯度

设 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$ 是矢径 $\boldsymbol{x}$ 的矢量函数，则函数 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$ 的微分

$$d\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})-\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot d\boldsymbol{x} \tag{1.43}$$

由张量的商法则，$\dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}$为二阶张量，称为矢量函数 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$ 的梯度，可用$\nabla\boldsymbol{V}$ 表示，∇仍为式（1.36）所示的矢量算符。

$$\nabla\boldsymbol{V}=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}}=\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_j=\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=V_{i,j}\,\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{1.44}$$

$$d\boldsymbol{V}=\nabla\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{x}=V_{i,j}dx_j\boldsymbol{e}_i \quad 或 \quad dV_i=V_{i,j}dx_j \tag{1.45}$$

3. 张量函数的梯度

设 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ 是矢径 $\boldsymbol{x}$ 的 n 阶张量函数，则 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ 的梯度$\nabla\boldsymbol{T}$ 为 n+1 阶张量。

$$\nabla\boldsymbol{T}=\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{x}}=\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_j \tag{1.46}$$

函数 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ 的微分

$$d\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot d\boldsymbol{x} \tag{1.47}$$

4. 张量的散度

张量 $\boldsymbol{T}$ 的散度定义为 $\nabla \cdot \boldsymbol{T}$：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{T} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x_j} \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{1.48}$$

例如，矢量 $\boldsymbol{V}$ 的散度

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x_j} \cdot \boldsymbol{e}_j = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = V_{i,i} \tag{1.49}$$

标量函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的梯度 ∇f 的散度

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial\ \nabla f}{\partial x_j} \cdot \boldsymbol{e}_j = f_{,ij} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = f_{,ii} \tag{1.50}$$

5. 张量的旋度

张量 $\boldsymbol{T}$ 的旋度定义为 $\nabla \times \boldsymbol{T}$：

$$\nabla \times \boldsymbol{T} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x_j} \times \boldsymbol{e}_j \tag{1.51}$$

例如，矢量 $\boldsymbol{V}$ 的旋度

$$\nabla \times \boldsymbol{V} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x_j} \times \boldsymbol{e}_j = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = V_{i,j}\, e_{ijk} \boldsymbol{e}_k \tag{1.52}$$

标量函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的梯度 ∇f 的旋度

$$\nabla \times \nabla f = \frac{\partial\ \nabla f}{\partial x_j} \times \boldsymbol{e}_j = f_{,ij} \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = f_{,ij} e_{ijk} \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{0} \tag{1.53}$$

6. Green 公式

设闭合曲面 S 包围的体积为 V，张量 $\boldsymbol{T}$ 的散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{T}$ 的体积积分与 $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n}$ 的面积积分相等，称为 Green 公式。

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{T} \mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{1.54}$$

式中，单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 表示 $\mathrm{d}S$ 的外法向。例如，$\boldsymbol{T}$ 为二阶张量，则有

$$\int_V T_{ij,\,j}\, \boldsymbol{e}_i \mathrm{d}V = \int_S T_{ij} n_j\, \boldsymbol{e}_i \mathrm{d}S \quad 或 \quad \int_V T_{ij,\,j} \mathrm{d}V = \int_S T_{ij} n_j \mathrm{d}S \tag{1.55}$$

习题

1-1　试求坐标系分别绕 x_3 轴转动 90°，180°和 45°时的坐标变换矩阵 $[\beta_{ij'}]$。

1-2 证明 δ_{ij} 为二阶张量。

1-3 证明 e_{ijk} 为三阶张量。

1-4 证明 $e_{ijk}e_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$，$e_{ijk}e_{ijk}=6$。

1-5 设 $\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{W}$ 为矢量，证明 $\boldsymbol{U}\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W})=(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{W})\boldsymbol{V}-(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{W}$。

1-6 证明若有 $e_{ijk}T_{jk}=0$，则 $\boldsymbol{T}$ 为对称的二阶张量。

1-7 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为二阶张量，证明（$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$）$^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

1-8 设 $\boldsymbol{A}$ 为对称的二阶张量，$\boldsymbol{B}$ 为反对称的二阶张量（$B_{ij}=-B_{ji}$），证明 $A_{ij}B_{ij}=0$，$B_{ij}U_iU_j=0$。

1-9 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为二阶张量，并且 $\boldsymbol{A}$ 为对称的，证明 $A_{ij}B_{ij}=A_{ij}B^s_{ij}$，其中 $\boldsymbol{B}^s$ 为张量 $\boldsymbol{B}$ 的对称部分。

1-10 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为二阶张量，证明 $A_{ij}B_{ij}=A'_{ij}B'_{ij}$，即 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}$ 与坐标的选择无关。

1-11 证明三阶各向同性张量的形式一定为 ke_{ijl}。

1-12 证明若一物理量 $\boldsymbol{T}$ 与任意二阶张量 $\boldsymbol{B}$ 双点积，得到的是矢量 $\boldsymbol{V}$，则该物理量 $\boldsymbol{T}$ 必定是三阶张量。

1-13 证明 $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{V}=0$，其中 $\boldsymbol{V}$ 为矢量。

1-14 设 $\boldsymbol{V}$ 为一矢量，其梯度 $\nabla\boldsymbol{V}$ 的反对称部分为 $\boldsymbol{W}$，证明 $\nabla\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{э}:\boldsymbol{W}$，其中 $\boldsymbol{э}$ 为三阶的转换张量。

1-15 试求标量函数 $f(x,y,z)=x^2+y$ 等势面在点（0，4，2）和点（1，2，3）处的单位法向量和方向导数的最大值，以及（1，1，0）方向的方向导数。

1-16 试求标量函数 $f(T_{ij})=T_{ij}T_{ij}/2$ 对时间 t 的导数。